VIII.
SPRAWOZDANIE

Dyrekcyi
c. k. wyższej szkoły realnej w Jarosławiu za rok szkolny 1911|12

TREŚĆ:

NAKŁADEM FUNDUSZU NAUKOWEGO

Z DRUKARNI L. WIŚNIEWSKIEGO W JAROSŁAWIU

1912.

RY. URw
Spr 51

Geometrya analityczna w szkole średniej.

CZĘŚĆ I.

Wyznaczniki.

§ 1.

Określenia. Zbiór tylu liczb dowolnych, ile jedności zawiera kwadrat jakiejkolwiek całkowitej liczby n, pisanych obok siebie i pod sobą tak, że tworzą tablicę kwadratową liczb, objętą z lewej i prawej strony linijkami pionowemi, nazwano *wyznacznikiem.* Według tego wyznacznikami są symbole:

$$(1)\quad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & \tfrac{1}{2} \end{vmatrix}, \qquad (2)\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_2 \\ a_2 \,.\,. & b_2 \,.\,. & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{i t. d.}$$

Najogólniejszym wyznacznikiem jest symbol:

$$(3)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \,.\,. & a_{1k} \,.\,. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \,.\,. & a_{2k} \,.\,. & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \,.\,. & a_{3k} \,.\,. & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \,.\,. & a_{ik} \,.\,. & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \,.\,. & a_{nk} \,.\,. & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Każda liczba, wchodząca w skład wyznacznika jest jego *elementem.* Elementy, pisane obok siebie, stanowią *wiersze,* pisane pod sobą *kolumny* wyznacznika.

W każdym wyznaczniku ilość wierszy równa się ilości kolumn. Wiersze liczy się z góry na dół, kolumny od ręki lewej ku prawej. (Czyt. wiersz: 1y, 2i, 3i, . . . ity, . . . nty; kolumna: 1a, 2a, 3a, . . . kta, . . . nta.

Wyznacznik (1) ma 2 wiersze, 2 kolumny, a 2^2 elementów
„ (2) „ 3 „ 3 „ , „ 3^2 „

. . . .

. . . .

„ (3) „ n wierszy, n kolumn, „ n^2 „

Zasady potęg: 2^2, 3^2, . . . n^2 są *stopniami* wyznaczników.

Wyznacznik (3) jest kształtu najogólniejszego, bo jest ogólnym ze względu na stopień i elementy; wyznacznik (2) jest ogólnym tylko ze względu na elementy, wreszcie wyznacznik (1) jest szczegółowym pod każdym względem.

Wskaźnik: i, k elementu a_{ik} w wyznaczniku (3) nie tylko odróżnia element ten od każdego innego, ale zarazem wskazuje położenie jego w całym składzie wyznacznika. Mówi więc, że ów element stoi w itym wierszu, a w ktej kolumnie. Skreślenie jednego któregokolwiek wiersza i jednej którejkolwiek kolumny w danym wyznaczniku prowadzi do nowego wyznacznika, którego stopień jest o 1 niższy od stopnia pierwotnego wyznaczniczka. Wyznacznik, w ten sposób otrzymany, nazywają *podwyznacznikiem*, albo *minorem rzędu pierwszego*, należącym do tego elementu, w którym opuszczony wiersz i opuszczona kolumna się przecinają. Tak n. p., gdy w wyznaczniku (3) skreślimy ity wiersz i kta kolumnę, otrzymamy podwyznacznik (minor) rzędu pierwszego elementu a_{ik}; będzie on zarazem wyznacznikiem stopnia (n — 1).

Minor elementu a_{ik} oznaczać będziemy dla skrócenia przez: A_{ik}. Skreślenie drugiego wiersza i drugiej kolumny w wyznaczniku (2) uwidoczniono linijkami kreskowanymi. Podwyznacznikiem elementu b_2 jest wyznacznik:

$$B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Oczywiście, że w otrzymanym minorze rzędu 1ego można znów skreślić jeden wiersz i jedną kolumnę, wskutek czego otrzyma się wyznacznik rzędu 2go, który będzie wyznacznikiem stopnia (n — 2) itd.

§ 2.

Rozwijanie wyznaczników.

Każdy wyznacznik ma wartość zupełnie określoną, jeśli tą cechą odznaczają się wszystkie jego elementy. Przy wyznaczaniu wartości wyznaczników obowiązują umowy wyrażone równościami:

(1) $$|a| = a\,{}^{*})$$

(2) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

(3) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \,.\,.\, & a_{1k} \,.\,.\, & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \,.\,.\, & a_{2k} \,.\,.\, & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} \,.\,.\, & a_{1k} \,.\,.\, & a_{3n} \\ . & . \;.\; . & . \;. & . \\ . & . \;.\; . & . \;. & . \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ik} & a_{in} \\ . & . \;.\; . & . \;. & . \\ . & . \;.\; . & . \;. & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nk} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} - a_{21} \,.\, A_{21} + a_{31} \,.\, A_{31} \ldots + \\ + (-1)^{i+1} a_{i1} A_{i1} \ldots + (-1)^{n+1} a_{n1} A_{n1}$$

Równości (1) i (2) nie potrzebują bliższego wyjaśnienia. W równości (3) liczby:

$$A_{11},\ A_{21},\ A_{31},\ \ldots\ A_{i1},\ \ldots\ A_{n1}$$

oznaczają minory elementów:

$$a_{11},\ a_{21},\ a_{31},\ \ldots\ a_{i1},\ \ldots\ a_{n1},$$

stojących w pierwszej kolumnie.

Ponieważ minory owe są wyznacznikami stopnia $(n - 1)$, przeto widzimy, że obliczenie wartości wyznacznika stopnia n

*) Symbol: $|a|$ w algebrze oznacza bezwzględną wartość liczby a.

sprowadza się do obliczenia n nowych wyznaczników stopnia $(n-1)$, te znów dadzą się wyrazić $(n-1)$ wyznacznikami stopnia $(n-2)$ i t. d., dopóki nie dojdziemy do wyznaczników stopnia 2go, które bezpośrednio dadzą się obliczyć na podstawie umowy (2). Wolno zaś tak postępować dlatego, bo umowę (3) przyjęliśmy bez zastrzeżeń t. j. bez względu na wartość liczby n.

O wyznacznikach, rozwiniętych w sposób powyżej wskazany, mówimy, że są rozwinięte podług elementów pierwszej kolumny.

Równość (3) wyraża nadto, że *wyznacznik stopnia n równa się sumie algebraicznej minorów rzędu pierwszego, opatrzonych stosownymi znakami, pomnożonych przez odpowiednie elementy pierwszej kolumny.* Składniki tej sumy mają naprzemian znaki $+$ i $-$. Ściślej mówiąc, znak składnika sumy jest właściwie znakiem podwyznacznika, który w tym składniku figuruje jako drugi czynnik. Znak minora A_{i1} jest:

$$(-1)^{i+1} = \pm 1$$

zależnie od tego, czy numer wiersza i jest liczbą nieparzystą czy parzystą.

Przykład:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

Po zupełnem rozwinięciu przedstawia się wyznacznik stopnia 3go jako suma algebraiczna iloczynów, z których każdy zawiera trzy czynniki, bo wyznacznik był stopnia 3go. Łatwo upewnić się, że, po rozwinięciu wyznacznika stopnia 4go, składniki sumy będą iloczynami o 4 czynnikach i t. d.

Czynnikami tych składników są z natury rzeczy elementy wyznacznika tak dobrane, że dwa którekolwiek z nich nie mogą równocześnie należeć do tego samego wiersza lub tej samej kolumny, w braku zaś dostatecznej ilości identycznych elementów w wyznaczniku, żaden składnik nie powtórzy się 2, a tem mniej 3 i t. d. razy.

Składniki w połowie są dodatnie, w połowie ujemne, a ilość ich jest zupełnie określoną i bardzo prostą funkcyą stopnia wyznacznika. Istotnie, z rozwinięcia wyznaczników stopni: 2go, 3go, 4go i t. d., otrzymamy kolejno: 2, 6, 24 i t. d. składników.

Lecz:

$$\begin{aligned} 2 &= 1.\ 2 \\ 6 &= 1.\ 2.\ 3 \\ 24 &= 1.\ 2.\ 3.\ 4 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Jeśli więc przez P_n oznaczymy ilość składników, powstałych z ostatecznego rozwinięcia wyznacznika stopnia *n*, otrzymamy:

$$P_n = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \dots\ (n-1)\ .\ n$$

czyli

$$P_n = n\,!$$

Ilość składników, powstałych z zupełnego rozwinięcia wyznacznika stopnia n, równa się ilości permutacyi grupy klasy n bez powtarzania.

Rozwińmy jeszcze wyznacznik powyższy w podobny sposób, ale według elementów pierwszego wiersza, a otrzymamy:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1$$

Wynik rozwinięcia jest ten sam, co poprzednio. Jeśli przeto chodzi o wyznacznik stopnia 3go, to możemy powiedzieć, że *rozwinięcia według pierwszej kolumny i pierwszego wiersza są równoważne.*

Jest to zresztą prawidło ogólne, które łatwo uzasadnić, powołując się na sposób tworzenia składników. Obrawszy bowiem którykolwiek element pierwszej kolumny, dołączajmy doń po jednym elemencie z każdej innej kolumny, ale tak, żeby dwa którekolwiek z nich, nie należały do tego samego wiersza, dojdziemy wtedy do pewnego elementu pierwszego wiersza; naodwrót, poczynając od tegoż elementu, dojdziemy do elementu, z którego wyszliśmy. Składniki, w ten sposób otrzymane, będą oczywiście te same pod względem liczebnym i znaku.

§ 3.

Własności wyznaczników.

Najcelniejsze własności wyznaczników ujęte są w następujących twierdzeniach:

I. *Wyznacznik nie zmieni swej wartości, gdy jego kolumny staną się wierszami lub naodwrót* (oczywiście w tym samym porządku).

Dowód. Twierdzenie jest słusznem dla wyznacznika stopnia 2go, bo:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

i

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

zatem:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Słuszność twierdzenia łatwo także sprawdzić na wyznacznikach stopnia 3go, 4go i t. d. Przypuśćmy jednak ogólnie, że twierdzenie jest słuszne dla wyznacznika stopnia k i udowodnijmy, że także musi być ważnem dla wyznacznika stopnia $(k + 1)$.

W tym celu uważajmy dwa wyznaczniki:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .. & a_{k1} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .. & a_{k2} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & .. & a_{k3} & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & .. & a_{kk} & b_k \\ c_1 & c_2 & c_3 & .. & c_k & d \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & .. & a_{k1} & c_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & .. & a_{k2} & c_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & .. & a_{k3} & c_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & .. & a_{kk} & c_k \\ b_1 & b_2 & b_3 & .. & b_k & d \end{vmatrix}$$

Są one stopnia $k+1$ i takie, że wiersze jednego są zarazem odpowiedniemi kolumnami drugiego. Rozwińmy wyznacznik Δ według pierwszej kolumny, a Δ' według pierwszego wiersza, a otrzymamy:

$$\Delta = a_{11} A_{11} - a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31} - \cdots + (-1)^{k+1} a_{k1} A_{k1} + (-1)^{k+1} c_1 . C_1$$

$$\Delta' = a_{11} A'_{11} - a_{21} A'_{21} + a_{31} A'_{31} - \cdots + (-1)^{k+1} a_{k1} A'_{k1} + (-1)^{k+1} c_1 . C'_1$$

Stosownie do założenia spełnione być muszą równości:

$$A_{11} = A'_{11} \;;\; A_{21} = A'_{21} \;;\; A_{31} = A'_{31} \;;\; \cdots \; A_{k1} = A'_{k1} \;;\; C_1 = C'_1$$

bo to są wyznaczniki stopnia k, różniące się tylko tem, że kolumny jednego są wierszami drugiego, a więc musi być

$$\Delta' = \Delta$$

Równość ostatnia wyraża, że twierdzenie jest słuszne dla wyznaczników stopnia $(k+1)$, jeśli jest ważnem dla wyznaczników stopnia k, a ponieważ jest ważnem dla wyznacznika stopnia 2go, więc też jest ważnem dla wyznacznika stopnia 3go, 4go i t. d., czyli jest ważnem dla każdego wyznacznika.

Podany powyżej sposób dowodu stanowi t. zw. *metodę indukcyi matematycznej.*

Wytyczne tej metody są takie: 1) Najpierw stwierdza się rozważany fakt bezpośrednio w przypadku najprostszym, 2) zakłada się, że twierdzenie jest słusznem w przypadku k czynników, od których fakt dany zależy, 3) na podstawie takiego założenia dowodzi się, że ono musi być prawdziwem, gdy w rachubę wchodzi $(k+1)$ czynników.

Wniosek: Wszystkie twierdzenia, odnoszące się do kolumn wyznacznika, są także ważne dla jego wierszy.

W dalszym ciągu będziemy mówić tylko o kolumnach, czytelnikowi zaś dajemy sposobność do samodzielnego wygłoszenia twierdzeń i wniosków w odniesieniu do wierszy.

II. *Przestawienie dwu sąsiednich kolumn zmienia znak wyznacznika.*

Dowód. Dla wyznacznika stopnia drugiego mamy:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 b_1 - a_1 b_2 = -(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

a więc:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Załóżmy, że podobnie będzie dla wyznacznika stopnia k i napiszmy dwa wyznaczniki Δ i Δ' stopnia $(k+1)$, przyczem Δ' powstaje z Δ przez przestawienie dwu sąsiednich kolumn np. pierwszej i drugiej, a więc:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & a_{1k} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & a_{2k} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & a_{3k} & b_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdot & \cdot & a_{kk} & b_k \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdot & \cdot & c_k & d \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \Delta' = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & \cdot & \cdot & a_{1k} & b_1 \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & \cdot & \cdot & a_{2k} & b_2 \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & \cdot & \cdot & a_{3k} & b_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k2} & a_{k1} & a_{k3} & \cdot & \cdot & a_{kk} & b_k \\ c_2 & c_1 & c_3 & \cdot & \cdot & c_k & d \end{vmatrix}$$

Rozwińmy Δ i Δ' według pierwszego wiersza:

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta = a_{11} A_{11} - a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} - \cdots + (-1)^{k+1} a_{1k} A_{1k} + (-1)^{k+1} b_1 . B_1 \\ \Delta' = a_{12} A'_{12} - a_{11} A'_{11} + a_{13} A'_{13} - \cdots + (-1)^{k+1} a_{1k} A'_{1k} + (-1)^{k+2} b_1 . B'_1 \end{cases}$$

W minorach: A_{11} i A'_{11} brak elementów pierwszego wiersza i pierwszej kolumny wyznacznika Δ, zresztą są w nich te same kolumny, więc:

$$A'_{11} = A_{11}$$

Okazuje się tak samo, że:

$$A'_{12} = A_{12}.$$

Poczynając zaś od trzeciego składnika sumy, którego przestawienie nie dosięgło, stale aż do końca zachodzą równości:

$$\begin{aligned} A'_{13} &= -A_{13} \\ A'_{14} &= -A_{14} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ A'_{1k} &= -A_{1k} \\ B'_1 &= -B_1 \end{aligned}$$

Rzeczywiście np. minor A'_{13} tem tylko różni się od minora A_{13}, że w nich dwie pierwsze kolumny są przestawione, ale że są wyznacznikami stopnia *k*, więc według założenia bezwzględne ich wartości są równe, znaki zaś przeciwne; o następnych minorach to samo można powtórzyć. A jeśli jeszcze uwzględnimy czynniki, przez które odpowiednie minory są pomnożone, przekonamy się, że prawe strony równości (1) różnią się tylko znakiem, zatem:

$$\Delta' = -\Delta,$$

co mieliśmy udowodnić.

Twierdzenie powyższe jest słuszne, nawet wtedy, gdy przestawiamy dwie niesąsiednie kolumny, bo takie przestawienie można uważać za wynik kolejnych przestawień dwu sąsiednich kolumn, a ilość tych przestawień będzie zawsze nieparzysta, bez względu na to, czy między kolumnami przestawionemi stoi parzysta, czy nieparzysta ilość kolumn pośrednich.

Wnioski: 1) Wyznacznik można rozwijać według elementów którejkolwiek kolumny, bo po przestawieniu zawsze można uważać ją za pierwszą, a pierwszą za drugą. Należy tylko uważać, czy od pierwszej kolumny dzieli ją parzysta, czy nieparzysta ilość kolumn (liczbę 0 należy tu uważać za parzystą); w pierwszym bowiem razie kolejnych przestawień, by uczynić ją kolumną pierwszą, będzie ilość nieparzysta, w drugim parzysta i w pierwszym wypadku rozwijanie według tej kolumny trzeba zacząć znakiem —, w drugim znakiem +.

Przykład:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 A_1 - a_2 A_2 + a_3 A_3 - a_4 A_4 =$$
$$= - b_1 B_1 + b_2 B_2 - b_3 B_3 + b_4 B_4$$
$$= c_1 C_1 - c_2 C_2 - c_3 C_3 - c_4 C_4$$
$$= - d_1 D_1 + d_2 D_2 - d_3 D_3 + d_4 D_4$$

2) *Wyznacznik o dwu kolumnach identycznych* = 0.

Gdy bowiem wyznacznik ma dwie kolumny identyczne, to, przestawiwszy je, nie otrzymamy wcale nowego wyznacznika, ale ten sam, a więc

$$\Delta' = \Delta \tag{2}$$

lecz powinno być także:

$$\Delta' = - \Delta$$

czyli

$$\Delta' + \Delta = 0$$

lub ze względu na (2)

$$2 \Delta = 0$$

skąd

$$\Delta = 0$$

3) Gdy wszystkie elementy jednej kolumny są zerami, wyznacznik = 0. (Dlaczego?)

4) Najdogodniej rozwijać wyznacznik według tej kolumny, w której jest najwięcej elementów zerowych. (Dlaczego?)

5) Znak podwyznacznika elementu a_{ik} jest:

$$(-1)^{i+k}$$

III. *Wyznacznik mnoży się przez liczbę, mnożąc przez nią każdy element jednej, zresztą którejkolwiek, kolumny.* (Dlaczego?).

Np.

$$k\begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka, & b \\ kc, & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & kb \\ c & kd \end{vmatrix}$$

Wniosek: Gdy wszystkie elementy tej samej kolumny mają wspólny czynnik, można go wyłączyć przed nawias. Np.:

$$\begin{vmatrix} 8, & -5 \\ 4, & 3 \end{vmatrix} = 4.\begin{vmatrix} 2, & -5 \\ 1, & 3 \end{vmatrix}$$

IV. *Wyznacznik, w którym wszystkie elementy jednej kolumny są sumą algebraiczną kilku liczb, rozpada się na tyle wyznaczników tego samego stopnia, ile części zawiera każdy element owej kolumny.*

Przykład:

$$\begin{vmatrix} a_1+m_1+n_1, & b_1 \\ a_2+m_2+n_2, & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 & b_1 \\ m_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_1 & b_1 \\ n_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

(Wyjaśnić!)

V. *Wyznacznik nie zmieni swej wartości, gdy do elementów którejkolwiek kolumny (którychkolwiek kolumn) dodamy odpowiednie elementy innej kolumny (innych kolumn), przyczem dodawane elementy tej samej kolumny mogą być pomnożone przez dowolny ten sam czynnik.*

Np.: $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + k, b_1 + l\,c_1 \;, & b_1 & c_1 \\ a_2 + k, b_2 + l\,c_2 \;, & b_2 & c_2 \\ a_3 + k, b_2 + l\,c_3 \;, & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(Uzasadnić na podstawie twierdz. IV i wniosku 2) twierdz. II).

Z twierdzenia tego korzysta się przy obliczaniu wartości wyznaczników szczególnych kształtów, np.:

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 5, & 6, & 7, & 8 \\ 9, & 10, & 11, & 12 \\ 13, & 14, & 15, & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \,, & 1 \,, & 1 \,, & 4 \\ 5 \,, & 1 \,, & 1 \,, & 8 \\ 9 \,, & 1 \,, & 1 \,, & 12 \\ 13 \,, & 1 \,, & 1 \,, & 16 \end{vmatrix} = 0$$

Odjęliśmy kolumnę pierwszą od drugiej, drugą od trzeciej. Skorzystamy z niego także w § 4, przy rozwiązywaniu układu kilku równań stopnia pierwszego o tyluż niewiadomych.

§ 4.

Zastosowanie wyznaczników.

Pojęcie wyznaczników powstało przy rozwiązywaniu układu kilku równań stopnia pierwszego o tyluż niewiadomych; naodwrót wyznaczniki nadają się do rozwiązania takiegoż układu równań i do badania, czy dany układ równań jest układem równań *zależnych*, czy *niezależnych*. Uważajmy dwa równania stopnia pierwszego o dwu niewiadomych:

$$(1) \quad \begin{cases} a_1\, x + b_1\, y = c_1 \\ a_2\, x + b_1\, y = c_2 \end{cases}$$

Równania te są *zależne*, gdy jedno wynika z drugiego przez pomnożenie przez pewną liczbę $k \neq 0$ *), w przeciwnym razie są *niezależne.*

*) $k \neq 0$ czytaj: k odmienną od zera.

Wzajemną zależność równań (1) wyrażają zatem równości:

$$(2) \quad \left| \begin{array}{l} a_1 = k \, . \, a_2 \\ b_1 = k \, . \, b_2 \\ c_1 = k \, . \, c_2 \end{array} \right. ,$$

które w przypadku *niezależności* nie zachodzą, przynajmniej nie zachodzą wszystkie.

Z pojęcia zależności wynika bezpośrednio, że, gdyby któryś ze spółczynników: a_1, b_1, lub wyraz wolny c_1, był zerem, to zerem musi być także odpowiedni spółczynnik lub wyraz wolny drugiego równania i wtedy równości (2) redukują się do dwu lub jednej, którą musi być jedna z dwu pierwszych. Oba bowiem spółczynniki równocześnie nie mogą być zerami, chyba że zerem jest także wyraz wolny, ale wtedy zachodzić musi zawsze tożsamość:

$$0. \, x + 0. \, y = 0$$

t. j. bez względu na to, jakie wartości przyjmiemy na x i y.

Przekonamy się później, że i takie równania wypadnie nam rozważać i, że one mają ważne znaczenie geometryczne.

Podstawiwszy wartości na: a_1, b_1, c_1 do równania pierwszego i podzieliwszy je przez k, dojdziemy do równania drugiego. Równanie pierwsze nie podaje więc innego związku między x i y, lecz ten sam, co drugie i w przypadku zależności mamy nie dwa, lecz jedno równanie, które przy założeniu, że $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, należy traktować jako *nieoznaczone*. Ze spółczynników i wyrazów wolnych równań (1) można utworzyć trzy wyznaczniki stopnia drugiego:

$$(3) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Pierwszy z tych wyznaczników, utworzony ze spółczynników ma bardzo ważne znaczenie w teoryi równań stopnia pierwszego i dlatego nazwano go *wyznacznikiem głównym*. Dwa inne wyznaczniki powstają z wyznacznika głównego przez zastąpienie pierwszej lub drugiej jego kolumny wyrazami wolnymi.

Może się zdarzyć, że

1) albo wszystkie wyznaczniki są $\neq 0$,
2) albo jeden lub dwa z nich są $= 0$, pozostały (e), zaś $\neq 0$,
3) albo wszystkie są $= 0$.

Przypuśćmy najpierw, że

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

i utwórzmy iloczyny:

$$x \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \; ; \; y \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Mamy:

$$x \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 x \,, & b_1 \\ a_2 x \,, & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 x + b_1 y \,, & b_1 \\ a_2 x + b_2 y \,, & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \; ;$$

stąd:

$$(5) \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Podobnie:

$$y \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 y \\ a_1 & b_2 y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 x + b_1 y \\ a_2 & a_2 x + b_1 y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \; ;$$

stąd:

$$(6) \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Wartości na x i y w ten sposób uzyskane są pierwiastkami równań (1), bo:

$$a_1 \cdot \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} + b_1 \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = c_1$$

$$a_2 \cdot \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} + b_2 \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = c_2$$

Rozwiązaliśmy więc równania (1) *metodą wyznaczników*. Okazuje się jednak, że założenie (4) było konieczne, inaczej nie moglibyśmy byli napisać ilorazów (5) i (6).

Gdyby wyznacznik główny był równy 0, a wyznaczniki dodatkowe $\neq 0$, to równości (5) i (6) przyjmują postać:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{0} \; ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{0} \, ,$$

co symbolicznie piszemy:

$$x = \pm \infty \; ; \; y = \pm \infty \, .$$

Mówi się w tym razie, że równania (1) są ze sobą *sprzeczne*.

Nakoniec, gdyby wszystkie wyznaczniki (3) były $= 0$, rozwiązanie równań przedstawia się w kształcie symbolów nieoznaczonych:

$$x = \frac{0}{0} \; ; \; y = \frac{0}{0} \; .$$

Równości jednak:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \; , \quad \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \; , \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

równoważne są równościom:

$$(7) \quad \left| \begin{array}{l} a_1 \, . \, b_2 - a_2 \, b_1 = 0 \\ c_1 \quad b_2 - c_2 \, b_1 = 0 \\ a_1 \quad c_2 - a_2 \, c_1 = 0 \; , \end{array} \right.$$

a te znów równościom:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k,$$

które mówią, że spółczynniki i wyrazy wolne równań (1) są względem siebie proporcyonalne, czyli, że w tym przypadku równania (1) są *zależne.* Oznaczywszy bowiem stałą wartość tych stosunków przez k, otrzymamy z nich równości (2).

Łatwo jednak wykazać, że, jeśli dwie którekolwiek z równości (7) są spełnione, to spełnioną być musi także pozostała.

Istotnie przypuśćmy, że spełnioną jest równość pierwsza i trzecia, i że $a_1 \neq 0$; wtedy i a_2 musi być od zera różne, bo gdyby a_2 było równe 0, to i b_2 musiałoby być równe 0, co jest niemożliwe, bo oba spółczynniki nie mogą równocześnie być zerami. Rozwiązując przeto równanie pierwsze względem b_2, trzecie względem c_2, otrzymamy:

$$b_2 = \frac{a_2}{a_1} \, . \, b_1$$

$$c_2 = \frac{a_2}{a_1} c_1 ,$$

co podstawiwszy do różnicy:

$$c_1 b_2 - c_2 b_1 ,$$

znajdziemy:

$$c_1 . \frac{a_2}{a_1} . b_1 - \frac{a_2}{a_1} . c_1 . b_1 = 0 ,$$

to zaś mieliśmy udowodnić.

Na podstawie powyższych rozważań wypowiedzieć możemy następujące *twierdzenia:*

1) *Warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia jednej i tylko jednej pary pierwiastków oznaczonych równań (1) jest to, aby wyznacznik główny tych równań był od zera odmienny.*

2) *Warunkiem koniecznym i wystarczającym sprzeczności równań (1) jest to, aby wyznacznik główny był = 0, a pozostałe od zera odmienne.*

3) *Warunkiem koniecznym i wystarczającym zależności równań (1) jest to, aby dwa którekolwiek z wyznaczników (3) były zerami. Gdy to zachodzi, to zerem musi być także wyznacznik pozostały.*

4) *Niewiadoma układu kilku równań stopnia pierwszego o tyluż niewiadomych, gdy wyznacznik główny jest różny od zera, równa się ilorazowi, którego mianownikiem jest wyznacznik główny, a licznikiem wyznacznik, powstały z głównego przez zastąpienie kolumny spółczynników tej niewiadomej wyrazami wolnymi.*

Przykład:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3 \end{aligned}$$

$$(8) \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_2 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta} ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta} ; \; z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

gdzie:
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

[Wyprowadzić wzory (8) sposobem wskazanym na str. 32].

W geometryi analitycznej rozważać często trzeba równoczesny układ trzech równań stopnia pierwszego o dwu niewiadomych (zmiennych):

$$(9) \quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 = 0 \end{cases}$$

Ze wszystkich możliwych (siedmiu) zagadnień, w odniesieniu do takiego układu równań, rozwiążemy jedno najważniejsze następujące:

Jakie warunki konieczne i wystarczające muszą być spełnione, aby te równania, parami będąc niezależne, posiadały jedną i tylko jedną parę pierwiastków oznaczonych, (x_1, y_1)?

Z założenia wynika, że ma być:

$$(10) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

i że pierwiastki dwu którychkolwiek z równań (9) np. pierwszego i drugiego:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

muszą czynić zadość równaniu trzeciemu, czyli, że:

$$a_3 \cdot \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} - b_3 \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} + c_3 = 0$$

Ostatnia równość jednak równoważna jest równości:

$$(11) \qquad W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Nierówności (10) i równości (11) oznaczają zatem warunki konieczne.

Są one jednak i wystarczające, bo, gdy są spełnione, to rozwinąwszy wyznacznik (11) według któregokolwiek wiersza np. pierwszego, otrzymamy:

$$a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

czyli:

$$a_1 \cdot \frac{\begin{vmatrix} -c_2 & b_2 \\ -c_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} + b_1 \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_2 & -c_2 \\ a_3 & -c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} + c_1 = 0$$

Ilorazy, figurujące w dwóch pierwszych wyrazach jako drugie czynniki nie są niczem innem, tylko pierwiastkami dwu ostatnich równań (9); pierwiastki te spełniają tedy równanie pierwsze, co chcieliśmy udowodnić.

Warunki zatem konieczne i wystarczające niezależności wszystkich równań (9) i istnienia dla nich jednej tylko pary pierwiastków oznaczonych wyrażają nierówności (10 i równość) (11).

Można jeszcze udowodnić, że w tym razie da się wyznaczyć liczby: $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$, takie, że spełnioną musi być tożsamość t. j. równość:

$$(12) \quad \lambda (a_1 x + b_1 y + c_1) + \mu (a_2 x + b_2 y + c_2) + \nu (a_3 x + b_3 y + c_3) = 0$$

dla wszystkich możliwych wartości na x i y. Lewa strona równości (12) wtedy jest zerem dla wszystkich możliwych wartości na x i y, gdy:

$$(13) \quad \begin{cases} \lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3 = 0 \\ \lambda b_1 + \mu b_2 + \nu b_3 = 0 \\ \lambda c_1 + \mu c_2 + \nu c_3 = 0 \end{cases}$$

Z dwu pierwszych równań da się określić liczby: λ, μ, gdy na ν przyjmiemy dowolną wartość $\neq 0$.

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} -\nu a_3 & a_2 \\ -\nu b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = -\nu \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$\mu = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -\nu a_3 \\ b_1 & -\nu b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = -\nu \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Podstawiwszy wartości na: λ i μ tak uzyskane po lewej stronie trzeciej z równości (13), przekonamy się, że ona równa się 0. Ponieważ ta równość da się uprościć przez ν, przeto widzimy, że określenie liczb: λ, μ, ν jest możliwem, i że jedna z nich może być dowolną, a dwie inne możemy obliczyć na mocy równań (13). Naodwrót oczywiście, gdy zachodzi tożsamość (12), a więc równości (13), możemy być pewni istnienia równań (9) o wspólnej parze pierwiastków. Przekonamy się później, że obecne rozważania czysto rachunkowe mają ważne znaczenie geometryczne.

§ 5.

Ćwiczenia.

1) Napisać wyznacznik stopnia trzeciego, o elementach ogólnych lub szczegółowych i utworzyć wszystkie jego minory rzędu pierwszego.

2) Wyznacznik stopnia trzeciego rozwinąć według elementów pierwszej kolumny i według elementów pierwszego wiersza i porównać wyniki.

3) W poprzednim wyznaczniku przestawić dwie sąsiednie lub niesąsiednie kolumny lub wiersze, rozwinąć każdy z nich i porównać wyniki.

4) Ten sam wyznacznik rozwinąć według elementów któregokolwiek wiersza, lub którejkolwiek kolumny i wyniki porównać z wynikiem zadania 2.

5) Ocenić znak minora, należącego do elementu, stojącego w 4-tym wierszu i w 5-tej kolumnie w wyznaczniku stopnia dowolnego, np. 5-go.

6) Napisać wyznacznik stopnia 3-go o dwu kolumnach lub wierszach identycznych i obliczyć jego wartość przez rozwijanie.

7) Podać wartość wyznacznika stopnia n ($n = 5$), którego element ogólny

$$x_{ik} = (i - 1) \cdot n + k$$

8) Podać wartość wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} x_1, & a x_1 + b, & 1 \\ x_2, & a x_2 + b, & 1 \\ x_3, & a x_3 + b, & 1 \end{vmatrix}$$

przez rozkład na sumę dwu wyznaczników.

9) Rozwiązać metodą wyznaczników układy równań:

$$\text{a)} \quad \left| \begin{aligned} \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2} &= 1 \end{aligned} \right.$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 1 \\ x - z = 3 \end{cases}$$

(Objaśnienie: Wyrazy, których niema, uzupełnić, opatrując je spółczynnikami 0).

10) Sprawdzić, czy równania:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x - 6y = 2 \end{cases}$$

są zależne czy niezależne.

11) Podobnie ocenić, które z równań:

$$\begin{cases} x - 5y = 2 \\ 2x + y = 1 \\ \frac{1}{10}x - \frac{1}{2}y = \frac{1}{5} \end{cases}$$

jest w tym układzie zbyteczne.

12) Wykazać, że

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m, & n \\ r, & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} am + bn, & cm + dn \\ ar + bs, & cr + ds \end{vmatrix}$$

i wysnuć prawidło mnożenia wyznaczników tego samego stopnia.

13) Okazać, że

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & 0, & 1 \\ a, & b, & x \\ c, & d, & y \end{vmatrix},$$

gdzie x i y oznaczają dowolne liczby, np. $x = 0$, $y = 0$.

14)
$$\begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = ?$$

Uwaga: Uwzględnić ćwiczenia 12 i 13.

15) Metodą indukcyi udowodnić twierdzenie Eulera.

16) Podać wartość wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & d \\ 0, & e, & f, & g \\ 0, & 0, & h, & i \\ 0, & 0, & 0, & k \end{vmatrix}$$

17) Udowodnić, że w razie zależności równań:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

zachodzi tożsamość:

$$\lambda (a_1 x + b_1 y + c_1) + \mu (a_2 x + b_2 y + c_2) = 0,$$

gdzie: λ, μ oznaczają liczby stosownie dobrane, różne od zera.

18. Przez rozwiązanie sprawdzić, że równania:

$$x - y - 2 = 0$$
$$3x + y - 2 = 0$$
$$x + 2y + 1 = 0$$

mają wspólną parę pierwiastków i tak określić liczby: λ, μ, ν, aby zachodziła tożsamość:

$$\lambda (x - y - 2) + \mu (3x + y - 2) + \nu (x + 2y + 1) = 0.$$

CZĘŚĆ II.

Geometrya analityczna.

Geometrya analityczna zajmuje się badaniem własności utworów geometrycznych i ich wzajemnych położeń zapomocą rachunku, przy równoczesnem uwzględnieniu metody wykreślnej. Tą drogą badać będziemy utwory geometryczne na płaszczyźnie, czyli zajmować się będziemy *geometryą analityczną płaską*.

§ 1.

Układy odniesienia.

Położenie pewnej miejscowości na ziemi określą w zupełności dokładna jej odległość od równika i od południka, uznanego za pierwszy, czyli jej szerokość geograficzna (północna +, lub południowa —), i jej długość geograficzna (wschodnia +, lub zachodnia —).

Równik i południk którykolwiek, byle uznany za pierwszy, stanowią w tym razie *układ odniesienia*. Podobnie, chcąc określić położenie punktu na płaszczyźnie, należy przyjąć układ odniesienia, zresztą dowolny, byle taki, żeby przy stosownych założeniach można było w sposób niedwuznaczny odszukać ów punkt na płaszczyźnie. Układów takich może być bardzo wiele, poznamy z nich tylko dwa najważniejsze:

1) układ prostolinijowy.

2) układ (jedno) biegunowy.

Układ prostolinijowy (Fig. 1) stanowią dwie proste: l, p przecinające się pod dowolnym kątem. Proste owe nazwiemy *osiami* układu, punkt ich przecięcia się O *początkiem* układu. Początek układu dzieli każdą z osi na 2 ramiona, czyli promienie o kierunkach wprost przeciwnych. Jeśli jeden z tych kierunków uważać będziemy za dodatni, to kierunek wprost przeciwny wypadnie uważać za ujemny. Osie: l, p dzielą płaszczyznę rysunku na 4 części, t. j. pola 4 kątów o wspólnym wierzchołku w początku układu. Z pola jednego kąta można przejść na pole innego, idąc albo w kierunku na lewo, albo na prawo. W pierwszym przypadku idziemy w kierunku *dodatnim*, w drugim zaś w *ujemnym*. Podobnie kąty uważa się za dodatnie, gdy ramię ruchome obraca się na lewo, w przeciwnym razie za ujemne.

Dowolny punkt P może leżeć albo na polu jednego z 4-ch kątów, albo na jednem z ramion którejkolwiek osi. Przypadek pierwszy jest ogólniejszy, dlatego zaczniemy od niego.

Niech proste: l, p (Fig. 1), przecinające się w punkcie O pod kątem α stanowią układ odniesienia. Mając punkt P, kreślimy: PA $\|$ p i PB $\|$ l. Punkty A, B tak otrzymane odmierzają na ramionach osi odcinki:

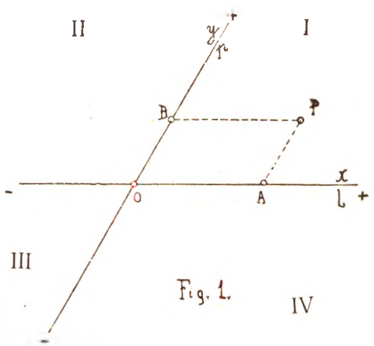

Fig. 1.

$$OA = BP$$

i

$$OB = AP$$

Odcinek: OA nazwiemy *odciętą* punktu P

„ OB = AP „ *rzędną* „ P

Oba zaś odcinki razem *spółrzędnemi* punktu P w danym układzie ukośnym prostoliniowym. Odciętą dowolnego punktu P oznacza się zwykle przez x, a jego rzędną przez y. Dlatego oś odciętych nazywają także osią x-ów, a oś rzędnych osią y-ów. Ponieważ dla tych samych wartości spółrzędnych punkt P może leżeć na polu każdego z 4 kątów, przeto, żeby uniknąć dwuznaczności, należy podać kierunek odciętej i rzędnej, czyli znak + lub —.

Zakładamy tedy, że odcinki na prawem ramieniu osi x-ów będą opatrzone znakiem +, na lewem znakiem —, podobnie odcinki na górnem ramieniu osi $y^{ów}$ znakiem +, na dolnem znakiem —. Oczywistą jest rzeczą, że, gdy przy takich założeniach podany jest układ i punkt, to i jego spółrzędne są znane. Naodwrót, gdy dany jest układ, dowolny odcinek przyjęty za jednostkę długości i spółrzędne punktu, to ów punkt można wykreślić na płaszczyźnie. Punkt M, którego spółrzędne są: $x = a$, $y = b$, oznaczać będziemy tak: $M(a, b)$, przyczem liczbę, oznaczającą odciętą stawia się zawsze na pierwszem miejscu, a liczbę, oznaczającą rzędną, na drugiem.

Mogą zachodzić możliwości:

	odcięta	rzędna
Dla punktu w polu I	$x > 0$	$y > 0$
„ „ na górnem ramieniu osi y	$x = 0$	$y > 0$
„ „ „ polu II	$x < 0$	$y > 0$
„ „ „ lewem ramieniu osi x	$x < 0$	$y = 0$
„ „ „ polu III	$x < 0$	$y < 0$
„ „ „ dolnem ramieniu osi y	$x = 0$	$y < 0$
„ „ „ polu IV	$x > 0$	$y < 0$
„ „ „ prawem ramieniu osi x	$x > 0$	$y = 0$
„ początku układu O	$x = 0$	$y = 0$

Najczęściej używa się układu, w którym osie tworzą kąt prosty. Jest to t. zw. *układ spółrzędnych — prostokątnych,* lub krótko: *układ prostokątny.*

Układ biegunowy

stanowi promień, znany co do położenia, którego początek O (Fig. 2) jest zarazem początkiem układu. Spółrzędnemi punktu P w takim układzie są: odległość punktu od początku układu, liczona zawsze dodatnio i zwana *promieniem wodzącym:* r i kąt φ *(amplituda),* jaki promień wodzący tworzy z dodatnim kierunkiem osi układu. Gdy dany jest układ i punkt P, to znane są też jego spółrzędne: r, φ i naodwrót przy danych: r, φ można punkt na płaszczyźnie odszukać. Gdy dany jest punkt P, oznaczamy to tak: P (r, φ).

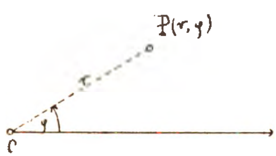

Fig. 2

Zagadnienia:

1) Jak określić położenie lampy, wiszącej w pokoju i jakich układów odniesienia używa się w mechanice niebieskiej?

2) Przyjąwszy dowolny układ prostokątny i dowolny odcinek za jednostkę długości, wyznaczyć na płaszczyźnie punkty: $M_1 (3, -5)$, $M_2 (0, +2)$, $M_3 (-4, -1)$.

3) Znaleźć na płaszczyźnie punkt: $M (r = 5, \varphi = 180^0)$.

4) Znaleźć miejsce geometryczne punktów na płaszczyźnie, dla których odcięta $x =$ constans (ilość stała), lub takich, dla których rzędna $y =$ constans.

5) Zagadnienie 4) rozwiązać przy założeniu, że const. $= 0$.

6) Znaleźć miejsce geometryczne punktów w odniesieniu do układu *biegunowego*, dla których $r =$ constant.

Ze względu na zagadnienie 4) i na okoliczność, że układ odniesienia stanowią dwie proste, układ nazywa się *prostolinijowym*.

Podobnie ze względu na zagadnienie 6), układ biegunowy jest *krzywolinijowym*.

7) *Znaleźć wzajemną odległość* d *punktów:* $M_1 (x_1, y_1)$ i $M_2 (x_2, y_2)$

Na Fig. 3:

$O A_1 = x_1$, $A_1 M_1 = y_1$; $A_2 M_2 = y_2$ $M_1 M_2 = d$, $M_1 R_2 \parallel OX$. Z trójkąta prostokątnego: $M_1 R_2 M_2$ mamy:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

czyli:

$$d = \pm \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2}$$

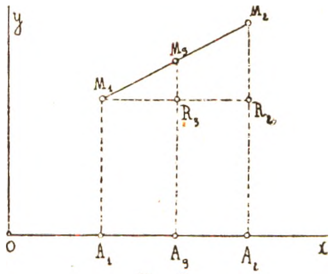

Fig. 3.

Składniki sumy, stojącej pod pierwiastkiem są dodatnie, a ponieważ d liczy się zawsze dodatnio, więc przed pierwiastkiem należy uwzględnić: $+$.

Gdy M_2 leży w początku układu, $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, a

$$d = + \sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2}$$

Uwaga. W układzie biegunowym na odległość d punktów $M_1 (r_1, \varphi_1)$, i $M_2 (r_2, \varphi_2)$, gdy $(\varphi_1 > \varphi_2)$, mamy wzór:

$$d = \pm \sqrt{r_1{}^2 + r_2{}^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad \text{(Wyprowadzić).}$$

8) *Warunek, aby trzy punkty:* $M_1 (x_1 y_1)$, $M_2 (x_2 y_2)$, $M_3 (x_3 y_3)$ *leżały na jednej prostej.*

Z podobieństwa trójkątów: $M_1 R_3 M_3$ i $M_1 R_2 M_3$ (Fig. 3), mamy:

$$\frac{M_3 R_3}{M_2 R_2} = \frac{M_1 R_3}{M_1 R_2} \quad \text{czyli:}$$

$$(1) \qquad \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{lub}$$

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Równoważność równości (1) i (2) łatwo sprawdzić. Równość (2) w kształcie przejrzystym wyraża warunek konieczny, a zarazem wystarczający, aby punkty: M_1, M_2, M_3 leżały na jednej prostej, bo gdy ona jest spełnioną, to spełnioną też będzie proporcya (1), a wyrazy tejże są bokami trójkątów, podobnych o wspólnej podstawie $(y_2 - y_1)$, czyli, że punkty: M_1, M_2, M_3 leżą na jednej prostej. Oczywiście, gdy wyznacznik powyższy jest od zera różny, możemy być pewni, że trzy punkty nie leżą na jednej prostej.

9) *Znaleźć punkt* M (x, y), *który odcinek, łączący punkty:* $M_1 (x_1 y_1)$, $M_2 (x_2 y_2)$, dzieli w stosunku: m : n (Fig. 4).

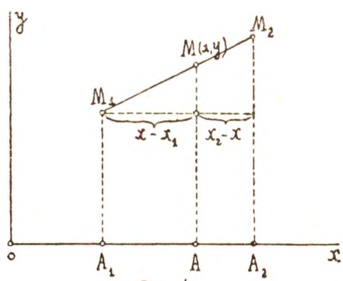

Fig. 4.

Spółrzędne szukanego punktu: M (x, y), wyznaczymy z warunku, że punkty M, M_1, M_2 leżą na jednej prostej. a więc musi być:

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

a zarazem:

$$(x - x_1) : (x_2 - x) = m : n;$$

z ostatniej równości obliczymy:

$$x = \frac{m\,x_2 + n\,x_1}{m + n},$$

a podstawiwszy do pierwszego równania, znajdziemy:

$$y = \frac{m\,y_2 + n\,y_1}{m + n}$$

Dla *punktu, połowiącego* odcinek $M_1 M_2$ jest $m = n$, przeto:

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2}, \quad y = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

10) *Obliczyć powierzchnię trójkąta; dane są jego wierzchołki:* $M_1 (x_1 y_1)$, $M_2 (x_2 y_2)$, $M_3 (x_3 y_3)$. (Fig. 5).

Oznaczywszy pole trójkąta przez p, mamy:

$$p = M_1 A_1 A_3 M_3 + M_3 A_3 A_2 M_2 - M_1 A_1 A_2 M_2$$

$$= \frac{(y_3+y_1)(x_3-x_1)}{2} + \frac{(y_2+y_3)(x_2-x_3)}{2} - \frac{(y_2+y_1)(x_2-x_1)}{2}$$

$$= \frac{x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)}{2}$$

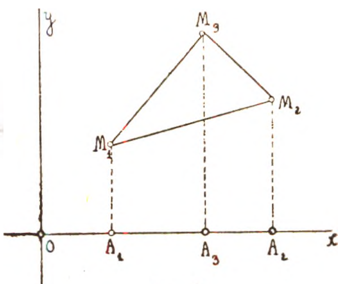

Fig. 5.

lub pod postacią wyznacznika:

$$p = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Uwagi:

a) Obwód trójkąta należy zawsze obiegać na lewo, tj. w kierunku dodatnim, wtedy p wypada zawsze > 0.

b) Gdy: M_1, M_2, M_3 są rzeczywiście wierzchołkami trójkąta, wyznacznik powyższy jest $\neq 0$.

c) Chcąc obliczyć pole wielokąta, należy go przekątniami, wykreślonemi z jednego wierzchołka podzielić na trójkąty.

Zamiana układów.

Położenie układu $X'O'Y'$ względem układu XOY (Fig. 6), określają w zupełności spółrzędne początku $O'(m, n)$ względem układu drugiego i kąt φ, jaki tworzą dodatnie kierunki osi $X^{ów}$ obu układów.

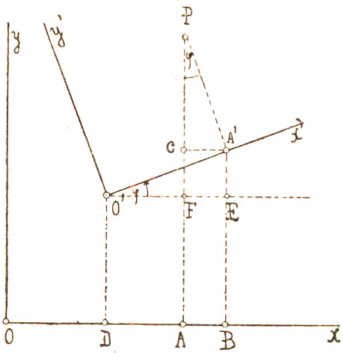

Fig. 6.

Gdy dane są nadto spółrzędne dowolnego punktu P w jednym z tych układów, obliczyć można jego spółrzędne w drugim z nich. Na Fig. 6: $OA = x$, $AP = y$ oznaczają spółrzędne punktu P w układzie XOY, a: $O'A' = x'$, $A'P = y'$ spółrzędne jego w układzie $X'O'Y'$. $OD = m$, $DO' = n$; $A'B \parallel OY$; $A'C \parallel OX$, wreszcie $\sphericalangle CPA' = \varphi$.

Uwzględniwszy konstrukcyę: mamy:

$$OA = OD + DB - AB = OD + O'E - CA'$$

$$AP = AF + FC + CP = DO' + EA' + CP$$

czyli:

$$(3) \quad \begin{cases} x = m + x' \cdot \cos\varphi - y' \cdot \sin\varphi \\ y = n + x' \cdot \sin\varphi + y' \cdot \cos\varphi \end{cases}$$

Wzory te zupełnie ogólne, w tym kształtcie napisane, służą do przejścia z układu X′ O′ Y′ do układu X O Y tzn. gdy dane są początek O′ (m, n) układu X′ O′ Y′ względem układu X O Y, kąt φ, jaki tworzą dodatnie kierunki osi X^ow^ obu układów i spółrzędne punktu P (x′, y′) w układzie X′ O′ Y′, możemy z nich bezpośrednio obliczyć spółrzędne (x, y) punktu P w układzie X O Y. Ale i na odwrót, przy danych: x, y, m, n, φ można obliczyć: x′, y′, bo wyznacznik główny tych równań:

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi, & -\sin\varphi \\ \sin\varphi, & \cos\varphi \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

W szczególnych przypadkach wzory (3) przyjmują postać prostszą.

Gdy O′ leży w punkcie O, wtedy $m = 0$, $n = 0$, gdy zaś $m \neq 0$, $n \neq 0$, a $\varphi = 0$, mamy:

$$x = m + x' \quad ; \quad x' = x - m$$

$$y = n + y' \quad ; \quad y' = y - n$$

Przypadek ostatni uwidoczniono na osobnej Fig. 7.

Przejście z układu prostokątnego do układu biegunowego, gdy biegun O jest zarazem początkiem układu prostokątnego, a oś biegunowa leży na osi x, wyrażają wzory:

$$x = r \cdot \cos\varphi$$

$$y = r \cdot \sin\varphi \; ,$$

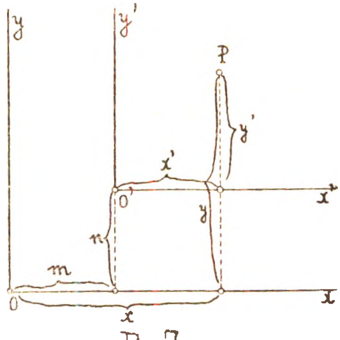

Fig. 7.

gdzie: x, y oznaczają spółrzędne punktu P w układzie prostokątnym, r, φ spółrzędne jego w układzie biegunowym (Fig. 8).

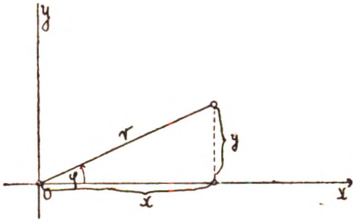

Fig. 8.

Na odwrót:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

Ćwiczenia.

1) Udowodnić, że punkty: M_1 (4, 6), M_2 (12, 0), M_3 (8, 3) leżą na jednej prostej.

2) Punkty: M_1 (3, 4), M_2 (6, 0), M_3 (6, 8) są wierzchołkami trójkąta (sprawdzić to rachunkiem); *a)* wykreślić ów trójkąt; *b)* obliczyć długości jego boków, obwód i powierzchnię (tę ostatnią zapomocą spółrzędnych wierzchołków i długości boków i wyniki porównać); *c*) obliczyć spółrzędne środków boków; *d)* znaleźć punkt M (x, y), leżący w równej odległości od wierzchołków; *e*) obliczyć promień R koła, opisanego na trójkącie.

3) Obliczyć spółrzędne punktów ćwiczenia 2 w nowym układzie X′ O′ Y′, gdy dane są: O′ (3, 4), $\varphi = 45$, następnie w tymże układzie rozwiązać zadanie *b)—e)* i porównać wyniki z poprzednimi.

4) W układzie biegunowym obliczyć długość boków i powierzchnię trójkąta, którego wierzchołkami są punkty:
M_1 ($r_1 = 5$, $\varphi_1 = 30^0$), M_2 ($r_2 = 8$, $\varphi_2 = 60^0$), M_3 ($r_3 = 4$, $\varphi_3 = 90^0$).

5) Rozwiązać ćwiczenie 4) w układzie prostokątnym i wyniki porównać z poprzednimi.

W n i o s e k. Zamiana układu jednego na inny nie zmienia własności utworów geometrycznych, ani ich wzajemnych położeń.

Wiadomości szkolne.

a) Zmiany w gronie nauczycielskim:

Zmian żadnych nie było.

b) Grono nauczycielskie

z końcem roku szkolnego 1911/12.

Dyrektor:

Ralski Jan, dr. fil., VI rangi, delegat c. k. Rady szkolnej kraj. do Wydziału szkoły przemysłowej uzupełniającej, uczył matematyki w kl. VI; tygodniowo godz. 4.

Nauczyciele:

1. **Drozd Hieronim**, profesor, przydzielony do służby w c. k. szkole realnej w Tarnowie.
2. **Fedorowicz Stanisław**, ksiądz, egz. zastępca nauczyciela, zawiadowca biblioteki ruskiej dla uczniów, uczył religii gr.-kat. w kl. I—VII; tygodniowo godzin 10.
3. **Filimowski Stanisław**, profesor, zawiadowca biblioteki niemieckiej dla uczniów, uczył języka niemieckiego w kl. I, III, VI, VII; tygodniowo godzin 17.
4. **Gartner Franciszek**, profesor VIII r., zawiadowca gabinetu historyi naturalnej, uczył matematyki w kl. II, historyi naturalnej w kl. I, II, V—VII; tygodniowo godzin 13.
5. **Gonet Michał**, profesor VIII r., gospodarz kl. VI., zawiadowca zbioru geograficzno-historycznego, biblioteki nauczycielskiej i podręczników szkolnych dla ubogich uczniów, uczył historyi w kl. IV—VII, geografii w kl. IV—VI; tyg. godz. 15.
6. **Kaniak Józef**, egz. zastępca nauczyciela, zawiadowca gabinetu rysunków odręcznych, w I. półroczu na urlopie (rozp.

c. k. R. S. K. z 15. maja 1911 l. 7544/IV), w II. półroczu uczył rysunków odręcznych kl. I — VII; tyg. godzin 22.
7. **Kaniowski Tadeusz**, profesor, gospodarz kl. II, zawiadowca biblioteki polskiej dla uczniów, uczył języka polskiego w kl. II, VI, VII, historyi w kl. II; tygodniowo godzin 13.
8. **Komęza Stanisław**, zastępca nauczyciela, gospodarz klasy I, uczył języka polskiego w kl. I, III, IV, V, historyi w kl. I, III; tygodniowo godzin 17.
9. **Konieczny Władysław**, rzeczywisty nauczyciel, gospodarz kl. IV, uczył języka niemieckiego w kl. II, IV, V, tyg. g. 14.
10. **Litwin Walenty**, ksiądz, profesor VIII r., uczył religii rz.-kat. w kl. I—VII; tygodniowo godz. 14.
11. **Łucki Aleksander**, dr. fil., rzeczywisty nauczyciel, przydzielony do służby w c. k. drugiej szkole realnej we Lwowie (rozp. c. k. R. S. K. z 1. września 1911 l. 13261/IV).
12. **Ostrowski Wiktor**, profesor, gospodarz kl. V, zawiadowca biblioteki francuskiej dla uczniów, uczył języka francuskiego w kl. III — VII; tygodniowo godzin 16.
13. **Otremba Gustaw**, profesor, uczył w I. półroczu rysunków odręcznych w kl. I.—VIII; tygodniowo godzin 22. W II. półroczu na urlopie rozp. c. k. R. S. K. z 13. kwietnia 1912 r. l. 5952/IV).
14. **Rozmuski Tadeusz**, profesor VIII r. zawiadowca gabinetu chemicznego, uczył geografii w kl. I — III, chemii w kl. IV—VI, kierował pracownią chemiczną uczniów kl. V—VII; tygodniowo godzin 17.
15. **Steczko Józef**, profesor, gospodarz kl. VII, zawiadowca gabinetu fizycznego, uczył matematyki w kl. I, VII, fizyki w kl. VI, VII; tygodniowo godzin 16.
16. **Sykutowski Franciszek**, egz. z gimnastyki zastępca nauczyciela, uczył matematyki w kl. IV, fizyki w kl. III, IV, gimnastyki w kl. I—VII; tygodniowo godzin 23.
17. **Tenczarowski Tadeusz**, egz. zastępca nauczyciela, gospodarz klasy III, zawiadowca gabinetu geometrycznego, uczył matematyki w kl. III, V, geometryi i rysunków geometrycznych w kl. II—VII, kaligrafii w kl. I; tygodn. godz. 23.

c) Nauczyciel pomocniczy:

Seidenwerg Izydor, uczył religii mojżeszowej w kl. I — VII; tygodniowo godzin 7.

d) Nauczyciele przedmiotów nadobowiązkowych i względnie obowiązkowych:

Ks. Fedorowicz Stanisław, uczył języka ruskiego jako względnie obowiązkowego w dwóch oddziałach; tygodniowo g. 4.

II.

Plan naukowy.

W roku szkolnym 1911/12 obowiązywał plan nauki dla galicyjskich szkół realnych wprowadzony rozporządzeniem c. k. Rady szkolnej krajowej z dnia 20. 1909 l. 38271 za zezwoleniem c. k. Ministerstwa Wyznań i Oświaty z dnia 6. lipca 1909 l. 24339.

III.

Tematy do wypracowań piśmiennych dla klas wyższych.

Tematy polskie.

Klasa V.

1. Wspomnienia z wakacyi. (dom.).
2. Wizerunek szlachcica ziemianina na podstawie „Żywota człowieka poczciwego“ Reja. (szkol.).
3. Znaczenie Jana Kochanowskiego w literaturze XVI. wieku; (szkol.).
4. Ogień na usługach cywilizacyi. (dom.).
5. Znamiona upadku czasów saskich (szkol.).
6. Ostatnia moja lektura domowa. (dom.).
7. Pierwiastek rodzimy w sielankach Szymonowicza (szkol.).
8. Głaz u źródła żwirem przy ujściu rzeki (dom.).
9. Wpływ francuski w literaturze czasów Stanisławowskich (na podstawie nauki szkolnej). (szkol.).
10. Poglądy Naruszewicza na pisanie historyi. (szkol.).

Klasa VI.

1. Rozwinąć myśl czterowiersza Brodzińskiego:

„Chociaż nie skończysz, ciągle rób,
Ciebie nie dzieło, porwie grób,
Choć tu dla czynów krótki czas,
Czas wszystko skończy, bo ma czas". (dom.).

2. Stanisław August Poniatowski jako opiekun literatury. (szk.).
3. „Żale Sarmaty" Karpińskiego a „Głos umarłych" Naruszewicza. (Zestawienie). (dom.).
4. Charakterystyka stronnictwa starorepublikańskiego. (Na podstawie „Powrotu posła" Niemcewicza). (szkol.).
5. Odkrycia geograficzne w XV. i XVI. w. i wpływ ich na rozwój stosunków społecznych. (szkol.).
6. Do wyboru:
   a) Niebieska opieka tajnie nagradza uczynki człowieka. Uzasadnić prawdziwość tego zdania na osnowie „Wiesława" Brodzińskiego.
   b) Iliada i Odyssea zwierciadłem charakteru i kultury Greków w wieku bohaterskim. (Na podstawie lektury szkoln.).
   c) Znaczenie skóry dla organizmu ludzkiego, (dom.).
7. Charakterystyka „Puław" wedle Kajetana Koźmiana. (szk.).
8. Do wyboru:
   a) Stan wewnętrzny Francyi w przededniu wielkiej rewolucyi.
   b) Świat fantastyczny, przedstawiony ze strony poważnej i żartobliwej w balladach Mickiewicza.
   c) Ziarnko do ziarnka, a będzie miarka. (w formie powiastki). (dom.).
9. Pogrzeb u pogańskich Litwinów. (Na podstawie „Grażyny" Mickiewicza). (szkol.)
10. Marya (Malczewskiego) a Aldona (Mickiewicza) — paralela losów i charakterów. (szkol.).

Klasa VII.

1. Do wyboru:
   a) Rozwinąć myśl ks. Adama Krasińskiego:
      „Święta ma być nam pamięć naszych wielkich ludzi,
      Ona do życia wszystko, co szlachetne, budzi".
   b) Wpływ wojen perskich na rozbudzenie poczucia narodow.
   c) Jakie myśli i uczucia budzą się w nas na widok odlatujących ptaków? (dom.)
2. Znaczenie Joachima Lelewela w rozwoju historyografii polskiej. (szk.).

3. Do wyboru:
   a) Jak można pogodzić ze sobą przysłowia: „Na pochyłę drzewo kozy skaczą“ i „Pokora przebija niebiosa“ —
   b) Usiłowania naprawy wewnętrznych stosunków dawnej Rzeczypospolitej polskiej.
   c) Elektryczność na usługach życia codziennego. (dom.)
4. Nasza zamierzchła przeszłość w świetle Balladyny i Lilli Wenedy. (szkol.).
5. Charakterystyka Antyfony Sofoklesowej. (szkol.).
6. Do wyboru:
   a) Znaczenie Masynissy w „Irydyonie“ a Halbana w „Konradzie Wallenrodzie“. —
   b) Wpływ igrzysk narodowych na Greków. —
   c) Wyjaśnić i przykładami uzasadnić przysłowie: „Nie od razu Kraków zbudowany“. (dom.)
7. Trybunał lubelski wedle Henryka Rzewuskiego — (szkol).
8. Do wyboru:
   a) W każdej chwili żywota,
   Czy przy pługu, czy w koronie,
   Niechaj ci w umyśle stoją:
   Ojczyzna, nauka i cnota —
   (w formie mowy pożegnalnej do kolegów, opuszczających ławy szkolne).
   b) Wzrost potęgi Jagiellonów w XVI. stuleciu.
   c) Wpływ klimatu na człowieka. (dom).
9. Lucyan Siemieński o sporze między klasykami a romantykami. (Na podstawie lektury szkolnej). (szkol.).

Tematy niemieckie

Klasa V.

1. Eine Übersetzung aus dem Polnischen. szkolne.
2. Der Triumph der Freundschaft. Auf Grund der Ballade von Schiller „Die Bürgschaft“. dom.
3. Die Erziehung bei den Griechen. (Im Anschluss an die Schullektüre) szkolne.
4. Die Verkehrsmittel früher und jetzt. dom.
5. Wie schildert der Taucher den Meeresgrund. (Nach dem Gedichte von Schiller) szkolne.

6. Rudolfs von Habsburg frommer Sinn. (Nach dem Gedichte von Schiller). dom.
7. Die Schuld des Tantalos und deren Sühne. (Auf Grund der Schullektüre). szkolne.
8. Siegfrieds Tod. (Auf Grund der Schullektüre) dom.
9. Gellert als Mensch. (Eine Episode aus seinem Leben). szk.
10. Inhaltsangabe des Gedichtes von Schüller „Der Handschuh". dom.
11. König Bauer. (Auf Grund der Schullektüre). szkolne.
12. Wie stellt uns die Sage die Befreiung des Orest von den Erinyen dar? (Nach der Schullektüre). dom.
13. Das römische Haus. (Nach der Schullektüre). szk.
14. Der Dachs auf Lichtmess. (Kurzer Inhalt). dom.

Klasa VI.

1. Charakteristik des Fuchses Reinecke. (Nach Goethes „Reinecke Fuchs".) szkolne.
2. Gang der Handlung im ersten Aufzuge von Goethes „Egmont" dom.
3. Inhaltsangabe des Gedichtes von Schiller „Der Kampf mit dem Drachen". szkolne.
4. Hüons Abenteur in Bagdad. Nach Wielands „Oberon". dom.
5. Die Sage von Parcival. (Nach der Schullektüre) szk.
6. Die Faustsage. (Nach der Schüllektüre). szkolne.
7. Gang der Handlung im fünften Aufzuge von Goethes „Egmont". dom.
8. Inhaltsangabe der Ballade von L. Uhland „Das Glück von Edenhall". szkolne.
9. Charakteristik des Majors Tellheim in Lessings Lustspiel „Minna von Barnhelm". dom.
10. Die Sage von Lohengrin. (Nach der Schullektüre). szkolne.

Klasa VII.

1. Inhaltsangabe und Grundgedanke des Gedichtes vom Goethe „Der Zauberlehrling". szkolne.
2. Handlung im ersten Aufzuge von Schillers „Maria Stuart". dom.
3. Inhaltsangabe der Ballade von Bürger „Lenore". szkolne.
4. Die Parabel von den drei Ringen in Lessings Drama Nathan der Weise". dom.

5. Inhaltsangabe und Grundgedanke des Gedichtes von Schiller „Pegasus im Joche“. szkolne.
6. Goethes Balladen „Der Erlkönig“ und „Der Fischer“. (Die Vergleich). szkolne.
7. Gang der Handlung im fünften Aufzuge von Schillers „Maria Stuart“. dom.
8. Eine Übersetzung aus dem Polnischen. szkolne.
9. Inhaltsangabe des Gedichtes von Heine „Belsazar“. dom.

Tematy francuskie.

Klasa V.

1. Traduction de polonais en français. szk.
2. Sujet de la fable: „Le renard et la cigogne“. dom.
3. Les travaux d' un cultivateur (d' après le tableau). szk.
4. Exemples de l' emploi des verbes irréguliers. dom.
5. Figures planes. (Exercice de géométrie). szk.
6. Composition d' une lettre. dom.
7. Description de la gare. szk.
8. Les jeux et les divertissements de la jeunesse. dom.
9. Description d' un tableau mural. szk.
10. La société de lecture dans notre école. dom.
11. Une lettre. szk.
12. L' électricité dans la vie moderne. dom.
13. Le thermomètre. szk.
14. Les commandements de l' hygiène. dom.
15. Ce que je ferai pendant les vacances. szk.

Klasa VI.

1. Traduction de polonais en français. szk.
2. La poésie française au moyen âge. dom.
3. Analyse grammaticale d' un texte français. szk.
4. Une promenade à travers la ville. dom.
5. Composition d' une lettre. szk.
6. Origine de l' Académie Française. dom.
7. Les grands écrivains du 17 siècle. szk.
8. Les soins du corps. dom.
9. Les exercices de gymnastique. szk.
10. Les traits caractéristiques de la poésie classique. dom.

11. L' influence de l' „Art poétique“ de Boileau sur la littérature polonaise. szk.
12. Sujet de la comédie de Molière: „L' avare“. dom.
13. Une lettre. szk.
14. L' anniversaire de Krasiński à Jaroslaw. dom.
15. Le scouting à Jaroslaw. szk.

Klasa VII.

1. Lettre à un ami sur les occupations de la dernière année scolaire. szk.
2. La littérature classique et romantique. dom.
3. Traduction d' un texte polonais. szk.
4. Le caractère de Napoléon I. (d' après la lecture). dom.
5. Organisation administrative de la France. szk.
6. Le roman français dans la I moitié du 19. s. dom.
7. Mickiewicz en France. szk.
8. L' hygiène comme le devoir national. dom.
9. De la politesse. szk.
10. Comment faut il lire un ouvrage littéraire. dom.
11. Les mérites des Parnassiens dans la poésie moderne. szk.
12. L' école naturaliste. dom.
13. Une lettre. szk.

IV.

Egzamin dojrzałości.

W terminie zimowym.

Dnia 12. lutego odbył się **ustny egzamin dojrzałości** pod przewodnictwem dyrektora zakładu Dra Jana Ralskiego.

Abituryent Knispel Mojżesz urodzony dnia 21. lipca 1893 w Jarosławiu w Galicyi, religii mojż., który uczęszczał do szkoły realnej 8 lat, uznany został za dojrzałego; ma zamiar udać się na wydział filozoficzny.

W terminie letnim.

Piśmienny egzamin dojrzałości odbył się w dniach 20. 21, 24 i 25 maja.

Tematy do piśmiennego egzaminu dojrzałości były następujące:

Z języka polskiego:

1. Charakterystyka „szlachty okolicznej“ w powieści Orzeszkowej „Nad Niemnem“.
2. Znaczenie lasów.
3. Innowierstwo w Polsce w XVI. wieku i jego skutki.

Z języka niemieckiego:

Przetłómaczyć na język niemiecki ustęp CVI. z „Czytań polskich dla klasy I. szkół średnich“ na str. 187 i 188 pod tytułem: „Artur Grottger i Cesarz“.

Z języka francuskiego:

Przetłómaczyć na język polski część ustępu 81. z podręcznika szkolnego, „La France II“. na str. 217 i 218 pod tytułem „Le Louvre“.

Z geometryi wykreślnej:

1. Przed punkt „A“ leżący na danej płaszczyźnie „P“, poprowadzić prostą przecinającą ślady płaszcz. „P“ pod równymi kątami.
2. Na środku płyty walcowej, stojącej na płaszczyźnie poziomej rzutów, spoczywa kula o promieniu równym $^2/_3$ promienia płyty. Znaleźć cienie własne i rzucone na płaszczyzny rzutów i cień rzucony kuli na płytę.
3. Przez 4 punkty „A“, „B“, „C“ i „D“, z których trzy tworzą trójkąt równoległy do płaszcz. pionowej rzutów, przesunąć kulę.

Egzamin ustny odbył się w dniach 11. i 12. czerwca pod przewodnictwem p. Karola Trochanowskiego, dyrektora c. k. szkoły realnej w Tarnowie, jako delegata c. k. Rady szk. kraj.

Do egzaminu dojrzałości zgłosiło się 13 uczniów publicznych. Z tych otrzymało:

świadectwo dojrzałości z odznaczeniem	2
świadectwo dojrzałości . . .	10
reprobowano na pół roku . . .	1
Razem .	13

Wykaz abituryentów, którzy złożyli egzamin dojrzałości w terminie letnim r. szk. 1911 12.

L. p	Imię i nazwisko	Rok urodzenia	Miejsce urodzenia	Religia	uczęszczał do szkoły realnej lat	Uznany za:	Przyszły zawód
1	Baczyński Tadeusz	1893	Radenice w Galicyi	rzym. kat.	7	dojrzałego	Akad. szt. pięk.
2	Bałaban Alfred	1895	Wiedeń w Austryi d.	mojżesz.	7	dojrz. z odzn.	Technika
3	Galotta Józef	1893	Jarosław w Galicyi	„	7	„	„
4	Klang Nattan	1894	„ „	„	8	dojrzałego	Prawo
5	Menkes Teodor	1892	„ „	„	9	„	Weterynarya
6	Mühlbauer Józef	„	„ „	„	8	„	Medycyna
7	Podhorecki Michał	„	Uhnów „	greck. kat.	6	„	Technika
8	Ringel Maurycy	1893	Jarosław „	mojżesz.	8	„	„
9	Starek Jan	„	Hruszatyce „	rzym. kat.	8	„	„
10	Szkolnicki Aleksander	1890	Sieniawa „	„	9	„	Akademia leśn.
11	Wiszniewski Edward	„	Buczacz „	„	11	„	„
12	Wrażej Eugeniusz	1892	Lwów „	„	10	„	Technika

V.

Zbiory naukowe.

1. Biblioteka nauczycielska.

Zakupiono:

Bolza. Vorlesungen über Variationsrechnung. — Junker. Höhere Analysis. — Chrzanowski. Historya literatury niepodległej Polski. — Schaeffer. 1400 mathematische Abiturienten-Aufgaben. — Schäffer. Natur — Paradoxe. — Neuburger. Ergötzliches Experimentierbuch — Cichocki. Słownik polsko-niemiecki. — 16 obrazów ściennych Delmasa. — Halma-Schilling. Die Mittelschulen Österreichs. — Szematyzm Galicyi 1911. Jahrbuch des höheren Unterrichtswesens in Österreich 1911. Beisswanger. Physikalisches Experimentierbuch. — Gajdeczka, Lernstoff aus der Physik und Chemie. — Weiler. Elektricität und Magnetismus. — Franke. Jan Brożek.

Prenumerowano czasopisma.

Biblioteka warszawska. — Kosmos. — Kwartalnik historyczny. Miesięcznik katechetyczny. Pamiętnik literacki. Ruch. — Wszechświat. — Das literarische Echo. — Geographische Zeitschrift. — Vierteljahrschrift für körperliche Erziehung. — Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht. — Verordnungsblatt für d. Dienstbereich des k. k. Ministeriums f. K. u. U.

W darze otrzymano wydawnictwa c. k. Akademii Umiejętności w Krakowie, c. k. Rady szkolnej krajowej i Wydziału krajowego.

Biblioteka liczy 1149 pozycyi.

2. Biblioteka uczniów.

Zakupiono:

May, Powieśni podróżnicze I—VI. — Verne, Pustynia lodowa. Piętnastoletni kapitan. — Sieroszewski. Bajki. — Dumas. Hoffmann. Historya dziadka do orzechów. — Nodier. Skarb bobowy. — Stahl. Tomcio Paluch. — Sienkiewicz. Krzyżacy. — Chmielowski. Twoje ziemie. — Boerner. Lehrbuch der französischen Sprache. — Pechnik. Psychologia. — Rossman-Schmidt. Lehrbuch der französischen Sprache. — Methode Alvincy deutsch-französisch. — Kierst - Callier. Słowniczek polsko-angielski. — Arct, Słowniczek podręczny wyrazów obcych. — Passendorfer, Słownik ortograficzny.

Otrzymano w darze: Misye katolickie 1911.

Stan biblioteki wynosi:

książek polskich pozycyi	. .	579
„ niemieckich „	. .	367
„ ruskich „	. .	38
„ francuskich „	. .	13
podręczników szkolnych	. .	147

3. Gabinet fizykalny.

Zakupiono:

1. Teodolit na statywie. — Statywy do przyrządu do okazania interferencyi światła. — Statyw pod rurki Geislera.

Stan gabinetu:

I.	Mechanika ciał stałych pozycyi	. . . .	32
II.	„ cieczy „	. . . .	22
III.	„ gazów „	. . . .	22
IV.	Nauka o głosie „	. . . .	21
V.	„ „ świetle „	. . . .	66
VI.	„ „ cieple „	. . . .	30
VII.	„ „ elektryczności „	. . . .	134
VIII.	Astronomia „	. . . .	6
IX.	Narzędzia i przybory „	. . . .	37

4. Gabinet historyi naturalnej.

Zakupiono:

Dwa mikroskopy. — Mikrotom ręczny i nóż. — Dwie lupy do preparowania. — Soczewka składana. — Strzykawka injekcyjna.

Stan gabinetu.

a) z działu zoologii i anatomii:

Zwierząt wypchanych okazów 332

w tem dar Wielm. Pana Edwarda Micewskiego z Tuczemp w ilości 308 okazów.

Preparatów suchych	18
Preparatów w formalinie i spirytusie	77

w tem zbiór ryb krajowych zebranych staraniem zawiadowcy gabinetu.

Modeli zoologicznych	12
Szkieletów	5
Tablic ściennych	161
Pudełka z owadami	4

b) z działu botaniki:

Modeli botanicznych	33
Tablic ściennych	167
Zielnik z 300 roślin	1

c) z działu mineralogii i geologii:

Zbiór 240 minerałów	1
„ 150 skał	1
„ 100 skamielin	1
Modeli i przyrządów pomocn.	121
Tablic ściennych	18
Mikroskopy 3, lupy do preparowania 2	5
Mikroton ręczny	1
Preparatów mikroskopowych	93
Siekiera kamienna	1

5. Gabinet chemii.

Stan gabinetu:

Przyrządów	pozycyi	27
Utensyliów drewnianych	„	12
„ metalowych	„	36
„ porcelanowych	„	8
„ szklanych	„	33
„ innych (rogow. asbest. i t. p.)	„	7

6. Gabinet geometryi.

Zakupiono:

Pięć umiarowych wielościanów z drutu mosiężnego, wraz z wysokościami. — Model dwumianu do sześcianu z drzewa. — Dwa ostrosłupy i jeden graniastosłup z drutu mosiężnego. — Model kuli z kątem sferycznym z drutu mosiężnego. — Trzy modele kątów bryłowych z blachy — Dwa blaszane lawoary. — Trzy cyrkle drewniane. —

Stan gabinetu:

Modeli do nauki planimetryi	12
„ „ „ stereometryi	85
„ „ „ o punkcie, prostej i płaszczyźnie	22
„ „ „ „ przekrojach brył	6
„ „ „ „ przenikaniu brył	19
„ „ „ „ cieniach	14
Przyrząd projekcyjny z żelaza na podstawie	1
Dzieł z wzorami tomów	7
Przyborów do rysowania	45

7. Gabinet rysunków odręcznych.

Zakupiono:

Weber, Die Technik des Tafelzeichnens z 40 tablicami Lipsk i Berlin 1909.

Stan gabinetu:

Modeli do nauki perspektywy	4
„ drewnianych	40
„ gipsowych i glinianych	242
„ szklanych	21
„ metalowych	34
Rozmaitych przedmiotów z natury	102
Dzieł z modelami drewnianymi	1

8. Zbiór geograficzno-historyczny.

Stan zbioru:

Map zwykłych	65
„ reliefowych	2
Globusów	2
Obrazów geograficznych, etnograficznych	93
„ historycznych	150
Atlasy	2
Model terminologiczny	1
Obrazy Hirta do geografii i etnografii, tomów	5
Obrazów do stereoskopu	22

9. Zbiór środków do nauki śpiewu.

Stan zbioru:

Fisharmonia	1
Śpiewników	16
Mszy kościelnych	8

VI.

Kronika zakładu.

Rok szkolny rozpoczął się dnia 3. września uroczystem nabożeństwem.

Od 1 do 13 września profesor Franciszek Gartner brał udział w kursie uzupełniającym dla nauczycieli szkół średnich w c. k. uniwersytecie w Gracu w myśl rozp. c. k. Minist. W. i O. z 16 lutego 1911 l. 5220 rozp. c. k. R. S. K, z 6 marca 1911 l. 3677/IV.

Dnia 9 września i 18 listopada Zakład brał udział w uroczystem nabożeństwie za spokój duszy ś. p. Cesarzowej Elżbiety a 28 czerwca zą spokój duszy ś. p. Cesarza Ferdynanda I.

Dnia 4 października obchodził Zakład Imieniny Najjaśniejszego Pana uroczystem nabożeństwem,

Dnia 22 października obchodził Zakład uroczystość Patrona szkolnego św. Jana Kantego.

Dnia 27 kwietnia Zakład brał udział w uroczystości ku uczczeniu setnej rocznicy urodzin poety Zygmunta Krasińskiego, rozpoczętej uroczystem nabożeństwem, zakończonej uroczystym porankiem w sali „Sokoła“

Dnia 23 maja hospitował naukę religii rz. kat. komisarz biskupi Przewielebny ks. Feliks Świerzyński Dziekan i Proboszcz w Grodzisku.

W ciągu roku uczniowie wyznania katolickiego przystępowali trzykrotnie do spowiedzi i komunii św.; przed spowiedzią wielkanocną odprawiali rekolekcye wspólne pod przewodnictwem x. x. katechetów obu obrządków.

Dnia 31 stycznia zakończono pierwsze półrocze a dnia 29 czerwca rok szkolny uroczystem nabożeństwem.

VII.

Ważniejsze rozporządzenia władz szkolnych.

C. k. Rada szkolna krajowa rozp. z dnia 3 września 1911 l. 15376/IV wzywa Dyrekcyę i nauczycieli do czuwania, by młodzież ściśle przestrzegała przepisów szkolnych.

C. k. Rada szk. kraj. rozp. z dnia 22. marca 1912 l. 4847/IV normuje postępowanie przy zawiązywaniu t. z. „scoutingu“ w zakładzie.

C. k. Rada szk. kraj. rozp. z d. 10 maja 1912 l. 9102/IV zarządza, aby na przyszłość uczniów, którzy wykażą się ujemnem świadectwem odejścia po 15 maja nie przypuszczono po wakacyach do egzaminu wstępnego do klasy wyższej.

Prezydyum c. k. Rady szk. kraj. rozp. z 11 czerwca 1912 l. 288/pr. R. S. K. podaje do wiadomości reskrypt c. k. Ministerstwa W. i O. mający na celu zapobieżenie strajkom młodzieży szkolnej.

VIII.

Ćwiczenia fizyczne młodzieży.

Nauczyciel gimnastyki w czasie pogodnym w godzinach przeznaczonych na naukę gimnastyki urządzał z odpowiednią klasą zabawy i gry w ogrodzie „Sokoła“. Wskutek tego kl. od I. do kl. IV. miały po 10, kl. od V — VII po 9 zabaw. Wszyscy uczniowie uczęszczający na gimnastykę brali wtenczas obowiązkowo udział w zabawie, mianowicie z kl. I. 32, II. 36, III. 33, IV. 24. V. 22, VI. 18, VII. 15 uczniów. Ogółem było 67 zabaw.

Przerwy na pauzach spędzali uczniowie na podwórzu szkolnem na zabawach wolnych lub z przyrządami pod kierownictwem profesora Gartnera według programu przezeń urządzonego. Pod przewodnictwem tegoż profesora zrobili w listopadzie uczniowie z kl. VI. w liczbie 20 wycieczkę do cukrowni w Przeworsku; nadto uczniowie klasy pierwszej i drugiej w liczbie 50 zrobili w maju 3 wycieczki przyrodnicze do Kidałowic i Pawłosiowa a uczniowie kl. V. w liczbie 15 w maju i czerwcu 5 wycieczek przyrodniczych na pole ćwiczeń wojskowych, wądoły i stare Sanowisko. Na wycieczkach przyrodniczych zaznajamiali się uczniowie z oznaczaniem roślin zapomocą „Przewodnika do oznaczania roślin“.

Dnia 21 października rozpoczęła się dowolna nauka strzelania uczniów klasy VI i VII urządzona przez c. k. Komendę 34. pułku piechoty obrony krajowej w Jarosławiu. Nauką która się odbywała każdej soboty po południu już to w obrębie budynku szkolnego, jużteż na strzelnicy wojskowej w „Widnej“, kierował podpułkownik Emil z Boldwy Bobrik.

Podczas każdej lekcyi byli obecni z ramienia wojskowości: od października do kwietnia porucznik Józef Lechmann, później porucznik Leon Ecker, z ramienia Dyrekcyi szkolnej zastępca nauczyciela Franciszek Sykutowski. Bezpośrednimi nauczycielami praktycznej części nauki byli ze strony wojskowości: sierżanci Andrzej Biliński, Michał Galan, Stanisław Frankowski i plutonowy Jan Miszczycka. Nauka strzelania była prowadzona tak przez poruczników pod względem przeważnie teoretycznym jakoteż przez podoficerów pod względem praktycznym nadzwyczaj starannie i metodycznie, to też wywołała żywe zainteresowanie u uczniów. Wszyscy nauczyciele odznaczali się przez cały przeciąg nauki taktem i podziwienia godną cierpliwością, za co Im Dyrekcya wyraża na tem miejscu uznanie i podziękowanie.

Nauka, w której prawie wszyscy uczniowie klasy VI. i VII. brali udział, zakończyła się na strzelnicy wojskowej dnia 25. maja strzelaniem do tarczy o nagrodę.

Obraz innych wycieczek przedstawia następująca tabelka.

L.	Data	Wycieczka	do	Ilość ucz. z klas	Prowadzący nauczyciel
1	28/3	piesza	Muniny	33, VI VII	Sykutowski
2	29/3	„	Wądołów	35, III IV	„
3	18/4	„	„	55, V VI VII	„
4	20/5	„	„	40, IV V	Gartner, Sykutowski
5	5/6	koleją	Przemyśla zwiedz. warsztatów kolej.	19, IV V VI	Ks. Litwin Sykutowski
6	12/6	piesza	Jankowic	24, II	Sykutowski
7	12/6	„	Łapajówki	25, I	Komęza

IX.

Zajęcia uczniów poza nauką szkolną.

Poza nauką szkolną uczniowie brali udział w Czytelni uczniów, pracowni mechanicznej, fizycznej, przyrodniczej i introligatorni.

Czytelnią uczniów kierował profesor Kaniowski, pracownią mechaniczną ks. Litwin, fizyczną prof. Steczko, przyrodniczą i introligatornią prof. Gartner.

C z y t e l n i a   p o l s k a uczniów rozpoczęła w tym roku szkolnym działalność dopiero w grudniu. W każdą sobotę od 5—7 zgromadzali się uczniowie bądź to dla czytania pism, bądź też dla wysłuchania odczytu, bądź też dla rozrywki (gra w szachy). Staraniem Czytelni odbył się Uroczysty Wieczór ku czci Adama Mickiewicza, program którego wypełniły deklamacye, chóry, sola skrzypcowe i orkiestra mandolinowa. Słowo o Mickiewiczu wypowiedział uczeń VII. kl., Galotta Józef.

Odczytów było 4:

Odczyt o Henryku Sienkiewiczu.
„ o Ignacym Krasińskim.
„ o Piotrze Skardze.
„ o znaczeniu Uniwersytetu Wileńskiego.

Dnia 11. kwietnia odbyło się przedstawienie magiczne.

Prenumerowano czasopisma:

Ojczyzna, Łan Młodzieży, Tygodnik Ilustrowany, Nasz Kraj.

W pracowni mechanicznej pracowało w środę i sobotę po południu ogółem 37 uczniów, a mianowicie: z kl. I 3, II 6, III 16, IV 5, V 2, VI 2, VII 3.

Uczniowie wykonywali: 3 sanki z drzewa, 2 sanki z żelaza, 1 kuchnię polową, 2 szafki, 1 pult żelazny, 2 małe tokarnie z drzewa, 1 maszynę influencyjną, 1 stolik, ramy, podstawkę do probówek, półki, 1 kocioł do maszynki parowej, 2 naczynia na wodę z blachy do sali geometrycznej, przyrządy do gabinetu fizycznego i geometrycznego, małą dynamomaszynę, przyrządy do robót piłeczkowych; nadto naprawiali rowery, sanki i łyżwy.

W pracowni fizycznej na razie odbywali ćwiczenia jedynie uczniowie klasy VII. w czwartki po południu.

Przedmiotem ćwiczeń były: noniusz, śruba mikrometryczna, sferometr, katetometr, spadkownica Macha i Atwooda, wahadło Airy'ego i odwracalne, przyrząd Mariotte'a, rura falowa Kundta, waga hydrostatyczna, piknometr, ważka giroskopowa, przyrząd do doświadczalnego obliczenia momentu bezwładności, ogólny przyrząd Ampere'a, mostek Wheatstona, przyrząd Hertza, pyrometr, kalorymetr, zwierciadła wklęsłe i soczewki skupiające. Nadto wykonywali uczniowie bądź samodzielnie, bądź z pomocą nauczyciela cały szereg doświadczeń ze wszystkich działów fizyki takich, które robiono na lekcyach szkolnych i takich, których na godzinach obowiązkowych z powodu braku czasu nie można było przerobić.

Za najpiękniejsze uważali uczniowie: doświadczenia ze zjawiskami resonancyi, doświadczenia Tesli i doświadczenia ze wszystkich działów optyki z pomocą skioptikonu, z promieniami Roentgena, telegrafem Morsego i bez drutu, z widmami ciągłemi i przerywanemi. Kilkakrotnie w ciągu roku z pomocą mapy nieba śledzili w porze wieczornej gwiazdozbiory i oznaczali za pomocą teodolitu wysokości gwiazd.

Niektórzy z uczniów pilnie ćwiczyli się w robotach ze szkłem.

Podstawą doświadczeń i pomiarów ilościowych był przerobiony w szkole materyał i tablice fizyczne, na których oprócz tematu, uwidoczniono szkic przyrządu i podano potrzebne objaśnienie.

Od kilku lat przygodnie prowadzona pracownia przyrodnicza, dzięki subwencyi Wys. c. k. Ministeryum W. i O. weszła tego roku na właściwe tory.

Z otrzymanej subwencyi sprawiono kilka mikroskopów, noży, nożyczek i odczynników potrzebnych dla pracowni.

Dwa razy tygodniowo pracowali uczniowie V i VI klasy a w pierwszem półroczu także uczniowie VII klasy. Uczniowie klasy V w miarę branego materyału zapoznawszy się z mikroskopem badali rozmaite rośliny. Do badania przynoszono wodę z okolicznych stawków albo hodowano grzyby, a w zimie oglądali uczniowie gotowe, suche preparaty. W klasie VI zaś z braku materyału badano tylko preparaty pod mikroskopem a nadto w lecie rozmaite drobnoustroje żyjące w naszych wodach przyniesionych ze specyalnie zrobionych wycieczek. Klasa VII przerabiała krystalografię na modelach i robiła rozmaite ćwiczenia jak: obliczano ciężar gatunkowy minerałów i przewodnictwo ciepła, elektr. badano minerały ze względu na polaryzacyę. — Nadto zapoznawali się uczniowie ze skałami przy pomocy mikroskopu.

Założona przed trzema laty introligatornia rozwijała się bardzo powoli dla braku najważniejszych przyrządów. Dopiero tego roku dzięki subwencyi Wys. c. k. Ministeryum W. i O. sprawiono maszynę do obcinania książek i maszynę do szycia zeszytów, kilka innych przyrządów zrobiono w stolarni tutejszego zakładu. Po sprawieniu przyrządów, zaczęto wyrabiać zeszyty dla całego zakładu z krajowego papieru fabryki czerlańskiej. Prócz tego dwa razy w tygodniu przeważnie w środy i piątki, a w miesiącach zimowych we wtorki i soboty pracowali uczniowie także w introligatorni oprawiając dla siebie książki. Przeciętnie w zimowych miesiącach pracowało po 12 uczniów, w letnich po 6 — 8 z różnych klas a mianowicie od I do VI włącznie; razem około 35 uczniów.

Czwarty rok istnieje Kasa szkolna założona i kierowana przez prof. Gartnera. Uczniowie składają pieniądze począwszy od 2 hal. co 14 dni; pieniądze zebrane składa się do Kasy oszczędności m. Jarosławia. Kwota złożona przez uczniów dochodzi do 300 kor. W czasie roku szkolnego nie wolno uczniom włożonych pieniędzy wybierać, otrzymują je albo przy końcu roku szkolnego, jeśli tego żądają. lub po ukończeniu szkoły kiedy zakład opuszczają. Prawie połowa uczniów składa pieniądze do kasy ucząc się oszczędności. Wkładki niektórych uczniów w ten sposób urosły do kilkunastu koron.

X.

Pomoc dla ubogich uczniów,

Dochód.

	K h
Pozostałość kasowa z r. s. 1910/11 . . .	226·62
Dar Świetnej Rady miasta Jarosławia . . .	100·—
„ Wydziału powiatowego w Jarosławiu . .	50·—
„ Szan. gminy wyznan. izrael. w Jarosławiu .	35·—
„ Dyrektora Dra Jana Ralskiego . . .	10·—
„ Profesora Filimowskiego	3·—
„ WPani Kapuścińskiej	4·70
Od Prof Gartnera rabat od zeszytów . . .	17·—
Datki przy wpisach	127·80
„ profesorów i uczniów po egzortach rzym. kat.	12·22
Razem .	586·34

Rozchód.

Za ubrania dla uczniów	140·—
„ lekarstwa	40·31
„ przybory rysunkowe	9·72
„ książki i oprawę	248·34
Na kolonie wakacyjne	39·68
Razem .	478·05

Bilans.

Dochód . .	586·34 K
Rozchód . .	478·05 „
Pozostałość .	108·29 K

t. j. Pozostałość wynosi sto ośm koron 29 hal. Nadto na rzecz ubogich uczniów znajduje się książeczka jarosławskiej Kasy Oszczędności Nr. 4741 z wkładką 147 K.

Dyrekcya w imieniu ubogiej młodzieży tutejszego Zakładu składa na tem miejscu wszystkim Ofiarodawcom i Dobroczyńcom najserdeczniejsze podziękowanie.

XI.

Statystyka.

	KLASA							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	Razem
1. Liczba uczniów.								
Z końcem r. s. 1910/11	31	40	28^{1}	19^{1}	20	24^{1}	21	183^{3}
Na początku r. s. 1911/12 . . .	37	38	37	28	26	19	17	202
W ciągu roku szkolnego wstąpiło .	1	1	—	1	—	—	1	4
Wogóle przyjęto	38	39	37	29	26	19	18	206
z innych zakładów z promocyą .	33	10	1	4	6	2	1	57
„ „ repetentów .	—	—	—	—	2	—	—	2
z tutejszego zakładu z promocyą .	—	26	32	24	16	10	16	124
„ „ repetentów .	5	3	4	1	2	7	1	23
W ciągu roku szkolnego wystąpiło .	6	1	2	2	3	—	—	14
Liczba uczniów z końcem r. s. 1910/11	32	38	35	27	23	19	18	192
publicznych	32	37	35	26	23	19	15	186
prywatnych	—	1	—	1	—	—	3	5
Razem .	32	38	35	27	23	19	18	192
2. Miejsce urodzenia.								
Miasto Jarosław	15	7	11	7	7	9	8	64
Powiaty okoliczne (Jarosław, Cieszanów, Przeworsk)	6	7	5	2	2	3	1	26
Galicya z W. Ks. Krak. . . .	11	22^{1}	18	16^{1}	14	7	5^{3}	93^{5}
Austrya dolna	—	—	—	—	—	—	1	1
Węgry	—	—	1	—	—	—	—	1
Rosya	—	—	—	1	—	—	—	1
Niemcy		1	—	—	—	—	—	1
Razem .	32	37^{1}	35	26^{1}	23	19	15^{3}	187^{5}
3. Język ojczysty.								
Polski	27	36^{1}	30	22^{1}	22	18	14^{3}	169^{5}
Ruski	5	1	3	4	—	—	1	14
Niemiecki	—	—	2	—	1	1	—	4
Razem .	32	37^{1}	35	26^{1}	23	19	15^{3}	187^{5}
4. Wyznanie religijne.								
Rzymsko-katolickie	25	33^{1}	25	18^{1}	13	10	5^{2}	129
Grecko-katolickie	5	2	6	6	2	1	1	23
Ewangielickie	—	—	2	—	1	1	—	4
Mojżeszowe	2	2	2	2	7	7	9^{1}	31
Razem .	32	37^{1}	35	26^{1}	23	19	15^{3}	187^{5}
5. Wiek uczniów.								
Urodzonych w r. 1901	1	—	—	—	—	—	—	1
„ 1900	9	5	—	—	—	—	—	14
„ 1899	15	10^{1}	2	—	—	—	—	27^{1}
„ 1898	4	13	7	2	—	—	—	26
„ 1897	3	7	15	4	4	—	—	33
„ 1896	—	2	7	8	5	—	—	22
„ 1895	—	—	3	9^{1}	5	1	1	19^{1}
„ 1894	—	—	1	3	6	5	2	17
„ 1893	—	—	—	—	2	4	4^{1}	10^{1}
„ 1892	—	—	—	—	1	4	5	10
„ 1891	—	—	—	—	—	5	—	5
„ 1890	—	—	—	—	—	—	3	3
„ 1889	—	—	—	—	—	—	0^{2}	0^{2}
Razem .	32	37^{1}	35	26^{1}	23	19	15^{3}	187^{5}

	I	II	III	IV	V	VI	VII	Razem
	KLASA							
6. Według miejsca pobytu rodziców								
Miejscowych	20	16^{1}	20	10^{1}	14	15	10^{1}	105^{3}
Zamiejscowych	12	21	15	16	9	4	5^{2}	82^{2}
Razem .	32	37^{1}	35	26^{1}	23	19	15^{3}	187^{5}
7. Klasyfikacya.								
a) Z końcem roku szk. 1911/12								
Chlubnie uzdolnionych . . .	—	1^{1}	1	4	1	—	2	9^{1}
Uzdolnionych	25	17	22	12^{1}	10	7	11	104^{1}
Nieuzdolnionych	3	10	7	6	5	3	—	34
Do egzaminu popr. przypuszcz. .	4	9	5	4	6	7	2^{1}	37^{1}
Do egz. dodatk. po wak. przyp. .	—	—	—	—	1	2	0^{2}	3^{2}
Razem .	32	37^{1}	35	26^{1}	23	19	15^{3}	187^{5}
b) Uzupełnienie klasyfikacyi za rok szkolny 1910/11								
Do egzaminu popr. przypuszczono .	8	12	6	5	1	5^{1}	—	36^{1}
Zdało	7	12	5	5	1	4^{1}		34^{1}
Nie zdało . . . . . . ,	1		1					2
Ostateczny wynik za r, szk, 1911/12'								
Chlubnie uzdolnionych . . .	1	1	4	—	—	1	2	9
Uzdolnionych	25	34	18^{1}	18	12	14	18^{1}	139^{2}
Nieuzdolnionych	5	5	6	1^{1}	8	9	1	35
Razem .	31	40	28^{1}	19^{1}	20	24	21^{1}	183^{3}

8. Opłaty.

Opłatę szkolną złożyło:

w 1. półroczu 66 ucz. publ. 4 pryw.
„ 2. „ 73 „ „ 1 „

Było uwolnionych:

w 1. półroczu od całej opłaty 129 ucz. publ. 1 pryw.
w 2. „ „ „ „ 116 „ „ 2 „

Opłata szkolna wynosiła:

w 1. półroczu 2100 K
w 2. „ 2220 „
Razem 4320 K

Taksy wstępne wynosiły	256·20 K
Datki na środki naukowe	412·— „
Taksy na duplikaty świadectw	34·— „
Razem	702·20 K

9. Przedmioty nadobowiązkowe i względnie obowiazkowe.

Na ćwiczenia w pracowni chemicznej uczęszczało 18 ucz.
Na naukę języka ruskiego jako przedmiotu względnie obowiązkowego uczęszczało 18 uczniów.

10. Stypendya.

Stypendya pobierało 3 uczniów.
Ogólna kwota stypendyów wynosi 670 K.

Wykaz książek
na rok szkolny 1912/13
w tutejszym zakładzie.

I KLASA.

Religia, K h

rzym. kat. Ks. Ślósarz. Katechizm religii katolickiej Wyd. 3. Lwów 1908 . . . . . . Opr. 1·—

gr. kat. Serednyj katechyzm chrystyjańsko-katołyckoi religii odobrenyj awstr. Epyskopatom. Lwiw 1906 . —·80

Język polski, Konarski, Zwięzła gramatyka języka polskiego. Lwów 1911 . . . . . . Opr. —·50

Dr. Maryan Reiter, Czytania polskie dla I. klasy z ilustracyami. Lwów 1910 . . . . . Opr. 3·—

Język niemiecki, German, Petelenz, Gayczak, Ćwiczenia niemieckie dla I. klasy. Wyd. 7. Lwów 1910 . . 2·40

Geografia, Benoni i Tatomir, Krótki rys geografii, opr. Wierzbicki. Wyd. 9. Lwów 1908 . . . Opr. 1·—

Historya powszechna B. Gebert i B. Gebertowa, Opowiadania z dziejów ojczystych, Lwów 1910 . . Opr. 2·20

Matematyka, Ignacy Kranz. Arytmetyka na klasę I. Kraków 1911 Opr. 1·50

Ignacy Kranz. Geometrya poglądowa na klasę I. Cena wyd. 1. 1 K 50 h; (wyd. 2 w druku).

Historya naturalna, Nussbaum-Wiśniowski, Wiadomości z zoologii dla niższych klas szkół średnich. Wyd. 3. Lwów 1910 . . . . Opr. 3·60

Rostafiński, Botanika szkolna na klasy niższe. Wyd. 7. Kraków 1911 . . . . . . Opr. 2·80

II KLASA.

Religia, jak w kl. I.

Język polski, Małecki, Gramatyka języka polskiego szkolna. Wyd. 11. Lwów . . . . . . Opr. 2·40

Reiter, Czytania polskie dla II. klasy Lwów 1911 3·40

Język niemiecki, German i Petelenz, Ćwiczenia niemieckie dla II. klasy. Wyd. 6. (wyczerpane).

Geografia, Siwak, Geografia dla II. i III. klasy Lwów 1911 3·20

Historya powszechna Gebert Br. i Dr. Gebertowa G. Opowiadania z dziejów monarchii austr.-węg. (w druku).

Matematyka, Ignacy Kranz, Arytmetyka na klasę II Kraków 1911 . . . . Opr. 1·50

Historya naturalna, Rostafiński, Botanika szkolna dla klas niższych. Wyd. 6. Kraków 1907. . . . . 2·60
Nussbaum-Wiśniowski, Wiadomości z zoologii dla niższych klas szkół średnich. Wyd. 3. Lwów 1910 . . 3·60
Geometrya i rysunki geometryczne, Ign. Kranz, Geometrya poglądowa, na niższe klasy szkół średnich 1910 1·40

III. KLASA.

Religia,
a) rzym. kat. Ks. Jougan, Liturgika. Wyd. 4. Lwów 1910. Opr. 1·40
Ks. Szydelski, Dzieje biblijne starego zakonu. Lwów 1908 (wyczerpane) . . . . 1·—
b) gr. kat. Torońskyj A. Istorja biblijna staroho zawita. Wyd. 2. Lwiw 1899. . . . . Opr. 2·—
Liturgika. Wydanie Krużka Katychytyw. (w druku).
Język polski, Małecki, Gramatyka języka polskiego szkolna. Wyd. 11. Lwów 1910 . . . . Opr. 2·40
Dr. Maryan Reiter. Czytania polskie dla III. klasy z ilustr. (w druku).
Język niemiecki, German i Petelenz. Ćwiczenia niemieckie dla klasy III. Wyd. 5. Lwów 1911 . . . . 2·80
Jahner, Deutsche Grammatik, Wyd. 4. Lwów 1911. Opr. 2·20
Język francuski, Dr. St. Węckowski, Książka do nauki języka francuskiego. Część I. Wyd. 2. Lwów 1911. Opr. 2·20
Geografia, Baranowski i Dziedzicki, Geogr. powsz. opr. Dr. Romer.
Historya, Dr. Kazimierz Krotoski, Opowiadania z dziejów monarchii austr.-węg. w związku historyą powszechną. Lwów 1910 . . . . Opr. 2·50
Zipper, Opowiadania z mitologii Greków i Rzymian. Lwów 1897 . . . . Opr. 2·40
Matematyka, Ignacy Kranz, Arytmetyka dla kl. III. . 1·80
Fizyka, Kawecki i Tomaszewski, Fizyka dla niższych klas szkół średnich. Wyd. 6. Kraków 1910. . . Opr. 2·—
Geometrya i rysunki geometryczne, Kranz Ignacy, Geometrya poglądowa na klasę III. Kraków 1910. . Opr. 1·80

IV. KLASA.

Religia.
a) rzym. kat. Ks. Dr. Szydelski, Dzieje biblijne Nowego zakonu. Lwów 1910. . . . . . Opr. 1·80
Torońskyj A., Istorja biblijna nowoho zakona. Wyd. I. II. Lwiw 1901. . . . . Opr. 1·60
Język polski, Małecki, Gramatyka języka polskiego szkolna. Wyd. 11. Lwów 1910. . . . . Opr. 2·40
Próchnicki F. O ważniejszych gatunkach poezyi i prozy.

Dodatek do wypisów polskich, tom V. (brosz.) —·25
Próchnicki i Wojciechowski, Wypisy polskie dla klasy V. Lwów 1911 . . . . 3·80

Język niemiecki, German-Petelenz-Gayczak. Ćwiczenia niemieckie dla IV. klasy Wyd. 4. Lwów 1910. . . 3·—
Jahner, Deutsche Grammatik. Wyd. 4. Lwów 1911. Opr. 2·20

Język francuski, Dr. Stanisław Węckowski, Książka do nauki języka francuskiego. Część II. Lwów 1910. . 2·80

Geografia, Majerski, Geografia austr.-węgierskiej monarchii. Wyd 5. wyczerpane, przygotowuje się wydanie 6.

Historya, Zakrzewski, Historya powszechna Część I. Wyd. 7. Kraków 1911. . . . . . . Opr. 2·40

Matematyka, Dziwiński, Podręcznik arytmetyki i algebry dla klas wyższych. Wyd. 4. Lwów 1910. . Opr. 4·50

Fizyka, Kawecki i Tomaszewski, Fizyka dla niższych klas szkół średnich. Wyd. 6. Kraków 1910. . . Opr. 2·—

Chemia, Duchowicz-Wiśniowski, Wiadomości z chemii i mineralogii dla klas niższych. Lwów 1911.

Geometrya i rysunki geometryczne, Łomnicki A. Geometrya Część I. dla kl. IV. i V. Lwów 1912. . Opr. 3·40
Łazarski. Zasady geometryi wykreślnej (z atlasem). Wyd. II. Lwów 1901. . . . . 3·40

V. KLASA.

Religia.
rzym. kat. Ks. Dr. Maciej Sieniatycki, Ogólna katolicka dogmatyka. Wyd. 2. Lwów 1908. . . Opr. 2·—
gr. kat. A. Torońskyj, Chryst. katoł. dogmatyka fundamentalna i apoliogetyka dla klas wysszych. Wyd. II. Lwiw 1906. Opr. 2·—

Język polski. Tarnowski i Bobin. Wypisy polskie dla szkół realnych i seminaryów nauczycielskich. Tom I. Wyd 5. Lwów 1912. . . . . Opr. 3·—
Zathey, Antologia rzymska. Lwów 1898 . Opr. 3·—

Język niemiecki, Ippoldt und Stylo, Deutsches Lesebuch für die oberen Klassen der galizischen Mittelschulen I. Teil V. Klasse. Wyd. 3. Lwów 1912. . . . . 3·80

Język francuski, Dr. Stanisław Węckowski, Książka do nauki języka francuskiego. Część III. Lwów 1910 . 3·20

Historya. Zakrzewski, Historya powszechna. Część II. Wyd. 5. Kraków 1911 . . . . . . Opr. 2·40

Geografia. Jak w kl. III.

Matematyka. Dziwiński. Podręcznik arytmetyki i algebry dla klas wyższych. Wyd. 4. Lwów 1910. . Opr. 4·30
Kranz, Logarytmy. Wyd. 1, Kraków 1912. . 1·50

Historya naturalna. Rostafiński, Botanika szkolna dla klas wyższych. Wyd. 4. Kraków 1911 . . . . 3·20

Chemia, Brunner i Tołłoczko. Chemia nieorganiczna. Kraków 1908. Wyd. 3. . . . . 3·60
Geometrya i rysunki geometryczne. Mocnik-Maryniak, Geometrya dla klas wyższych (wyczerpane) . . 4·—
Łazarski, Zasady geometryi wykreślnej (z atlasem). Wyd. 3. Lwów 1907. . . . . 3·40

VI. KLASA.

Religia.
rzym. kat. Ks. Szczeklik, Etyka katolicka. Wyd. 5. Kraków 1912. . . . . Opr. 2·20
gr. kat. Dorożyńskyj, Etyka. Lwów 1904. . . 2·—
Język polski. Tarnowski i Bobin, Wypisy polskie dla szkół realnych i sem. naucz. Tom. I. Wyd. 5. Lwów 1912 Opr. 3·—
Tarnowski i Bobin, Wypisy polskie dla szkół realnych i sem. naucz. Tom II. Wyd. 4. Lwów 1909. . Opr. 3·—
Zathey. Antologia grecka. Lwów 1894. (wyczerpane).
Zathey. Antologia rzymska. Lwów 1898. . Opr. 3·—
Język niemiecki. Ippoldt u. Stylo. Deutsches Lesebuch für die oberen Klassen der galiz. Mittelschulen. III. Teil VII. Klasse. Lwów 1907. Wyd. 2. . . . . . . 4·—
Lektura szkolna obowiązkowa: Goethe: Minna von Barnhelm, Egmont; Körner: Zriny.
Język francuski, Dr. St. Węckowski i Dr. J. Szarota, La France I. Lwów 1910. . . . . . . Opr. 3·50
Historya. Zakrzewski, Historya powszechna. Część III. Wyd. 4. skrócone. Kraków 1908. . . . . Opr. 2·80
Geografia. Jak w kl. III.
Matematyka. Dziwiński, Podręcznik arytmetyki i algebry dla klas wyższych. Wyd. 4. Lwów 1910. . Opr. 4·50
Kranz, Logarytmy. Wyd. 2. Kraków 1912. . Opr. 1·30
Mocnik-Maryniak, Geometrya dla klas wyższych 4·—
Historya naturalna. Dr. Józef Nusbaum: Zoologia dla klas wyższych szkół średnich. Lwów 1909. . . 3·60
Chemia. Duchowicz-Bolland, Chemia organiczna (wydanie drugie zmienione w druku).
Fizyka. Kawecki i Tomaszewski, Fizyka dla wyższych klas szkół średnich. Kraków 1906. (wyczerpane) . Opr. 3·40
Geometrya i rysunki geometryczne jak w kl. V.

VII. KLASA.

Religia.
rzym. kat. Ks. Walenty Gadowski, Zarys historyi kościoła katolickiego. Wyd. 3. Kraków 1911. . Opr. 3·—
gr. kat. Wapler-Stefanowycz, Istorja chryst. katołyckoji cerkwy. Lwiw 1903. . . . . . . 2·—
Język polski. Tarnowski i Bobin. Wypisy polskie. Część II. Wyd. 4. Lwów 1909. . . . . . Opr. 2·—

Zathey. Antologia grecka. Lwów 1894. (wyczerp.) Opr. 4·—
Zathey. Antologia rzymska. Lwów 1898. . Opr. 3·—

Język niemiecki. Ippold u. Stylo, Deutsches Lesebuch für die oberen Klassen der galiz. Mittelschulen. III. Teil. VII Klasse Wyd. 2. Lwów 1911. . . . . Opr. 4·—
Ippoldt, Deutsches Lesebuch für die oberen Klassen der galiz. Mittelschulen IV. Teil. VIII. Klasse Lwów 1909. Opr. 4·—
Lektura szkolna obowiązkowa: Goethe: Maria Stuart.

Język francuski. Dr. St. Węckowski i Dr. J. Szarota La France II. Lwów 1910. . . . . . Opr. 4·—

Historya. Zakrzewski Historya powszechna. Część III. Wyd. 4, skrócone. Kraków 1908.. . . . Opr. 2·—
Lewicki, Zarys dziejów Polski i krajów ruskich z nią połączonych. Wyd. 4. Kraków 1910. . . Opr. 2·—
Głąbiński Finkel. Historya i Statystyka austryacko-węgiersk. monarchii. Wyd. 3. Lwów 1910. . . . 2·—

Matematyka. Dziwiński, Zasady algebry. Wyd. 4. Lwów 1910. Opr. 4.50
Kranz, Logarytmy, Kraków 1900 . . Opr. 1·20

Historya naturalna. Łomnicki, Mineralogia i geologia. Wyd. 6. Lwów 1909. . . . . 1·60

Fizyka. Kawecki i Tomaszewski, Fizyka dla wyższych klas szkół średnich Wyd. 3. i 4. Kraków 1906. (wyczerpane) Opr. 3·40

Geometrya i rysunki geometryczne jak w kl. V.

Podręczniki do nauki religii mojżeszowej.

Z. Kammerling, wiara i ustawa, nauka o wierze i powinnościach izraelickich. Lwów 1906.
S. Spitzer, Modły Izraelitów. Kraków 1907.
S. Spitzer, Historya biblijna oraz zasady wiary i moralności Kraków 1907.

Podręczniki do nauki języka ruskiego.

KLASA III.

Bohdan Łepki: Czytanka Ruska 1904.
Kokorudz-Konarski: Gramatyka ruska dla Polaków. Lwów 1900.

KLASA IV.

Łuczakowski — Wzory prozy i poezyi, wyd. 2. Lwów 1909.
Kokorudz-Konarski — Gramatyka ruska.

KLASA V.

W I. Podręczniki jak w kl. IV.
W II. Barwiński: Wybir z narodnoi literatury ukraińsko-ruskoi dla seminaryj uczytelskych — Lwiw 1910.

KLASA VI.

Barwiński; Wybir z narodnoi literatury jak w II. półr. kl. V.

XII.

Spis uczniów

z końcem roku szk. 1911/12.

Uczniowie chlubnie uzdolnieni oznaczeni są tłustemi czcionkami.

Klasa I.

Barłóg Edmund
Bazylewicz Józef
Bednarski Edward
Bojarski Stanisław
Cybyk Hipolit
Derczyński Edmund
Ekert Karol
Fink Leon
Gall Aleksander
Grunert Stanisław
Homola Maryan
Kasztelewicz Eugeniusz
Kosiński Kazimierz
Król Józef
Krsek Władysław
Kunzek Stanisław
Madler Mieczysław
Ogonek Henryk
Polz Otto
Ratz Samuel
Rech Ferdynand
Sanak Józef
Starek Karol
Sliwiński Józef
Spiewak Franciszek
Szott Edward
Tokarz Julian
Werbeneć Jan
Witkowski Eugeniusz
Wojtuń Franciszek
Zarzycki Julian
Zarzycki Karol

Klasa II.

Albiński Tadeusz
Barański Feliks
Complak Franciszek
Cyran Józef
Cząstka Stanistaw
Czołhan Edward
Duda Franciszek
Duda Teodor
Estkowski Stanislaw
Gondek Władysław
Gosławski Maryan
Gurgul Wincenty
Kowalski Leon
Kozacki Stanisław
Kozacki Tadeusz
Kranz Mojżesz
Kraśniński Fryderyk
Macierzanka Stanisław
Michniowski Artur
Milli Włodzimierz
Myczkowski Adam
Niemczyk Zdzisław
Nowotarski Czesław
Orbach Abraham
Palej Józef
Pielichowski Michał
Ralska Zofia (pryw.)
Schwarz Fryderyk
Sieminowicz Aleksander
Stanoszek Emilian

Svoboda Teodor
Szott Bronisław
Trybułowski Karol
Welz Władysław
Wilczyński Józef
Woźniakowski Mieczysław
Wraży Leon
Żak Jan.

Klasa III.

Barański Józef
Bochno Teodor
Chomicki Włodzimierz
Domaszewski Adam
Fussteig Szymon
Gacek Franciszek
Guzik Franciszek
Hatała Roman
Heil Wilhelm
Hrycak Władysław
Klein Oskar
Koczyrkiewicz Eugeniusz
Leib Teodor
Łojak Mieczysław
Markowski Waleryan
Mazurkiewicz Franciszek
Mączyński Eugeniusz
Michalski Zdzisław
Mieszczyk Karol
Milli Zygmunt
Mück Henryk
Niziński Stanisław
Ostrichansky Ludwik
Pietruszka Zygmunt
Rech Stanisław
Sanak Mieczysław
Sozański Nikodem
Stańkowski Stanisław
Starek Józef
Stölzer Edmund
Szwec Stefan
Wardecki Feliks
Wiszniewski Romuald
Wójcicki Roman
Zawisza Emil

Klasa IV.

Denasiewicz Kazimierz
Durkalec Wilhelm
Harassek Adam
Haszczyc Orestes
Hatała Anatol
Ilkowski Stanisław
Kałamarz Roman
Kapuściński Władysław
Komarnicki Bolesław
Kondro Jan
Kratz Joachim
Krawczyk Tadeusz
Król Antoni
Kulczycki Eugeniusz
Mozołowski Stanisław
Piela Stanisław
Rembisz Jan
Rokosz Jan
Rosenberg Leizer
Sarzyńska Adela (pryw)
Stachowski Kazimierz
Szczekot Augustyn
Szumski Zenon
Wierzbicki Eugeniusz
Wochanka Wilhelm
Zawadil Wilhelm
Zawitkowski Stanisław.

Klasa V.

Bojakowski Michał
Donenhirsch Abraham
Eilberg Izrael
Hartfelder Jan
Jasiński Tadeusz
Kling Henryk

Kowalski Władysław
Leonhard Jerzy
Maksymowicz Seweryn
Mizgalewicz Julian
Narcysenfeld Eisik
Niemczycki Franciszek
Nowiński Tadeusz
Pastuch Jan
Pistl Karol
Powolny Władysław
Ralski Lesław
Reich Dawid
Rübner Filip
Sandig Maurycy
Sobolewski Karol
Ways Tadeusz
Wysoczański Jan

Klasa VI.

Brathspiess Gabryel
Dobrzański Ziemowit
Köhler Rudolf
Łowicki Edmund
Metzger Izaak
Michalski Jan
Mühlbauer Rudolf
Mryczko Adam
Naspiński Jan
Nowotarski Jan
Ringel Izydor
Rosenbaum Isaak
Tumidajski Wiktor
Turnheim Saul
Wiatr Władysław
Wnęk Jan
Woller Kopel
Wrażej Władysław
Zieliński Adolf

Klasa VII.

Baczyński Tadeusz
Balaban Alfred
Galotta Józef
Goldstaub Aleksander (pryw)
Gwizda Zygmunt (pryw)
Klang Natan
Knispel Benzion
Lipper Adolf
Menkes Teodor
Mühlbauer Józef
Podhorecki Michał
Ringel Maurycy
Schreckinger Joachim
Skopal Franciszek (pryw)
Starek Jan
Szkolnicki Aleksander
Wiszniewski Edward
Wrażej Eugeniusz.

W Jarosławiu, dnia 30. czerwca 1912.

Dr. Jan Ralski
dyrektor.