VII.

SPRAWOZDANIE

Dyrekcyi c. k. wyższej szkoły realnej w Jarosławiu za rok szkolny 1910|11.

TREŚĆ:

Dr. Jan Ralski:
Zasady rachunku różniczkowego i całkowego dla użytku szkół średnich (ciąg dalszy i dokończenie).
Grundzüge der Differential- und Integralrechnung zum Gebrauch an den Mittelschalen (Fortsetzung u. Schluss).

2. Wiadomości szkolne podane przez dyrektora zakładu.

NAKŁADEM FUNDUSZU NAUKOWEGO.
Z DRUKARNI L. WIŚNIEWSKIEGO W JAROSŁAWIU
1911.

SPIS RZECZY.

Powierzchnia trapezu jest $\frac{1}{2}(x+y)\, z \sin\alpha$, zatem

$$F(x, y, z, \alpha) = \frac{1}{2}(x+y)\, z \sin\alpha, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2} z \sin\alpha,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2}(x+y)\sin\alpha, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{1}{2}(x+y) z \cos\alpha, \quad \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0{\cdot}01,$$

$$\Delta\alpha = 0{\cdot}5^0 = 0{\cdot}00873, \quad \Delta F(x, y, z, \alpha) = \frac{1}{2} z \sin\alpha\, (\Delta x + \Delta y)$$
$$+ \frac{1}{2}(x+y)\sin\alpha\, \Delta z + \frac{1}{2}(x+y)\, z\cos\alpha\, \Delta\alpha,$$
$$\Delta F(120, 80, 100, 60^0) = \frac{1}{2} \,.\, 100 \,.\, 0{\cdot}866 \,.\, 2 \,.\, 0{\cdot}01$$
$$+ \frac{1}{2} \,.\, 200 \,.\, 0{\cdot}866 \,.\, 0{\cdot}01 + \frac{1}{2} \,.\, 200 \,.\, 100 \,.\, 0{\cdot}5 \,.\, 0{\cdot}00873 = 45{\cdot}4\, m^2.$$

XXIII.

Znaczenie pochodnej.

Znaczenie pochodnej poznamy w następujących zagadnieniach:

1) Funkcya $f(x)$ wyraża rzędną y punktu odpowiadającego odciętej x w układzie prostokątnym, czyli $y = f(x)$ jest równaniem linii; co wyraża pochodna $f'(x)$?

Aby na to pytanie odpowiedzieć, weźmy pod uwagę obraz funkcyi BCE na fig. 21. Mamy tu $OA = x$, $AC = y = f(x)$, $AD = \Delta x$, $EF = \Delta y$,

$$DE = y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

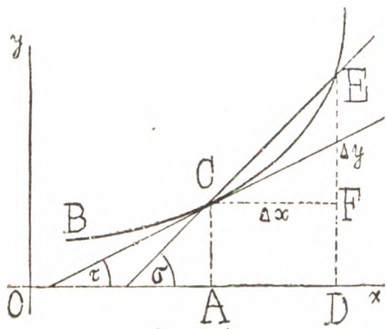

Fig. 21.

Widzimy dalej na figurze, że $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y$. Oznaczywszy kąt, jaki tworzy sieczna CE z osią odciętych przez σ, mamy

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\sigma.$$

Gdy Δx maleje, punkt E zbliża się do punktu C a sieczna zbliża się coraz bardziej do stycznej w punkcie C poprowadzonej. Oznaczywszy przez τ kąt, jaki tworzy styczna w punkcie C poprowadzona z osią odciętych, mamy w granicy dla Δx nieskończenie małego

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \frac{dy}{dx} = tg\,\tau.$$

Tg τ nazywa się *stałą kierunkową* stycznej. Zatem, *jeżeli* $f(x)$ *wyraża rzędną w pewnym punkcie linii, natenczas pochodna* $f'(x)$ *wyraża stałą kierunkową stycznej w tymże punkcie do linii poprowadzonej.*

Gdy funkcya jest uwikłana, wtenczas na zasadzie równania

$$\frac{dy}{dx} = tg\,\tau$$

stosunek różniczkowy wyznacza stałą kierunkową w danym punkcie linii i ułatwia wyprowadzenie równania tejże stycznej. Wyjaśniają nam to bliżej następujące przykłady:

a) Wyprowadzić równanie stycznej w punkcie $[x_1, y_1]$ linii $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$ poprowadzonej.

Ponieważ punkt $[x_1, y_1]$ znajduje się na linii, więc jego współrzędne spełniają równanie

$$\alpha x_1{}^2 + \beta y_1{}^2 = 1.$$

Różniczkując równanie $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$, mamy

$$2\alpha x\,dx + 2\beta y\,dy = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha x}{\beta y}.$$

Stała kierunkowa stycznej w punkcie $[x_1, y_1]$ poprowadzonej jest zatem

$$-\frac{\alpha x_1}{\beta y_1},$$

a szukane równanie stycznej będzie:

$$y - y_1 = -\frac{\alpha x_1}{\beta y_1}(x - x_1),$$

które po przekształceniu przyjmuje kształt

$$\alpha x_1 x + \beta y_1 y = 1 \text{ (dla elipsy lub hiperboli).}$$

Jeżeli równanie linii jest $y^2 = 2px$, natenczas

$$2y\,dy = 2p\,dx,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y},$$

a równanie stycznej $y-y_1=\frac{p}{y_1}(x-x_1)$ w punkcie $[x_1, y_1]$ po przekształceniu i uwzględnieniu, że $y_1^2=2px_1$, przyjmuje kształt

$$y_1 y=p(x_1+x) \text{ (dla paraboli).}$$

β) Wyznaczyć kąt, jaki tworzą linie $y=f(x)$ i $y=g(x)$ w punkcie przecięcia się (x_1, y_1).

Kąt, jaki tworzą dwie linie przecinające się, wyraża się zapomocą kąta λ, jaki tworzą styczne do obu linii w punkcie ich przecięcia się $(x_1\ y_1)$ poprowadzone. Ponieważ stałe kierunkowe tychże stycznych są $f'(x_1)$, $g'(x_1)$, przeto

$$tg\ \lambda=\frac{g'(x_1)-f'(x_1)}{1+f'(x_1)g'(x_1)}.$$

Jeżeli równania linii są: $F(x,y)=0$, $G(x,y)=0$ i jeżeli stosunek różniczkowy $\frac{dy}{dx}$ z pierwszego równania wypada $\varphi(x, y)$, z drugiego $\psi(x, y)$, natenczas stałe kierunkowe stycznych w punkcie $(x_1\ y_1)$ są $\varphi(x_1, y_1)$, $\psi(x_1, y_1)$, zaś

$$tg\ \lambda=\frac{\psi(x_1, y_1)-\varphi(x_1\ y_1)}{1+\varphi(x_1, y_1)\psi(x_1, y_1)}.$$

Np. Linie, których równania są $x^2+y^2=13$, $y^2=\frac{9}{2}x$, czyli $y=\sqrt{13-x^2}=f(x)$, $y=\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{x}=g(x)$, przecinają się w punkcie (2, 3). Ponieważ $f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{13-x^2}}$,

$$g'(x)=\frac{3}{2\sqrt{2x}},\ f'(2)=-\frac{2}{3},\ g'(2)=\frac{3}{4}, \text{ przeto}$$

$$tg\ \lambda=\frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{17}{6}.$$

Pisząc równania powyższych linii w kształcie

$$x^2+y^2-13=0,\quad y^2-\frac{9}{2}x=0$$

i różniczkując, otrzymujemy z pierwszego

$$2x\,dx+2y\,dy=0,\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}=\varphi(x, y),$$

z drugiego: $2y dy=\frac{9}{2}dx$, $\frac{dy}{dx}=\frac{9}{4y}=\psi(x, y)$; skąd wypada: $\varphi\ (2,\ 3) = -\frac{2}{3}$, $\psi(2,\ 3) = \frac{3}{4}$ zgodnie z poprzedzającem.

2) Funkcya $f(x)$ wyraża powierzchnię F zawartą w pierwszej ćwiartce między osiami współrzędnych, rzędną odpowiadającą odciętej x i linią. Co wyraża pochodna $f'(x)$?

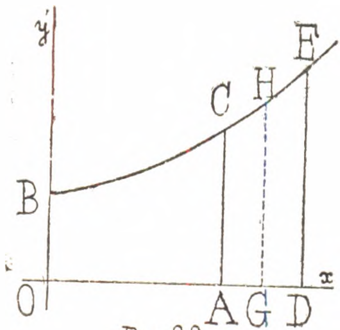

Fig. 22.

Weźmy pod uwagę fig. 22, na której $OA = x$, powierzchnia $BOACB = F = f(x)$, $AD = \Delta x$, pow. $ADECA = \Delta F$, pow. $BODEB = F + \Delta F = f(x + \Delta x)$. Mamy zatem $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta F$. Lecz $\Delta F = \Delta x.\ GH$, gdzie $AC < GH < DE$, co uwzględniwszy otrzymamy $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta F}{\Delta x} = GH.$

Jeżeli Δx maleje, punkt E a zatem i punkt H zbliża się do punktu C. W granicy dla Δx nieskończenie małego

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \frac{dF}{dx} = AC,$$

to znaczy: *pochodna $f'(x)$ wyraża rzędną, odpowiadającą odciętej x, zamykającą powierzchnię.*

3) Funkcya $f(x)$ wyraża objętość V bryły zawartej między płaszczyzną YOZ, powierzchnią bryły i płaszczyzną ABC będącą w odległości x od płaszczyzny YOZ (fig. 23). Co wyraża pochodna $f'(x)$?

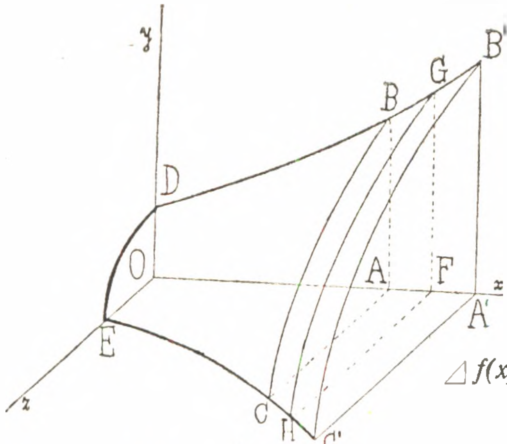

Fig. 23

Jeżeli $OA = x$, objętość bryły $ABCODE = \mathcal{V} = f(x)$, natenczas gdy x wzrośnie o $AA' = \Delta x$, objętość bryły powiększy się o $ABCA'B'C' = \Delta \mathcal{V}$. Będzie zatem

$$\mathcal{V} + \Delta \mathcal{V} = f(x + \Delta x),$$

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta \mathcal{V}.$$

Lecz objętość $\Delta \mathcal{V}$ otrzymamy, mnożąc Δx przez przekrój FGH większy od ABC a mniejszy od $A'B'C'$, czyli

$$\Delta \mathcal{V} = \Delta x \,.\, FGH.$$

To uwzględniwszy, będziemy mieć

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta \mathcal{V}}{\Delta x} = FGH.$$

Gdy Δx maleje, przekrój $A'B'C'$ a zatem i przekrój FGH zbliża się do przekroju ABC. W granicy dla Δx nieskończenie małego wypada

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \frac{d\mathcal{V}}{dx} = ABC,$$

to znaczy: *pochodna $f'(x)$ wyraża przekrój bryły równoległy do płaszczyzny YOZ będący od niej w odległości x.*

4) Funkcya $f(t)$ wyraża drogę s, jaką punkt poruszający się odbył w czasie t. Co wyraża pochodna $f'(t)$?

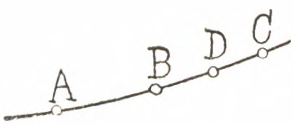

Fig. 24

Jeżeli (fig. 24.) $AB = s = f(t)$ oznacza drogę, jaką punkt odbył w czasie t, $BC = \Delta s$ drogę odbytą w czasie Δt, natenczas

$$s + \Delta s = f(t + \Delta t),$$

$$\Delta f(t) = f(t + \Delta t) - f(t) = \Delta s.$$

Punkt porusza się wogóle ruchem zmiennym, to znaczy, że jeżeli ma w punkcie B pewną prędkość v, to w punkcie C ma inną, większą lub mniejszą. Drogę Δs możemy jednak wyrazić, uważając ruch na drodze BC jako jednostajny, zapomocą iloczynu czasu Δt przez jakąś prędkość pośrednią v_1, taką n. p. jaka jest w punkcie D. Będzie więc $\Delta s = \Delta t \,.\, v_1$,

$$\frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_1.$$

Gdy Δt maleje, punkt C a zatem i punkt D zbliża się do punktu B a wartość prędkości v_1 zbliża się do wartości v, jaka jest w punkcie B. W granicy dla Δt nieskończenie małego wypada

$$\frac{df(t)}{dt} = f'(t) = \frac{ds}{dt} = v,$$

to znaczy: *jeżeli $f(t)$ wyraża drogę przebytą w czasie t, natenczas pochodna $f'(t)$ wyraża prędkość końcową po czasie t.*

Gdy ruch jest jednostajny t. j. gdy $s = ct$, prędkość jest ilością stałą, bo $\frac{ds}{dt} = c$;

gdy $s = ct + \frac{\gamma t^2}{2}$, wtenczas $\frac{ds}{dt} = v = c + \gamma t$.

5) Funkcya $f(t)$ wyraża prędkość końcową v punktu po czasie t; co wyraża pochodna $f'(t)$?

Jeżeli po czasie t punkt znajduje się w punkcie B (fig. 24) i ma prędkość końcową $v = f(t)$, natenczas po czasie $t + \Delta t$ będzie się znajdował w punkcie C i będzie mieć prędkość końcową większą o Δv. Mamy więc: $v + \Delta v = f(t + \Delta t)$,

$$\Delta f(t) = f(t + \Delta t) - f(t) = \Delta v.$$

Gdyby ruch był jednostajnie zmienny, byłoby Δv proporcyonalne do przyspieszenia γ, jakie jest w punkcie B. Lecz ruch jest wogóle niejednostajnie zmienny, to znaczy, że inne jest przyśpieszenie w punkcie B a inne w punkcie C. Uważając jednak ruch w czasie Δt jako jednostajnie zmienny, można Δv wyrazić jako iloczyn czasu Δt przez przyśpieszenie pośrednie γ_1 takie n. p. jakie jest w punkcie D. Jest zatem $\Delta v = \Delta t \,.\, \gamma_1$,

$$\frac{\triangle f(t)}{\triangle t} = \frac{\triangle v}{\triangle t} = \gamma_1.$$

Gdy $\triangle t$ maleje, punkt C a zatem i punkt D zbliża się do punktu B a wartość przyśpieszenia γ_1 zbliża się do wartości γ, jaka jest w punkcie B. W granicy dla $\triangle x$ nieskończenie małego wypada

$$\frac{df(t)}{df} = f'(t) = \frac{dv}{dt} = \gamma,$$

o znaczy: *gdy $f(t)$ wyraża prędkość końcową po czasie t, pochodna $f'(t)$ wyraża przyśpieszenie po tymże czasie.*

Gdy ruch jest jednostajnie zmienny, przyśpieszenie jest ilością stałą. N. p. gdy $v = c + \gamma t$, wtenczas $\frac{dv}{dt} = \gamma$.

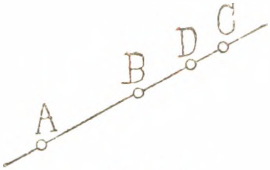

Fig 25

6) Funkcya $f(r)$ wyraża pracę L, jaką wykonuje siła skierowana do punktu A (fig. 25), przy przesunięciu punktu materyalnego B do odległości r od punktu A. Co wyraża pochodna $f'(r)$. ?

Jeżeli $AB = r$, $BC = \triangle r$, natenczas praca wykonana przy przeprowadzeniu punktu materyalnego do punktu B jest $L = f(r)$, zaś przy przeprowadzeniu do punktu C jest $L + \triangle L = f(r + \triangle r)$, skąd wypada

$$\triangle f(r) = f(r + \triangle r) - f(r) = \triangle L.$$

Gdyby siła na całej drodze $\triangle r$ była taka sama P, jak w punkcie B, natenczas praca $\triangle L$ dałaby się wyrazić jako iloczyn siły P przez drogę $\triangle r$. Lecz wogóle siła się zmienia, inna jest w punkcie B a inna w punkcie C. Uważając jednak, że siła na drodze $\triangle r$ się nie zmienia, możemy pracę $\triangle L$ wyrazić jako iloczyn drogi $\triangle r$ przez jakąś pośrednią siłę P_1 taką n. p. jaka działa w punkcie D. Będzie więc $\triangle L = \triangle r \,.\, P_1$,

$$\frac{\triangle f(r)}{\triangle r} = \frac{\triangle L}{\triangle r} = P_1.$$

Gdy Δr maleje, punkt C a zatem i punkt D zbliża się do punktu B a wartość siły P_1 zbliża się do wartości siły P działającej w punkcie B. W granicy dla Δr nieskończenie małego wypada

$$\frac{df(r)}{dr} = f'(r) = \frac{dL}{dr} = P,$$

to znaczy: *jeżeli $f(r)$ wyraża pracę w odległości r, natenczas pochodna $f'(r)$ wyraża siłę działającą w tejże odległości.*

Jeżeli $L = \frac{m}{r}$, natenczas $P = \frac{dL}{dr} = -\frac{m}{r^2}$.

7) Funkcya $f(t)$ wyraża ilość ciepła Q, jaką posiada ciało o ciężarze 1 przy temperaturze t; co wyraża pochodna $f'(t)$?

Aby temperaturę ciała podnieść o Δt stopni, trzeba dodać ΔQ kaloryi ciepła. Będzie zatem

$$Q + \Delta Q = f(t + \Delta t),$$

$$\Delta f(t) = f(t + \Delta t) - f(t) = \Delta Q.$$

Gdyby ciepło właściwe było takie samo c przy temperaturze t jak i przy temperaturze $t + \Delta t$, natenczas ΔQ byłoby równe iloczynowi Δt stopni przez ciepło właściwe. Lecz wogóle ciepło właściwe się zmienia razem z temperaturą. Przyjmując, że przy podwyższeniu temperatury o Δt stopni ciepło właściwe się nie zmieniło, możemy ΔQ wyrazić jako iloczyn Δt przez ciepło właściwe c_1 pośrednie między ciepłem właściwem przy temperaturze t a temperaturze $t + \Delta t$. Mamy więc

$$\Delta Q = \Delta t \,.\, c_1,$$

$$\frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = c_1.$$

Gdy Δt maleje, ciepło właściwe c_1 zbliżą się do ciepła właściwego c, jakie jest przy temperaturze t. W granicy dla Δt nieskończenie małego wypada

$$\frac{df(t)}{dt} = f'(t) = \frac{dQ}{dt} = c,$$

to znaczy: *pochodna $f'(t)$ wyraża w tym przypadku ciepło właściwe ciała przy temperaturze t^0.*

XXIV.

Znaczenie różniczki funkcyi.

Różniczka funkcyi wyraża nieskończenie mały przyrost tej ilości, co funkcya; n. p. jeżeli funkcya wyraża powierzchnię, to jej różniczka wyraża nieskończenie małą część powierzchni, jeżeli funkcya wyraża pracę, to jej różniczka wyraża nieskończenie małą pracę i t. p. Różniczkę często nazywa się *elementem*; mówi się: element powierzchni, element drogi i t. p.

XXV.

Maximum lub minimum funkcyi.

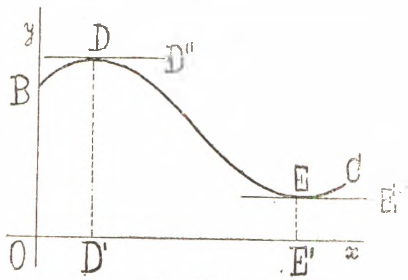

Fig 26.

Jeżeli linią $BDEC$ przedstawia obraz funkcyi $f(x)$, lub równania $F(x, y) = 0$, natenczas tak pochodna $f'(x)$ jak stosunek różniczkowy $\frac{dy}{dx}$ wyraża stałą kierunkową stycznej poprowadzonej w punkcie odpowiadającym zmiennej x. Na fig. 26. widzimy, że linia się wznosi od B do D, potem zniża się od D do E, wznosi się od E do C. Punkta D, E są *punktami zwrotu*, w punkcie D jest *maximum*, w punkcie E *minimum* funkcyi. Styczne w punktach zwrotu D i E poprowadzone są równoległe do osi odciętych, a więc ich stałe kierunkowe są równe zeru.

Z tego powodu, jeżeli oznaczymy $OD' = x_1$, $OE' = x_2$, muszą być spełnione równania: $f'(x_1) = 0$ i $f'(x_2) = 0$. Jeżeli funkcya jest uwikłana, natenczas $\frac{dy}{dx}$ jest wogóle funkcyą zmiennych x i y, to znaczy: $\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$, a gdy punkt $[x_1, y_1]$ jest punktem zwrotu, musi być spełnione równanie: $\varphi(x_1, y_1) = 0$.

Ogólnie: *funkcya osięga maximum lub minimum dla takich wartości zmiennej x, dla których jest*

$$f'(x)=0, \text{ lub } \frac{dy}{dx}=0.$$

Przykłady.

1) Funkcya $3x^2-8x+5$ osięga maximum lub minimum dla $x=1\frac{1}{3}$, bo dla tej wartości pochodna $\frac{d}{dx}[3x^2-8x+5]=2(3x-4)$ jest równą 0. Na obrazie funkcyi (fig. 6) widzimy, że jest minimum. Współrzędne punktu zwrotu są $[1\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}]$.

2) Funkcya $\sin x$ osięga maximum lub minimum dla $x=\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}$ i t. d., bo dla tych wartości pochodna $\frac{d\sin x}{dx}=\cos x$ jest równą 0. Współrzędne punktów zwrotu są $\left[\pm\frac{\pi}{2}, \pm 1\right], \left[\pm\frac{3\pi}{2}. \pm 1\right], \ldots$ i t. d. (fig. 13).

3) Funkcya $\frac{1}{5}\cdot\frac{x^5-1}{x-1}$ osięga maximum lub minimum dla $x=-0{\cdot}6058$, bo dla tej wartości pochodna

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{5}\cdot\frac{x^5-1}{x-1}\right]=\frac{1}{5}(4x^3+3x^2+2x+1)$$

jest równą 0. Na obrazie funkcyi (fig. 9) widzimy, że jest minimum. Współrzędne punktu zwrotu są $[-0{\cdot}6058, 0{\cdot}1347]$.

4) Funkcya uwikłana y w równaniu

$$3(x-1)-4y+5.\, e^{\sqrt[5]{4(x-1)+3y}}=0$$

osięga maximum lub minimum dla $x=1{\cdot}138$, bo dla tej wartości stosunek różniczkowy $\frac{dy}{dx}=\frac{3[4(x-1)+3y]^2-100.\, e^{\sqrt[5]{4(x-1)+3y}}}{4[4(x-1)+3y]^2+75.\, e^{\sqrt[5]{4(x-1)+3y}}}$ jest równy zeru. Na figurze 17. widzimy, że jest minimum. Współrzędne punktu zwrotu są $[1{\cdot}138, 2.455]$.

5) Weźmy pod uwagę równania elipsy, hiperboli i paraboli: Mamy dla elipsy

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}=\pm\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

dla hiperboli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y} = \pm \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}};$$

dla paraboli

$$y^2 = 2px, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} = \pm \frac{p}{\sqrt{2px}}.$$

Widzimy z tego, że tylko w elipsie jest maximum lub minimum i to dla $x = 0$. Współrzędne punktów zwrotu są $[0, b]$, $[0, -b]$.

Ani hiperbola, ani parabola nie posiadają punktu rzeczywistego, w którymby było maximum lub minimum.

(Punkt rzeczywisty jest wtenczas, jeżeli jego współrzędne są rzeczywiste i skończone).

Wiedząc, kiedy funkcya osięga maximum lub minimum, możemy poznać obszary, w których rośnie lub maleje.

Wogóle twierdzenia odnoszące się do funkcyi wyprowadzamy dla tych obszarów, w których funkcye rosną lub maleją. Gdyby zachodziła potrzeba, musiałoby się szczegółowo rozważać, jak się funkcye zachowują wtenczas, gdy osięgają maximum lub minimum.

XXVI.

Pochodne i różniczki wyższych rzędów.

Z funkcyi pierwotnej $f(x)$ otrzymamy pochodną $f'(x)$ zapomocą działania

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Podobnie postępując otrzymamy

$$\frac{d}{dx} f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = f''(x),$$

$$\frac{d}{dx} f''(x) = f'''(x) \text{ i t. d.}$$

Pochodne $f''(x)$, $f'''(x)$... są pochodnemi 2go, 3go... rzędu. Oznacza się to także tak:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\frac{df(x)}{dx} = \frac{d^2f(x)}{dx^2},$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d^3f(x)}{dx^3} \text{ i t. d.}$$

mówi się zaś: $f''(x)$ jest drugą pochodną funkcyi $f(x)$,
$f'''(x)$ „ trzecią „ „ i t. d.

Analogicznie: pochodną $f'(x)$ nazywa się pierwszą pochodną funkcyi $f(x)$.

Różniczki $df(x)$, $d^2f(x)$, $d^3f(x)$... nazywają się różniczkami pierwszego, drugiego, trzeciego... rzędu.

Z równań poprzednich wynikają następujące:

$$df(x) = f'(x)\,dx,\; d^2f(x) = f''(x)\,dx^2,\; d^3f(x) = f'''(x)\,dx^3,\ldots \text{ i t. d.}$$

Przykłady:

1) Jeżeli $f(x) = x^5$, natenczas

$$\frac{dx^5}{dx} = 5x^4,\quad \frac{d^2x^5}{dx^2} = 20\,x^3,\quad \frac{d^3x^5}{dx^3} = 60\,x^2,\ldots$$

$$dx^5 = 5\,x^4\,dx,\quad d^2x^5 = 20\,x^3\,dx^2,\quad d^3x^5 = 60\,x^2\,dx^3,\ldots$$

2) Jeżeli $f(x) = \cos x$, natenczas

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x,\quad \frac{d^2\cos x}{dx^2} = -\cos x,\quad \frac{d^3\cos x}{dx^3} = \sin x,\ldots$$

$$d\cos x = -\sin x\,dx,\; d^2\cos x = -\cos x\,dx^2,\; d^3\cos x = \sin x\,dx^3,\ldots$$

3) Jeżeli $s = f(t)$, to znaczy, jeżeli droga jest funkcyą czasu (XXIII, 4), wtedy

$$\frac{ds}{dt} = f'(t) = v \text{ jest prędkością końcową, a}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = f''(t) = \frac{dv}{dt} = \gamma \text{ jest przyśpieszeniem (XXIII, 5).}$$

XXVII.

Przejście od funkcyi pochodnej do pierwotnej.

Z przykładów w XXIII. przytoczonych dowiadujemy się, jakie zadania możemy rozwiązać, umiejąc wyznaczyć pochodną, jak również jakiebyśmy potrafili rozwiązać, gdybyśmy mogli wyznaczyć funkcyę pierwotną, znając jej pochodną. To też umiejętność wyznaczania funkcyi pierwotnej, czyli przejście od funkcyi pochodnej do pierwotnej jest rzeczą wielkiej doniosłości i tem się obecnie zajmiemy.

Ze $f(x)$ jest funkcyą pierwotną pochodnej $f'(x)$, napiszmy na razie symbolicznie

$$f(x) = \mathit{pierw}\ f'(x).$$

Ponieważ jednak tak funkcya $f(x)$, jak $[f(x) + C]$, gdzie C jest ilością stałą (ze względu na x) ma tę samą pochodną $f'(x)$, przeto najogólniejszym kształtem funkcyi pierwotnej jest: $f(x) + C$, co się pisze

$$f(x) + C = \mathit{pierw}\ f'(x).$$

Z tego poznajemy, że takich funkcyi, które mają tę samą pochodną, jest nieskończenie wiele, wszystkie jednak różnią się między sobą tylko ilością stałą. Jaka jest ilość stała, zależy od rodzaju zagadnienia. Rzecz się ma podobnie, jak przy rozwiązaniu równania $x^2 - 4 = 0$, gdzie tak $+2$, jak -2 jest pierwiastkiem równania; który zaś należy wziąć, zależy od rodzaju zadania.

XXVIII.

Znaczenie ilości stałej C.

Znaczenie ilości stałej C pojmiemy najlepiej, gdy ją na paru przykładach wyznaczymy.

1) Przez punkt $[x_1\ y_1]$ przechodzi linia mająca tę własność, że stała kierunkowa stycznej w punkcie $[x_1\ y_1]$ do linii poprowadzonej jest funkcyą $f'(x)$. Jakie jest równanie linii?

Według (XXIII, 1) szukane równanie jest

$$y = \textit{pierw}\ f'(x) = f(x) + C.$$

Ilość stałą znajdziemy z warunku, że linia ma przechodzić przez punkt $[x_1, y_1]$. Będzie więc

$$y_1 = f(x_1) + C,$$

skąd wypada $C = y_1 - f(x_1)$; zatem

$$y = f(x) + y_1 - f(x_1)$$

jest szukanem równaniem.

Jak z tego widzimy, takich linii, w których styczne poprowadzone w punktach odpowiadających tej samej odciętej x tworzą z osią odciętych równe kąty, jest nieskończenie wiele. Ilość stałą C indywidualizuje jednę z tych linii.

2) Dane jest równanie linii: $y = f'(x)$, jaka jest powierzchnia F zamknięta między osią odciętych, rzędnemi odpowiadającemi odciętym a i x w pierwszej ćwiartce i daną linią, jeżeli wiemy, że dla $x = a$, powierzchnia ma wartość F_1 ?

Niech (fig. 27) BLC przedstawia linię $y = f'(x)$, niech będzie $OK = a$, $OA = x$, $AC = y$, natenczas według XXIII, 2) powierzchnia $BOACB = F$ da się wyrazić zapomocą równania

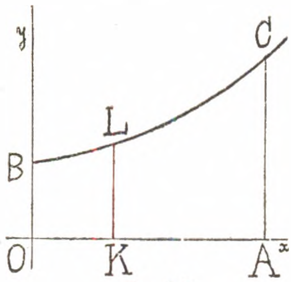

Fig. 27

$$F = \textit{pierw}\ f'(x) = f(x) + C.$$

Ponieważ dla $x = a$, $F = F_1$, *przeto*

$$F_1 = f(a) + C,$$ skąd wypada

$C = F_1 - f(a)$, a szukana powierzchnia jest: $F = f(x) + F_1 - f(a)$.

Najczęściej odciętą a tak się dobiera, aby było $F_1 = o$, wtenczas jest $C = -f(a)$, $F = f(x) - f(a)$.

Ilość stała zależy tu od tego, od jakiej odciętej a zaczynamy liczyć powierzchnię.

Gdybyśmy nie wiedzieli, jaką wartość ma powierzchnia dla pewnej odciętej, nie moglibyśmy ilości stałej C wyznaczyć i zadanie nie byłoby rozwiązane.

Podobnie się wyznacza ilość stałą C w innych zagadnieniach a wyznaczając ją, poznaje się jej znaczenie.

XXIX.
Pojęcie całki.

Inne przejście od funkcyi pochodnej do funkcyi pierwotnej zrozumiemy na następującym przykładzie.

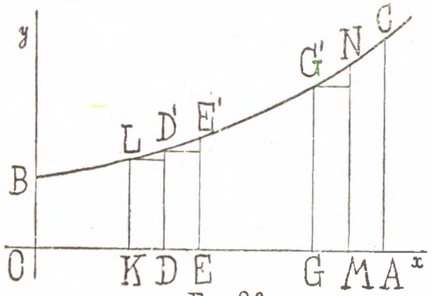

Fig. 28.

Funkcya $f(x) = F$ wyraża powierzchnię $OACB$, gdzie $AC = y = f'(x)$ (XXIII, 2). Rozchodzi się nam o obliczenie powierzchni $F_2 = KMNL$.

Oznaczywszy $OK = a$, $OM = b$, mamy

$$KMNL = OMNB - OKLB.$$

Lecz $OMNB = f(b)$, $OKLB = f(a)$, zatem wypada

$$F_2 = f(b) - f(a).$$

Tę powierzchnię możemy także w inny sposób wyrazić. Aby to uskutecznić, podzielmy ją na wązkie paski

$KDD'L$, $DEE'D'$,... $GMNG'$ o podstawie Δx.

Oznaczywszy $OD = x_1$, $OE = x_2$,... $OG = x_n$ i bacząc na to, że $KL = f'(a)$, $DD' = f'(x_1)$... $GG' = f'(x_n)$, otrzymamy powierzchnię $KMNL$ jako granicę, do której się zbliża suma pasków

$$f'(a)\Delta x + f'(x_1)\Delta x + f'(x_2)\Delta x + \cdots + f'(x_n)\Delta x = \sum_{x=a}^{x=x_n} f'(x)\Delta x$$

dla Δx nieskończenie malejącego.

Ponieważ x_n zbliża się do b, gdy Δx maleje do 0, wypada

$$F_2 = \lim_{\Delta x = 0} \sum_{x=a}^{x=b} f'(x)\Delta x = \sum_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx.$$

Używając na wyrażenie sumy symbolu $\int$ zamiast Σ, możemy napisać:

$$F_2 = \int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx, \text{ lub krótko } F_2 = \int_a^b f'(x)\,dx.$$

Widzimy z tego, że powierzchnia od $x = a$ do $x = b$ równa się sumie różniczek powierzchni od $x = a$ do $x = b$, co uogólniając pojmujemy, iż funkcya pierwotna w obszarze od $x = a$ do $x = b$ równa się sumie jej różniczek w tymże samym obszarze.

Wyrażenie $\int_a^b f'(x)\,dx$ nazywa się *całką określoną funkcyi* $f'(x)$ *w granicach od* $x = a$ *do* $x = b$.

Ponieważ F_2 można wyrazić w dwojaki sposób:

$$F_2 = f(b) - f(a), \text{ i } F_2 = \int_a^b f'(x)\,dx, \text{ przeto jest:}$$

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Jest także przyjęte znakowanie: $f(b) - f(a) = \Big/_a^b f(x)$. Wobec tego można napisać $\int_a^b f'(x)\,dx = \Big/_a^b f(x)$.

To równanie podaje nam związek zachodzący między całką określoną a funkcyą pierwotną, czyli uczy nas, w jaki sposób całkę określoną można wyrazić zapomocą funkcyi pierwotnej.

Jeżeli $b = x$, natenczas $\int_a^x f'(x)\,dx = f(x) - f(a)$; gdzie $f(a)$ jest ilością stałą i zależy od tego, od której wartości x zaczynamy dodawać różniczki.

Oznaczywszy $f(a) = -C$, możemy napisać:

$$\int_a^x f'(x)\,dx = f(x) + C.$$

Poznaliśmy na przykładach, że jeżeli $f'(x) = y$ jest równaniem linii, natenczas na wyrażenie powierzchni mamy dwa wzory:

pierw $f'(x)$ w obszarze od $x = a$ do x, i $\int_a^x f'(x)dx$, co uogólniając poznajemy, że dla pochodnej $f'(x)$ wypada funkcya pierwotna, która się da napisać:

$$\textit{pierw}\ f'(x) \text{ w obszarze od } x = a \text{ do } x,$$

$$\text{lub } \int_a^x f'(x)\,dx.$$

Z tego powodu dla jednolitości znakowania pisze się:

$$\textit{pierw}\ f'(x) = \int f'(x)\,dx = f(x) + C;$$

czyta się zaś: *funkcyą pierwotną pochodnej* $f'(x)$ jest *całka*:

$$\int f'(x)\,dx.$$

Symbol $\int$ oznaczający sumę nazywa się *całką*, a wzór

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C$$

wyraża, że funkcya pierwotna jest sumą różniczek funkcyi.

Symbol $\int$ tem się różni od symbolu *pierw*, że gdy ten ostatni nic nie określa, tylko wypowiada, iż trzeba znaleźć funkcyę pierwotną pochodnej $f'(x)$, symbol $\int$ wyraża, w jaki sposób funkcyi pierwotnej należy szukać; mianowicie określa, że trzeba znaleźć sumę różniczek. Z tego powodu symbol $\int$ wyraża działanie, które się nazywa *całkowaniem*, a rachunek, zapomocą którego wyznacza się funkcye pierwotne czyli całki funkcyi uważanych za pochodne, nazywa się *rachunkiem całkowym*.

Funkcyę pierwotną czyli całkę wystarczy wyznaczyć bez względu na ilość stałą C, albowiem tę ostatnią odpowiednio do rodzaju zagadnienia trzeba osobno wyznaczyć.

Przy całkach określonych obojętną jest rzeczą, czy wprowadzimy ilość stałą, czy nie, jak to poznamy w dalszym ciągu.

Jeżeli $f(x) = \int f'(x)\,dx$,

natenczas będziemy oznaczać

$$f(a) = \int_{x=a} f'(x)\,dx, \text{ lub krótko } f(a) = \int_a f'(x)\,dx,$$

podobnież

$$f(b) = \int_b f'(x)\, dx.$$

Możemy tedy napisać:

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a) = \int_b f'(x)\, dx - \int_a f'(x)\, dx.$$

Gdybyśmy zamiast równania $f(x) = \int f'(x)\, dx$ użyli równania $f(x) = \int f'(x)\, dx + C$, otrzymalibyśmy:

$$f(a) = \int_a f'(x)\, dx + C,\ f(b) = \int_b f'(x)\, dx + C,$$

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) = \int_b f'(x)\, dx - \int_a f'(x)\, dx,$$

t. j. to samo, co przedtem. Można to także w ten sposób wyrazić:

$$\int_a^b f(x) = \int_a^b [f(x) + C] \quad \text{(str. 64).}$$

XXX.

Wpływ działań d i $\int$.

Chcąc okazać wpływ, jaki wywierają działania d i $\int$ po sobie wykonane, weźmy pod uwagę równania:

$$df(x) = f'(x)\, dx \quad \text{(XVIII)},$$

$$f(x) = \int f'(x)\, dx \quad \text{(XXIX)}.$$

Jeżeli obie strony pierwszego równania zcałkujemy, otrzymamy, nie uwzględniając ilości stałej całkowania, równanie:

$$\int df(x) = \int f'(x)\, dx = f(x),$$

$$\text{czyli:} \int d\, f(x) = f(x).$$

Jeżeli obie strony drugiego równania zróżniczkujemy, będziemy mieć równanie:

$$df(x) = d\int f'(x)\,dx = f'(x)\,dx,$$

$$\text{czyli: } d\int f'(x)\,dx = f'(x)\,dx.$$

Widzimy z tego, że działania d i $\int$ kolejno po sobie wykonane znoszą się, bez względu na porządek, w jakim następują po sobie.

XXXI.

Całki niektórych funkcyi.

Uwzględniwszy wzory wymienione w XIX, otrzymamy następujące całki, z tą uwagą, że do każdej z nich należy pewna ilość stała C, której nie piszemy.

1) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+x}$ (XV, 1),

2) $\int a^x dx = \frac{lg_b e}{lg_b a} \cdot a^x = \frac{a^x}{ln a}$,

3) $\int \frac{dx}{x} = \frac{lg_b x}{lg_b e} = lnx$,

4) $\int \cos x\,dx = \sin x$,

5) $\int \sin x\,dx = -\cos x$,

6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x$,

7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x.$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\,\sin x = -arc\,\cos x$,

9) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tg\,x = -arc\,ctg\,x.$

We wzorach powyższych brakuje jeszcze całek niektórych funkcyi elementarnych. Chcąc je otrzymać musimy poznać niektóre ogólniejsze zasady całkowania, polegające przeważnie na zastosowaniu równań 14) — 18) w XIX. przytoczonych. Całkując bowiem obie strony tychże równań, otrzymamy:

10) Jeżeli a jest ilością stałą, natenczas

$$\int a\, f'(x)\, dx = a \int f'(x)\, dx,$$

albowiem $\int a f'(x)\, dx = a f(x) = a \int f'(x)\, dx.$

N. p. $\int 5\, x^3\, dx = 5 \int x^3\, dx = \frac{5}{4}\, x^4.$

11) $\int [f'(x)\, dx + \varphi'(x)\, dx] = \int f'(x)\, dx + \int \varphi'(x)\, dx,$ albowiem lewa strona równania równa się $f(x) + \varphi(x)$.

N. p. $\int (a\, x^2\, dx + b \cos x\, dx) = a \int x^2\, dx + b \int \cos x\, dx$

$$= \frac{a x^3}{3} + b \sin x.$$

12) $f(x).\, \varphi(x) = \int \varphi(x) f'(x)\, dx + \int f(x)\, \varphi'(x)\, dx.$

N. p. α) $x \ln x = \int \ln x\, dx + \int x\, d[\ln x] = \int \ln x\, dx + \int dx = \int \ln x\, dx + x$, skąd wypada: $\int \ln x\, dx = x \ln x - x = x(\ln x - 1).$

β) $x \arcsin x = \int \arcsin x\, dx + \int x\, d[\arcsin x]$

$$= \int \arcsin x\, dx + \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

γ) $x \operatorname{arc\,tg} x = \int \operatorname{arc\,tg} x\, dx + \int x\, d[\operatorname{arc\,tg} x]$

$$= \int \operatorname{arc\,tg} x\, dx + \int \frac{x\, dx}{1+x^2}.$$

δ) $x\sqrt{1-x^2} = \int \sqrt{1-x^2}\, dx + \int x\, d[\sqrt{1-x^2}]$

$$= \int \sqrt{1-x^2}\, dx - \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \sqrt{1-x^2}\, dx - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$+ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \sqrt{1-x^2} - \arcsin x + \int \frac{(1-x^2)\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$= 2 \int \sqrt{1-x^2}\, dx - \arcsin x$, skąd wypada:

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\, x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x.$$

13) $$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \int \frac{f'(x)\, dx}{\varphi(x)} - \int \frac{f(x)\, \varphi'(x)\, dx}{[\varphi(x)]^2}.$$

N. p. $$\frac{e^x}{x^n} = \int \frac{d[e^x]}{x^n} - \int \frac{e^x\, d[x^n]}{x^{2n}} = \int \frac{e^x\, dx}{x^n} - n \int \frac{e^x\, x^{n-1}\, dx}{x^{2n}}$$

$$= \int \frac{e^x\, dx}{x^n} - n \int \frac{e^x\, dx}{x^{n+1}},$$

skąd wypada wzór redukcyjny

$$\int \frac{e^x dx}{x^{n+1}} = \frac{1}{n} \int \frac{e^x dx}{x^n} - \frac{e^x}{n x^n}.$$

14) $f[\varphi(x)] = \int \frac{df(u)}{du} \varphi'(x)\, dx$, gdzie $u = \varphi(x)$, lub

$$f[\varphi(x)] = \int \frac{d}{d\varphi(x)} f[\varphi(x)] . \varphi'(x)\, dx.$$

N. p. $\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \int \frac{d}{du}\left[u^{\frac{1}{2}}\right] \cdot \frac{d}{dx}[1-x^2]\, dx$

$$= \int \tfrac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}} (-2x)\, dx = -\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ gdzie } u = 1 - x^2,$$

lub też

$$\sqrt{1-x^2} = \int \frac{d}{d[1-x^2]} [1-x^2]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}[1-x^2]\, dx$$

$$= \int \tfrac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x)\, dx = -\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

15) Czasem przy wyznaczaniu całki $\int F(x)\, dx$ korzystnie jest użyć podstawienia: $x = \psi(y)$. Wtenczas $dx = \psi'(y)\, dy$, a

$$\int F(x)\, dx = \int F[\psi(y)]\, \psi'(y)\, dy.$$

Przykłady. α) Chcąc wyznaczyć całkę $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, podstawiamy: $x = \sin y$. Wskutek tego wypada: $dx = \cos y\, dy$, $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 y} = \cos y$, i otrzymamy

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\sin y \cos y\, dy}{\cos y} = \int \sin y\, dy = -\cos y$$
$$= -\sqrt{1-x^2}.$$

β) Używszy tego samego podstawienia, co w poprzedzającym przykładzie, otrzymamy

$$\int \sqrt{1-x^2} \, .\, dx = \int \cos^2 y\, dy = \int \frac{1+\cos 2y}{2} dy = \frac{1}{2}\int dy$$
$$+ \frac{1}{4} \int \cos 2y\, d\,2y = \frac{y}{2} + \frac{\sin 2y}{4}.$$

Lecz $y = arc\ sin\ x$, $sin\ 2y = 2\ sin y\ cos\ y = 2\,x\sqrt{1 + x^2}$, zatem

$$\int\sqrt{1 - x^2}.dx = \frac{1}{2}\ arc\ sin\ x + \frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2}$$

zgodnie z wzorem w przykładzie 12) otrzymanym.

$$\gamma) \int\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int\frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}.$$

Podstawiając $x = ay$, $\frac{x}{a} = y$, będziemy mieć

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = arc\ sin\ y = arc\ sin\ \frac{x}{a}.$$

16) Czasem przy wyznaczaniu całki $\int F(x)\ dx$ korzystnie jest podstawić: $\varphi(x) = y$. Wtenczas $x = \psi(y)$, $dx = \psi'(y)\ dy$, a

$$\int F(x)\ dx = \int F[\psi(y)]\ \psi'(y)\cdot dy.$$

N. p. α) Chcąc wyznaczyć całkę $\int\frac{x\,dx}{1 + x^2}$, podstawiamy: $1 + x^2 = y$. Wtenczas $xdx = \frac{1}{2}dy$, a

$$\int\frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int\frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\ lny = \frac{1}{2}\ ln\ (1 + x^2).$$

W tym przypadku postępuje się prościej w ten sposób:

$$\varphi(x) = y,\quad \varphi'(x)\ dx = dy,\quad dx = \frac{dy}{\varphi'(x)},$$

$$\int F(x)\ dx = \int\frac{F(x)}{\varphi'(x)}dy = \int f(y)\ dy, \text{ gdzie } f(y) = \frac{F(x)}{\varphi'(x)}.$$

$$\beta) \quad \int tgx dx = \int\frac{sin\ x\ dx}{cos\ x}.$$

Podstawiwszy $cos\ x = y$, wypada: $-\ sin\ x\ dx = dy$,

$$\int tg\ x\ dx = -\int\frac{dy}{y} = -\ ln\ y = -\ ln\ cos\ x.$$

$$\gamma) \int ctg\ x\ dx = \int\frac{cos\ x\ dx}{sin\ x}.$$

Podstawiwszy $sin\ x = y$, wypada: $cos\ x\ dx = dy$,

$$\int ctg\ x\ dx = \int\frac{dy}{y} = ln\ y = ln\ sin\ x.$$

17) Wyznaczenie całek funkcyi cyklometrycznych:

α) Według przykł. 12), β)

$$\int arc\ sin\ x\ dx = x\ arc\ sin\ x - \int \frac{x\ dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Lecz według przykł. 15), α)

$$\int \frac{x\ dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}, \quad \text{zatem}$$

$$\int arc\ sin\ x\ dx = x\ arc\ sin\ x + \sqrt{1-x^2}.$$

β) Ponieważ $arc\ cos\ x = \frac{\pi}{2} - arc\ sin\ x$ (III), przeto

$$\int arc\ cos\ x\ dx = \int \left(\frac{\pi}{2} - arc\ sin\ x\right) dx$$

$$= \int \frac{\pi\ dx}{2} - \int arc\ sin\ dx = \frac{\pi x}{2} - arc\ sin\ x - \sqrt{1-x^2}$$

$$= x\left(\frac{\pi}{2} - arc\ sin\ x\right) - \sqrt{1-x^2} = x\ arc\ cos\ x - \sqrt{1-x^2}.$$

γ) Według przykł. 12), γ)

$$\int arc\ tg\ x\ dx = x\ arc\ tg\ x - \int \frac{x\ dx}{1+x^2}.$$

Lecz według przykł. 16), α)

$$\int \frac{x\ dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ ln\ (1+x^2), \quad \text{zatem}$$

$$\int arc\ tg\ x\ dx = x\ arc\ tg\ x - \frac{1}{2}\ ln\ (1+x^2).$$

δ) Ponieważ $arc\ ctg\ x = \frac{\pi}{2} - arc\ tg\ x$ (III), przeto

$$\int arc\ ctg\ x = \int \left(\frac{\pi}{2} - arc\ tg\ x\right) dx = \int \frac{\pi}{2} dx - \int arc\ tg\ x\ dx$$

$$= \frac{\pi x}{2} - x\ arc\ tg\ x + \frac{1}{2}\ ln\ (1+x^2)$$

$$= x\left(\frac{\pi}{2} - arc\ tg\ x\right) + \frac{1}{2}\ ln\ (1+x^2)$$

$$= x\ arc\ ctg\ x + \frac{1}{2}\ ln\ (1+x^2).$$

XXXII.

Znaczenie całki.

Z przykładów w XXIII przytoczonych można poznać, jakie jest znaczenie całki i jakie można rozwiązywać zagadnienia, gdy się umie zcałkować daną funkcyę. Bliżej to zrozumiemy przechodząc poszczególne przykłady.

1) Zadanie ogólne jest wyrażone i rozwiązane w XXVIII, 1). Dla objaśnienia dodamy kilka szczegółowych przykładów:

α) Jakie jest równanie linii przechodzącej przez punkt (1, 5), jeżeli $tg\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$?

$$y = \int \frac{2dx}{\sqrt[3]{x}} + C = 2\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx + C = \frac{2 . 3\, x^{\frac{2}{3}}}{2} + C = 3\sqrt[3]{x^2} + C.$$

Lecz $5 = 3 + C$, stąd: $C = 2$, zatem szukane równanie jest: $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2$.

β) Jakie jest równanie linii przechodzącej przez punkt (1, 3), jeżeli $tg\,\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{15\,x^2}{2\,y}$?

$$2y\,dy = 15\,x^2\,dx,$$

$$\int 2y\,dy = \int 15\,x^2\,dx,$$

$$y^2 = 5\,x^3 + C.$$

Lecz $9 = 5 + C$, stąd: $C = 4$, zatem szukane równanie jest: $y^2 = 5\,x^3 + 4$.

γ) Jakie jest równanie linii przechodzącej przez punkt (x_1, y_1), jeżeli $tg\,\tau = \frac{dy}{dx} = a$ (ilość stała)?

$$dy = a\,dx,$$

$$\int dy = a\int dx,$$

$$y = ax + C,$$

Lecz $y_1 = a\,x_1 + C$, zatem

$y - y_1 = a\,(x - x_1)$ (linia prosta).

δ) Jakie jest równanie linii przechodzącej przez punkt $(0, b)$, jeżeli $tg\tau = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$?

$$a^2y\,dy = -b^2x\,dx,$$
$$a^2\int y\,dy = -b^2\int x\,dx,$$
$$a^2y^2 = -b^2x^2 + C.$$

Lecz $a^2b^2 = C$, zatem szukane równanie jest

$$a^2y^2 = -b^2x^2 + a^2b^2 \text{ (elipsa).}$$

ε) Jakie jest równanie linii przechodzącej przez punkt $(a, 0)$, jeżeli $tg\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}$?

$$a^2y\,dy = b^2x\,dx, \quad a^2\int y\,dy = b^2\int x\,dx,$$
$$a^2y^2 = b^2x^2 + C,\ 0 = a^2b^2 + C,\ C = -a^2b^2.$$

Zatem $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ jest szukanem równaniem (hiperbola).

ζ) Jakie jest równanie linii przechodzącej przez punkt $(0, 0)$, jeżeli $tg\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$?

$$y\,dy = p\,dx,$$
$$\int y\,dy = p\int dx,$$
$$y^2 = 2px + C.$$

Lecz $C = 0$, zatem szukane równanie jest

$$y^2 = 2px \text{ (parabola).}$$

2) Zadanie ogólne jest wyrażone i rozwiązane w XXVIII; dodajemy kilka szczegółowych przykładów.

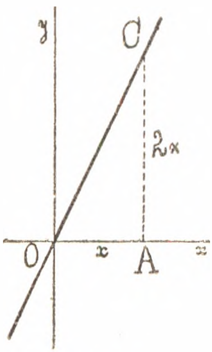

Fig. 29.

α) $y = 2x$. Fig. 29. $0A = x$, $AC = y = 2x$.

$$F = \int 2x\,dx + C = x^2 + C.$$

Dla $x = 0$, jest $F = 0$, zatem $C = 0$.

$$F = x^2.$$

β) $y = 2x + 1$. Fig. 30. $0A = x$, $AC = y = 2x + 1$.

$$F = \int (2x + 1)\,dx + C = x^2 + x + C.$$

Dla $x = 0$, jest $F = 0$, zatem $C = 0$.

$$F = x^2 + x.$$

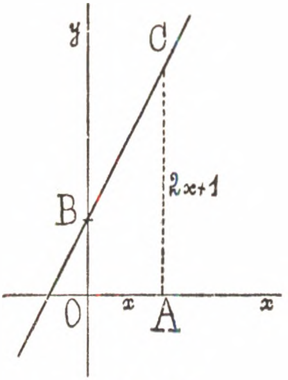

Fig. 30.

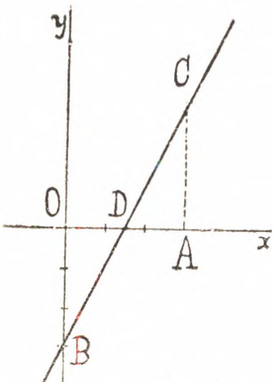

Fig. 31.

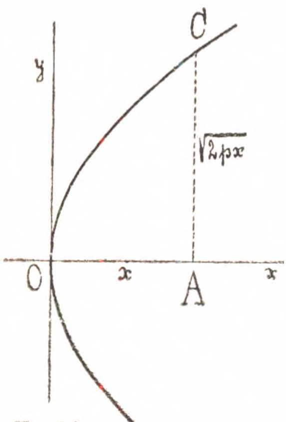

Fig. 32.

γ) $y = 2x - 3$. Fig. 31. $OA = x$,

$$OD = 1{\cdot}5,\ DA = x - 1{\cdot}5,$$

$$AC = y = 2x - 3.$$

$$F = \int (2x - 3)\,dx + C = x^2 - 3x + C.$$

Dla $x = 1{\cdot}5$, jest $F = 0$,

$0 = 2{\cdot}25 - 4{\cdot}5 + C$, stąd $C = 2{\cdot}25$.

$$F = x^2 - 3x + 2{\cdot}25.$$

δ) $y^2 = 2px$. Fig. 32. $OA = x$,

$$AC = y = \sqrt{2px}.$$

$$F = \int y\,dx + C = \int \sqrt{2px}\,.\,dx + C$$

$$= \sqrt{2p}\int x^{\frac{1}{2}}dx + C = \frac{\sqrt{2p}\,.\,2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{2px} + C.$$

Dla $x = 0$, jest $F = 0$, zatem $C = 0$.

$$F = \frac{2}{3}x\sqrt{2px} = \frac{2}{3}xy.$$

To równanie wyraża kwadraturę paraboli.

ε) Obliczyć powierzchnię elipsy, której równanie jest $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$F = \int y\,dx + C.$$

Ponieważ $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + C$, przeto

$$F = \int b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx + C$$

$$= ab\int\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,d\frac{x}{a} + C$$

$$= ab\left[\frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + \frac{1}{2}\,arc\,sin\frac{x}{a}\right] + C.$$

(XXXI, 15, β).

Lecz dla $x = 0$, jest $F = 0$, $C = 0$, zatem

$$F = ab\left[\frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + \frac{1}{2}\,arc\ sin\,\frac{x}{a}\right].$$

Gdy $x = a$, wypada na czwartą część powierzchni elipsy wyrażenie:

$$ab\,.\,\frac{1}{2}\,.\,arc\ sin\ 1 = ab\,.\,\frac{1}{2}\,.\,\frac{\pi}{2} = \frac{ab\pi}{4},$$

a stąd na powierzchnię całej elipsy F_e wzór:

$$F_e = ab\pi.$$

3) Funkcya $f(x)$ wyraża powierzchnię przekroju bryły prostopadłego do osi odciętych, w odległości x od początku współrzędnych. Obliczyć objętość bryły.

Według XXIII, 3)

$$\mathcal{V} = \int f(x)\,dx + C.$$

Chcąc obliczyć ilość stałą C, musimy znać objętość bryły dla pewnej odciętej. Zwykle bierze się taką odciętą $x = a$, dla której objętość $\mathcal{V} = O$. Mamy wtenczas

$$0 = \int\limits_a f(x)\,dx + C, \quad C = -\int\limits_a f(x)\,dx,$$

wskutek czego wypada

$$\mathcal{V} = \int f(x)\,dx - \int\limits_a f(x)\,dx.$$

W kształcie całki określonej równanie

$$\mathcal{V} = \int\limits_a^x f(x)\,dx$$

przedstawia to samo, co poprzedni wzór.

Przykłady: α) Obliczyć objętość ostrosłupa *a)* całego $\mathcal{V}$, *b)* ściętego $\mathcal{V}_1$.

Niech podstawa F ostrosłupa spoczywa na płaszczyźnie YOZ, oś odciętych niech przechodzi przez wierzchołek ostrosłupa a więc wzdłuż jego wysokości. Podzieliwszy ostrosłup płaszczyznami równoległemi do podstawy na warstwy o grubości dx, otrzymamy

$$\mathcal{V} = \int_0^H b\,dx, \qquad \mathcal{V}_1 = \int_0^h b\,dx,$$

gdzie b oznacza powierzchnię przekroju w odległości x od podstawy, H wysokość całego, a h wysokość ściętego ostrosłupa.

Lecz $b : F = (H - x)^2 : H^2$, skąd wypada

$$b = \frac{F}{H^2}(H - x)^2, \text{ zatem}$$

$$\int b\,dx = \frac{F}{H^2}\int (H - x)^2\,dx = \frac{F}{H^2}\int (H^2 - 2Hx + x^2)\,dx$$

$$= \frac{F}{H^2}\left(H^2x - Hx^2 + \frac{x^3}{3}\right).$$

Uwzględniwszy to, otrzymamy

$$\mathcal{V} = \frac{F}{H^2}\left(H^3 - H^3 + \frac{H^3}{3}\right) = \frac{FH}{3},$$

$$\mathcal{V}_1 = \frac{F}{H^2}\left(H^2h - Hh^2 + \frac{h^3}{3}\right) = Fh\left(1 - \frac{h}{H} + \frac{h^2}{3H^2}\right).$$

Gdy f oznacza podstawę mniejszą ostrosłupa ściętego, mamy

$$f : F = (H - h)^2 : H^2,$$

$$\sqrt{f} : \sqrt{F} = (H - h) : H = 1 - \frac{h}{H},$$

$$\frac{h}{H} = 1 - \sqrt{\frac{f}{F}},$$

co uwzględniwszy, otrzymamy

$$\mathcal{V}_1 = Fh\left[\sqrt{\frac{f}{F}} + \frac{1}{3}\left(1 - \sqrt{\frac{f}{F}}\right)^2\right]$$

$$= h\left[\sqrt{Ff} + \frac{F}{3}\left(1 - 2\sqrt{\frac{f}{F}} + \frac{f}{F}\right)\right]$$

$$= h\left[\sqrt{Ff} + \frac{F}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{Ff} + \frac{f}{3}\right]$$

$$= \frac{h}{3}(F + \sqrt{Ff} + f).$$

Podobnie można postąpić przy obliczeniu objętości stożka prostego.

β) Linia $y = F(x)$ obraca się około osi odciętych. Znaleźć objętość $\mathcal{V}$ powstałej bryły obrotowej od $x = a$ do x.

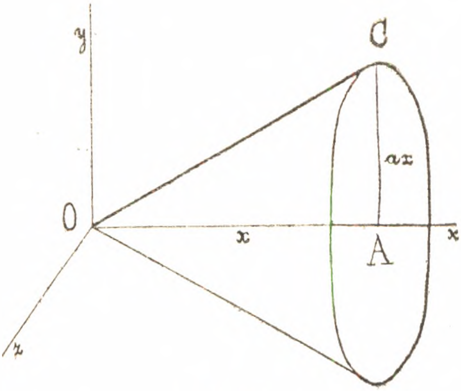

Fig. 33

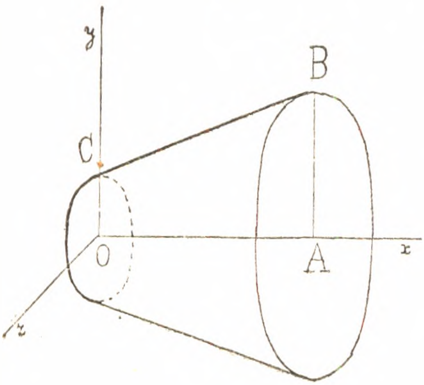

Fig. 34.

Powierzchnia przekroju w odległości x od początku współrzędnych jest $y^2\pi = [F(x)]^2\pi$, zatem

$$\mathcal{V} = \pi\int_a^x [F(x)]^2\,dx.$$

Przykłady szczegółowe.

$\alpha)$ Obliczyć objętość stożka obrotowego, jeżeli $y = ax$, $OA = x$, $AC = y = ax$ (fig. 33).

$$\mathcal{V} = \int_0^x y^2\pi\,dx = \int_0^x a^2\pi x^2\,dx$$

$$= \frac{a^2\pi x^3}{3} = \frac{a^2x^2\pi x}{3}.$$

$\beta)$ Obliczyć objętość stożka obrotowego ściętego, jeżeli $y = ax + b$, $OA = x$, $OC = b$, $AB = y = ax + b$ (fig. 34).

$$\mathcal{V} = \pi\int_0^x y^2\,dx = \pi\int_0^x (a^2x^2 + 2abx + b^2)\,dx$$

$$= \pi\left(\frac{a^2x^3}{3} + abx^2 + b^2x\right) = \frac{\pi x}{3}(a^2x^2 + 3abx + 3b^2)$$

$$= \frac{\pi x}{3}[(ax + b)^2 + (ax + b)b + b^2].$$

$\gamma)$ Koło, którego równanie wierzchołkowe jest $y^2 = 2rx - x^2$, obraca się około osi odciętych. Obliczyć objętość kloca sferycznego v, odcinka kuli v_1 objętość kuli $\mathcal{V}$.

Jeżeli $OA = a$, $OB = b$, $OC = r$ (fig. 35), natenczas

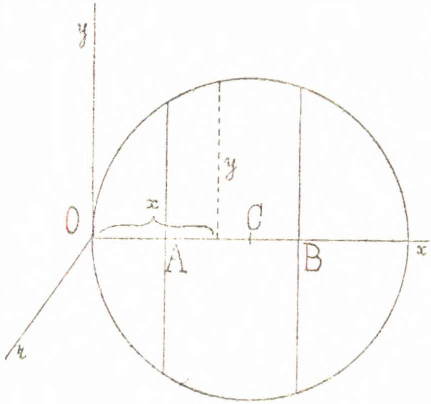

Fig 35.

$$v = \pi \int_a^b y^2 dx$$

$$= \pi \int_a^b (2rx - x^2) dx$$

$$= \pi \Big/_a^b \left(rx^2 - \frac{x^3}{3}\right)$$

$$= \pi \left(b^2 r - \frac{b^3}{3} - a^2 r + \frac{a^3}{3}\right)$$

$$= \pi \left[r(b^2 - a)^2 - \tfrac{1}{3}(b^3 - a^3)\right]$$

$$= (b - a)\pi \left[(a + b)r - \tfrac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)\right].$$

Gdy $a = 0$, mamy

$$v_1 = b\pi\left(br - \frac{b^2}{3}\right) = b^2\pi\left(r - \frac{b}{3}\right);$$

gdy $a = 0$, $b = 2r$, wypada

$$\mathcal{V} = 4r^2\pi\left(r - \frac{2r}{3}\right) = 4r^2\pi \cdot \frac{r}{3} = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

$\delta)$ Elipsa, której równanie jest: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, obraca się około osi odciętych; obliczyć objętość powstałej bryły (elipsoidu obrotowego).

$$\frac{v}{2} = \pi \int_0^a y^2 dx = b^2\pi \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = b^2\pi \Big/_0^a \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)$$

$$= b^2\pi\left(a - \frac{a}{3}\right) = \frac{2ab^2\pi}{3}; \text{ zatem}$$

$$v = \frac{4ab^2\pi}{3}.$$

4) Funkcya $f(t)$ wyraża prędkość końcową punktu po czasie t; jaka jest droga s przebyta w czasie t?

Według XXIII, 4)

$$v = \frac{ds}{dt} = f(t), \text{ stąd}$$

$$s = \int f(t)\,dt + C.$$

Ponieważ dla $t = 0$, jest $s = 0$, zatem: $C = -\int\limits_0 f(t)\,dt$, a

$$s = \int f(t)\,dt - \int\limits_0 f(t)\,dt.$$

Przykłady: α) Przy ruchu jednostajnym

$f(t) = c$ (jest ilością stałą).

$$s = \int c\,dt + C = ct + C.$$

Lecz dla $t = 0$, jest $s = 0$, $C = 0$, zatem

$$s = ct.$$

β) Przy ruchu jednostajnie zmiennym

$f(t) = c + \gamma t$, gdzie γ oznacza przyśpieszenie.

$$s = \int (c + \gamma t)\,dt + C = ct + \gamma\frac{t^2}{2} + C.$$

Lecz dla $t = 0$, jest $s = 0$, $C = 0$, zatem

$$s = ct + \tfrac{1}{2}\gamma t^2.$$

Gdy $c = 0$, wypada: $s = \frac{1}{2}\gamma t^2$.

5) Funkcya $f(t)$ wyraża przyśpieszenie ruchu po czasie t, jaka jest prędkość końcowa v po tymże czasie?

Według XXIII, 5)

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = f(t), \text{ zatem}$$

$$v = \int f(t)\,dt + C.$$

Jeżeli dla $t = t_0$ jest $v = v_0$, natenczas

$$C = v_0 - \int\limits_{t_0} f(t)\,dt.$$

N. p. przy ruchu jednostajnie przyśpieszonym γ jest ilością stałą. Mamy wtenczas

$$v = \int \gamma\,dt + C = \gamma t + C.$$

Jeżeli dla $t = 0$, jest $v = c$, natenczas: $C = c$, a

$$v = c + \gamma t;$$

gdy $c = 0$, wypada: $v = \gamma t$.

6) Na punkt materyalny B będący w odległości $AB = r$ (fig. 25) od punktu A działa siła $f(r)$ skierowana do punktu A. Jaką pracę wykona ta siła, jeżeli przesunie punkt materyalny B z odległości r_0 do r, i jeżeli $r_0 > r$?

Według XXIII, 6)

$$\frac{dL}{dr} = f(r), \text{ zatem}$$

$$L = \int_{r_0}^{r} f(r)\, dr.$$

Jeżeli w punkcie A znajduje się masa m, w punkcie B masa m_1, natenczas te punkta przyciągają się według prawa Newtona z siłą: $f(r) = -\frac{m\, m_1}{r^2}$. Wówczas

$$L = \int_{r_0}^{r} -\frac{m\, m_1}{r^2} dr = -m\, m_1 \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2} = m\, m_1 \Big/_{r_0}^{r} \frac{1}{r}$$

$$= \frac{m\, m_1}{r} - \frac{m\, m_1}{r_0} = m_1 (V - V_0),$$

gdzie oznaczyliśmy: $V = \frac{m}{r}$, $V_0 = \frac{m}{r_0}$. Gdy $r_0 = \infty$, wypada: $L = m_1 V$.

Wyrażenie: $V = \frac{m}{r}$ nazywa się potencyałem i wyraża pracę, jaką wykonuje masa m, gdy jednostkę masy z odległości nieskończenie wielkiej przeniesie do odległości r. Równanie $L = m_1 (V - V_0)$ wyraża, że praca w tym przypadku jest proporcyonalna do różnicy potencyałów; gdy $m_1 = 1$, praca równa się różnicy potencyałów.

7) Funkcya $f(t)$ wyraża ciepło właściwe ciała; jakiej potrzeba ilości ciepła Q, aby jednostkę masy tego ciała ogrzać od temperatury t^0_0 do t^0, jeżeli $t > t_0$?

Według XXIII, 7)

$$c = \frac{dQ}{dt} = f(t), \text{ zatem}$$

$$Q = \int_{t_0}^{t} f(t)\, dt.$$

N. p. Jeżeli $c = c_0 + at + bt^2$, natenczas

$$Q = \int_{t_0}^{t} (c_0 + at + bt^2)\, dt = \int_{t_0}^{t} \left[c_0 t + \frac{at^2}{2} + \frac{bt^3}{3}\right]$$

$$= c_0 (t - t_0) + \frac{a}{2}(t^2 - t_0^2) + \frac{b}{3}(t^3 - t_0^3)$$

$$= (t - t_0)\left[c_0 + \frac{a}{2}(t + t_0) + \frac{b}{3}(t^2 + t_0 t + t_0^2)\right].$$

XXXIII.

Zastosowanie rachunku całkowego.

Inne zastosowanie rachunku całkowego poznamy przy rozwiązywaniu następujących zagadnień:

1) Dane jest równanie linii: $y = f(x)$, obliczyć długość łuku od $x = a$ do $x = b$.

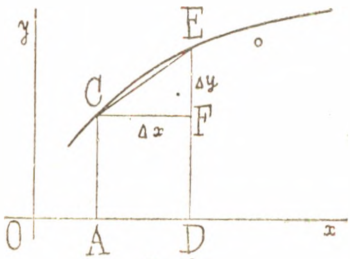

Fig. 36.

Według fig. 36.

$$\overset{\frown}{CE}{}^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

$$= \Delta x^2 \left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right],$$

$$CE = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Gdy Δx maleje, punkt E zbliża się do punktu C, a cięciwa CE coraz bardziej zbliża się do łuku $\overset{\frown}{CE}$. Dla Δx nieskończenie małego CE przechodzi w nieskończenie mały element łuku ds, a Δy w dy. Mamy więc

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Ponieważ szukany łuk s jest sumą elementów łuku, przeto

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, . \, dx.$$

Przykład: Obliczyć ćwierć obwodu koła wyrażonego równaniem: $x^2 + y^2 = r^2$.

Po zróżniczkowaniu ostatniego równania otrzymamy

$$2x\,dx + 2y\,dy = 0; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2 + y^2}{y^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}, \quad \text{zatem}$$

$$s = \int_0^r \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r \int_0^r \frac{d\frac{x}{r}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} = r \Big|_0^r arc\ sin\ \frac{x}{r} = \frac{r\pi}{2}.$$

Cały obwód koła jest $4s = 2r\pi$.

2) Linia $y = f(x)$ obraca się około osi odciętych; obliczyć powstałą powierzchnię obrotową P od $x = a$ do $x = b$.

Element łuku wskutek obrotu opisze pasek kształtu obręczy o długości $2y\pi$ a o szerokości ds. Powierzchnia takiego paska jest $2y\pi\,ds = 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$. Ponieważ żądana powierzchnia obrotowa P jest sumą takich pasków, przeto

$$P = 2\pi \int_a^b y\,ds = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, . \, dx.$$

Przykłady: α) Obliczyć powierzchnię boczną stożka obrotowego od $x = 0$ do x, jeżeli równanie tworzącej jest $y = ax$ (fig. 33).

Rozwiązanie: $dy = a\,dx$, $\frac{dy}{dx} = a$, $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + a^2$,

$$P = 2\pi \int_0^x a\,x \sqrt{1 + a^2} \, . \, dx = a\pi x^2 \sqrt{1 + a^2}.$$

β) Obliczyć powierzchnię boczną stożka obrotowego ściętego od $x = 0$ do x, jeżeli równanie tworzącej jest $y = ax + b$ (fig 34).

Rozw: $\frac{dy}{dx} = a, \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + a^2,$

$$P = 2\pi \int_0^x (ax + b) \sqrt{1 + a^2} \,.\, dx = \pi x (ax + 2b) \sqrt{1 + a^2}\,.$$

γ) Obliczyć powierzchnię pasa sferycznego p, czaszy sferycznej p_1 i powierzchnię kuli P powstałej przez obrót koła $y^2 = 2rx - x^2$ około osi odciętych (fig. 35).

Rozw: $2y\,dy = 2r\,dx - 2x\,dx, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{r - x}{y},$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y^2 + (r - x)^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}, \quad ds = \frac{r\,dx}{y}, \quad y\,ds = r\,dx,$$

$$p = 2\pi \int_a^b y\,ds = 2\pi r \int_a^b dx = 2\pi r \Big/_a^b x = 2\pi r (b - a).$$

Gdy $a = 0$, mamy powierzchnię czaszy

$$p_1 = 2\pi br,$$

gdy $a = 0$, $b = 2r$, mamy powierzchnię kuli

$$P = 4\pi r^2.$$

3) Wyprowadzić związek zachodzący między pracą a energią kinetyczną.

Jeżeli punkt materyalny o masie m zrobił drogę $s - s_0$, natenczas siła nań działająca wykonała pracę

$$L = \int_{s_0}^{s} m\gamma\,ds = \int_{s_0}^{s} m \frac{d^2 s}{dt^2}\,ds = m \int_{s_0}^{s} \frac{d^2 s}{dt^2}\,ds, \quad \text{(XXVI, 3).}$$

$$\text{Lecz } d\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\,\frac{d^2 s}{dt^2}\,\frac{ds}{dt}\,dt = 2\,\frac{d^2 s}{dt^2}\,ds, \quad \text{zatem}$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2}\,ds = \frac{1}{2}\,d\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

$$\int_{s_0}^{s} m\,\frac{d^2 s}{dt^2}\,ds = \int_{s_0}^{s} \frac{m}{2}\,d\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2} \Big/_{s_0}^{s} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Ponieważ $\frac{ds}{dt}$ wyraża prędkość v, przeto jeżeli v_0 wyraża prędkość nabytą po przebyciu drogi s_0 a v prędkość po przebyciu drogi s, można napisać

$$\frac{m}{2}\int_{s_0}^{s}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2}\int_{v_0}^{v} v^2 = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Mamy przeto

$$L = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

$\frac{mv^2}{2}$ nazywa się energią kinetyczną masy m. Ostatnie równanie wyraża, że zmiana energii kinetycznej masy m na drodze $s - s_0$ równa się pracy wykonanej na tejże drodze.

4) Wyprowadzić prawo ruchu punktu materyalnego, wychylonego z pierwotnego położenia, jeżeli siła usiłująca go doprowadzić do pierwotnego położenia jest proporcyonalna do wychylenia.

Fig. 37.

Jeżeli $OA = a$ (fig. 37) oznacza *największe wychylenie (amplitudę)*, $OM = x$ *wychylenie* liczone od punktu O do M, natenczas siła p skierowana od punktu M do O usiłująca punkt materyalny sprowadzić do punktu O da się wyrazić zapomocą równania: $p = - kx$, gdzie k jest liczbą stałą. Znak — wyraża, że siła działa w przeciwnym kierunku a nie w tym, w którym liczymy x. Jeżeli m oznacza masę punktu materyalnego, natenczas można napisać

$$p = m\gamma = m\frac{d^2x}{dt^2} = - kx.$$

Z tego równania wynika następujące

$$m\frac{d^2x}{dt^2}dx = - kx\,dx.$$

W poprzedzającym przykładzie okazaliśmy, że

$$\frac{d^2x}{dt^2}dx = \frac{1}{2}d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right],$$

co wstawiwszy do przedostatniego równania otrzymamy

$$\frac{m}{2}d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = - kx\,dx.$$

Po wykonaniu całkowania na obu stronach równania wypada

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -kx^2 + C.$$

Zważywszy, że $\frac{dx}{dt} = v$ i że dla $x = a$, jest prędkość końcowa $v = 0$, otrzymamy: $C = ka^2$,

$$mv^2 = k(a^2 - x^2), \quad v = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{a^2-x^2}, \quad \text{czyli}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Z tego równania wypada

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,dt,$$

a po zcałkowaniu obu stron wyniknie

$$arc\ sin\ \frac{x}{a} = t\sqrt{\frac{k}{m}} + C.$$

Lecz dla $t = 0$, jest $x = 0$, zatem i $C = 0$.

Mamy więc

$$arc\ sin\ \frac{x}{a} = t\sqrt{\frac{k}{m}},$$

$$\frac{x}{a} = sin\left[t\sqrt{\frac{k}{m}} + 2n\pi\right],$$

$$x = a\ sin\sqrt{\frac{k}{m}}\left(t + 2n\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right),$$

gdzie n wyraża liczbę całkowitą dodatnią.

Ostatnie równanie okazuje. że ruch jest *okresowy,* gdyż w czasach t, $t + 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, $t + 4\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\ldots$ stan ruchu uważanego punktu jest jednakowy.

Taki ruch nazywa się *drgający prosty* czyli *harmoniczny.* Czas $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = T$ nazywa się *okresem* lub *czasem drgania.*

Ten rodzaj ruchu występuje także przy wahadle matematycznem wychylonem o mały kąt (mniejszy od 2^0). Albowiem jeżeli l oznacza długość wahadła, g przyśpieszenie siły ciężkości, natenczas siła usiłująca sprowadzić wahadło do pierwotnego położenia jest: $-\frac{mgx}{l}$. W tym przypadku siła jest proporcyonalna do wychylenia x, a $k = \frac{mg}{l}$.

Z ostatniego równania wyniką: $\frac{m}{k} = \frac{l}{g}$, co podstawiwszy do równania $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, otrzymamy na czas pełnego wahnienia wyrażenie: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, a na *czas wahnienia* wzór

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

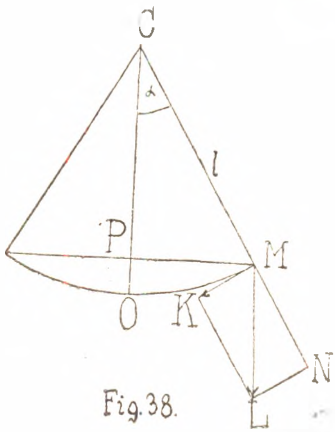

Fig. 38.

Objaśnienie.

Jeżeli fig. 38. przedstawia wahadło matematyczne o długości $OC = CM = l$, wychylone o $\sphericalangle \alpha$. natenczas widzimy na figurze, że składowa KM ciężaru wahadła usiłuje sprowadzić punkt M do O.

Lecz $KM : PM = ML : CM$, czyli $KM : PM = mg : l$, skąd wypada

$$KM = \frac{PM \cdot mg}{l}.$$

Gdy $\sphericalangle \alpha < 2^0$, można przyjąć z popełnieniem małego błędu, że $PM = OM = x$, wskutek czego staje się $KM = \frac{mgx}{l}$ co do bezwzględnej wartości. Uwzględniając kierunek działania tej siły do kierunku liczenia wychylenia x, otrzymamy $-\frac{mgx}{l}$ na wyrażenie siły usiłującej doprowadzić wahadło do pierwotnego położenia.

5) Wyznaczenie położenia środka ciężkości ciała.

Jeżeli $p_1, p_2, p_3 \ldots$ oznaczają ciężary punktów materyalnych układu stałego, $a_1, a_2, a_3 \ldots$ ich odległości od pewnej płaszczyzny, $P = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots$ ciężar całego układu, a odległość jego *środka ciężkości* od tejże płaszczyzny, natenczas jest równanie

$$aP = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + \ldots = \Sigma a p.$$

Zapomocą tego równania można wyznaczyć położenie środka ciężkości ciała, bo

$$a = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + \ldots}{P} = \frac{\Sigma a p}{P}.$$

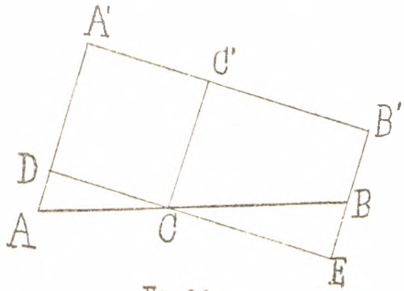

Fig. 39.

Objaśnienie.

Jeżeli w punktach A, B (fig. 39) działają siły równoległe q_1, q_2, natenczas można je zastąpić wypadkową $(q_1 + q_2)$ przyłożoną w punkcie C, byleby był spełniony warunek $AC \, . \, q_1 = BC \, . \, q_2$.

Punkta A, B, C należą do układu stałego i leżą na linii prostej. Punkt C nazywa się środkiem sił równoległych q_1, q_2.

Niech $d_1 = AA'$, $d_2 = BB'$, $b = CC'$ oznaczają odległości punktów A, B, C od płaszczyzny, której rzutem jest $A'B'$. Można okazać, że

$$d_1 q_1 + d_2 q_2 = b(q_1 + q_2).$$

Albowiem jest

$$\begin{aligned} d_1 q_1 + d_2 q_2 &= AA' \, . \, q_1 + BB' \, . \, q_2 \\ &= (A'D + AD) q_1 + (B'E - BE) q_2 \\ &= (b + AD) q_1 + (b - BE) q_2 \\ &= b(q_1 + q_2) + AD \, . \, q_1 - BE \, . \, q_2. \end{aligned}$$

Lecz $AD : BE = AC : BC$, $AD = \dfrac{AC \, . \, BE}{BC}$,

$$AD \, . \, q_1 = \frac{AC \, . \, q_1 \, . \, BE}{BC} = \frac{BC \, . \, q_2 \, . \, BE}{BC} = BE \, . \, q_2,$$

$$AD \, . \, q_1 - BE \, . \, q_2 = 0, \text{ zatem}$$

$$d_1 q_1 + d_2 q_2 = b(q_1 + q_2).$$

Gdy przyjmiemy siłę trzecią q_3, równoległą do poprzednich, przyłożoną w odległości d_3 od płaszczyzny, natenczas według poprzedniego

$$b(q_1 + q_2) + d_3 q_3 = b_1 (q_1 + q_2 + q_3),$$

gdzie b_1 oznacza odległość środka sił równoległych $(q_1 + q_2)$ i q_3 od płaszczyzny.

Wstawiwszy do ostatniego równania wartość na $b(q_1 + q_2)$, otrzymamy

$$d_1 q_1 + d_2 q_2 + d_3 q_3 = b_1 (q_1 + q_2 + q_3).$$

W ten sposób to twierdzenie można rozszerzyć na dowolną liczbę sił równoległych działających na układ stały punktów.

Przykłady. α) Obliczyć odległość środka ciężkości powierzchni f figury płaskiej, jednorodnej od pewnej płaszczyzny.

Jeżeli μ wyraża ciężar jednostki powierzchni, df element powierzchni, x jego odległość od płaszczyzny, a odległość środka ciężkości od tejże płaszczyzny, natenczas

$$a = \frac{\int x\mu df}{\mu f} = \frac{1}{f}\int x\, df,$$

gdzie całkowanie odnosi się do wszystkich elementów figury.

β) Obliczyć odległość środka ciężkości ostrosłupa jednorodnego od podstawy.

Niech H oznacza wysokość, F powierzchnię podstawy, μ ciężar właściwy ostrosłupa, natenczas $\frac{\mu F H}{3}$ wyraża jego ciężar. Podzielimy go na warstwy równoległe do podstawy o grubości dx. Natenczas ciężar warstwy w odległości x od podstawy i o przekroju f jest $\mu f\, dx$.

Lecz $f : F = (H - x)^2 : H^2$, stąd $f = \frac{F(H-x)^2}{H^2} = F\left(1 - \frac{x}{H}\right)^2$, $\mu f\, dx = \mu F\left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 dx$, zatem odległość środka ciężkości wynosi

$$a = \int_0^H \frac{\mu F\left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 x\, dx}{\frac{F H \mu}{3}} = \frac{3}{H}\int_0^H \left(1 - \frac{2x}{H} + \frac{x^2}{H^2}\right) x\, dx$$

$$= \frac{3}{H}\Big/_0^H \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3H} + \frac{x^4}{4H^2}\right] =$$

$$= \frac{3}{H}\left(\frac{H^2}{2} - \frac{2\,H^3}{3\,H} + \frac{H^4}{4\,H^2}\right) = 3\,H\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{H}{4}.$$

6) Obliczenie momentu bezwładności.

Jeżeli m oznacza masę punktu materyalnego, r jego odległość od osi obrotu, natenczas mr^2 nazywa się *momentem bezwładności* tegoż punktu względem osi obrotu.

Suma momentów bezwładności poszczególnych punktów materyalnych układu stałego nazywa się momentem bezwładności układu względem osi obrotu i oznacza się głoską T.

Jest więc: $T = \Sigma\, mr^2$.

Przykłady. α) Obliczyć T odcinka materyalnego (pręta) jednorodnego o długości l, jeżeli oś obrotu znajduje się w jednym z jego punktów końcowych i jest doń prostopadła.

Jeżeli μ oznacza masę jednostki długości pręta, natenczas $\mu\,dx$ jest masą elementu dx będącego w odległości x od osi obrotu, a $x^2\mu\,dx$ jego momentem bezwładności. Wtedy

$$T = \int_0^l \mu\, x^2\, dx = \frac{\mu\, l^3}{3}.$$

Oznaczywszy masę pręta przez M, mamy: $M = \mu\, l$, a

$$T = \frac{M}{3}\,.\,l^2.$$

Gdy oś obrotu jest w środku pręta, natenczas

$$T_0 = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \mu x^2 dx = \frac{2\mu\, l^3}{8} = \frac{M}{12}\, l^2 = \frac{T}{4}.$$

β) Obliczyć T linii kołowej materyalnej (pierścienia) jednorodnej, jeżeli oś obrotu jest prostopadła do płaszczyzny koła i jeżeli przechodzi przez jego środek.

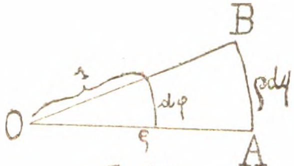

Fig. 40.

Jeżeli (fig. 40) ϱ oznacza promień koła, natenczas łuk koła odpowiadającego różniczce kąta $d\varphi$ jest $\varrho d\varphi$ (stosownie do proporcyi: $\widehat{AB} : d\varphi = \varrho : 1$), element masy jest $\mu\,\varrho\, d\varphi$, a

$$T = \int_0^{2\pi} \varrho^2 \cdot \mu \varrho \, d\varphi = \mu \varrho^3 \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \varrho^3 \mu = M \varrho^2,$$

gdzie $M = 2\pi \varrho \mu$ oznacza masę pierścienia (μ ma takie samo znaczenie, jak w poprzednim przykładzie).

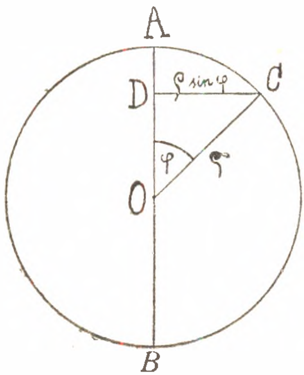

Fig. 41.

Gdy osią obrotu jest średnica AB (fig. 41.) i gdy φ oznacza kąt, jaki tworzy promień koła poprowadzony do uważanego elementu C masy $\mu \varrho d\varphi$ z osią obrotu, natenczas odległość tegoż elementu masy od osi obrotu jest $\varrho \sin\varphi$, a

$$T_0 = 2 \int_0^{\pi} \varrho^2 \sin^2\varphi \, \mu \varrho \, d\varphi$$

$$= 2\pi \varrho^3 \int_0^{\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi = 2\pi \varrho^3 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi$$

$$= \mu \varrho^3 \int_0^{\pi} \left(d\varphi - \frac{\cos 2\varphi d[2\varphi]}{2} \right) = \mu \varrho^3 \Big/_0^{\pi} \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) = \mu \varrho^3 \pi$$

$$= \frac{M}{2} \varrho^2 = \frac{T}{2}.$$

γ) Obliczyć T koła materyalnego (krążka) jednorodnego, jeżeli oś obrotu znajduje się w środku koła i jest prostopadła do jego płaszczyzny.

Niech μ oznacza masę jednostki powierzchni. Podzieliwszy krążek na pierścienie o szerokości $d\varrho$, możemy wyrazić masę pierścienia o promieniu ϱ przez $2\pi \varrho d\varrho \mu$, a jego moment bezwładności według poprzedzajacego przykładu będzie

$$2\pi \varphi d\varrho \mu \varrho^2, \quad \text{zaś}$$

$$T = \int_0^{\varrho} 2\pi\varrho\, d\varrho\, \mu\, \varrho^2 = 2\pi\mu \int_0^{\varrho} \varrho^3 d\varrho = \frac{\pi\mu\varrho^4}{2} = \frac{M\varrho^2}{2},$$

gdzie M oznacza masę krążka.

Jeżeli osią obrotu jest średnica, natenczas

$$T_0 = \frac{T}{2}.$$

δ) Obliczyć T dla powłoki (skorupy) kulistej jednorodnej, nieskończenie cienkiej, obracającej się około średnicy.

Powłokę kulistą można podzielić na pierścienie kołowe płaszczyznami prostopadłemi do średnicy. Jeżeli μ ma takie znaczenie, jak w poprzedzającym przykładzie, natenczas długość pierścienia o promieniu $\varrho \sin\varphi$ (fig. 41) jest $2\pi\varrho \sin\varphi$, jego masa $2\pi\varrho \sin\varphi\, \varrho\, d\varrho\, \mu$, a według przykł. β) jego moment bezwładności jest: $2\pi \sin\varphi\, \varrho\, d\varphi\, \mu\, \varrho^2 \sin^2\varphi = 2\pi\mu\varrho^4 \sin^3\varphi\, d\varphi$; zatem

$$T = 2\pi\mu\varrho^4 \int_0^{\pi} \sin^3\varphi\, d\varphi.$$

$$\text{Lecz} \quad \sin 3\varphi = \sin\varphi \cos 2\varphi + \cos\varphi \sin 2\varphi$$
$$= \sin\varphi\,(1 - 2\sin^2\varphi) + 2\cos\varphi \sin\varphi \cos\varphi$$
$$= \sin\varphi - 2\sin^3\varphi + 2\sin\varphi\,(1 - \sin^2\varphi) = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi,$$

skąd wypada: $4\sin^3\varphi = 3\sin\varphi - \sin 3\varphi$, przeto

$$T = 2\pi\mu\varrho^4 \int_0^{\pi} \frac{1}{4}\,(3\sin\varphi - \sin 3\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{\mu\pi\varrho^4}{2} \int_0^{\pi} (3\sin\varphi\, d\varphi - \frac{1}{3} \sin 3\varphi\, d\, 3\varphi^3)$$

$$= \frac{\mu\pi\varrho^3}{2} \Big/_0^{\pi} \left(-3\cos\varphi + \frac{\cos 3\varphi}{3} \right) = \frac{\mu\pi\varrho^4}{2} \cdot \frac{16}{3}$$

$$= \frac{8}{3}\pi\varrho^4\mu = \frac{2}{3} M\varrho^2,$$

gdzie $M = 4\varrho^2\pi\mu$ oznacza masę powłoki.

ε) Obliczyć T kuli jednorodnej, jeżeli oś obrotu przechodzi przez środek kuli.

Niech μ oznacza masę jednostki objętości (gęstość).

Podzieliwszy kulę na powłoki (skorupy) współśrodkowe o grubości $d\varrho$, mamy na masę powłoki o promieniu ϱ wyrażenie $4\varrho^2\pi\, d\varrho\, \mu$, a jej moment bezwładności według poprzedzającego przykładu wynosi

$$\frac{2}{3}\cdot 4\varrho^2\pi\, d\varrho\, \mu\, .\, \varrho^2;\text{ zatem}$$

$$T=\int_0^\varrho \frac{2}{3}\, .\, 4\varrho^2\pi\, d\varrho\, \mu\, .\, \varrho^2 = \frac{8}{3}\pi\mu\int_0^\varrho \varrho^4\, d\varrho = \frac{8}{15}\pi\mu\varrho^5 = \frac{2}{5}M\varrho^2,$$

gdzie $M=\frac{4}{3}\varrho^3\pi\mu$.

T można obliczyć na drugi sposób podzieliwszy kulę płaszczyznami równoległemi do osi obrotu na krążki o grubości dx. Krążek, który jest w odległości x od środka kuli, ma promień $\sqrt{\varrho^2-x^2}$ (jeżeli na fig. 41. $OD=x$, to $DC=\sqrt{\varrho^2-x^2}$), masę $(\varrho^2-x^2)\pi\, dx\, \mu$, a jego moment bezwładności według przykł. γ) wynosi:

$$\frac{1}{2}(\varrho^2-x^2)\pi\, dx\, \mu\, (\varrho^2-x^2), = \frac{\pi\mu}{2}(\varrho^2-x^2)^2\, dx;\text{ zatem}$$

$$T=2\int_0^\varrho \frac{\mu\pi}{2}(\varrho^2-x^2)^2 dx = \mu\pi\int_0^\varrho (\varrho^2-x^2)^2\, dx$$

$$=\mu\pi\int_0^\varrho (\varrho^4-2\varrho^2x^2+x^4)dx = \mu\pi\left(\varrho^4x-\frac{2\varrho^2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)_0^\varrho$$

$$=\mu\pi\varrho^5\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{8}{15}\mu\pi\varrho^5$$

zgodnie z poprzedzającem.

7) Obliczenie potencyału.

Jeżeli m_1, m_2, m_3,.. oznaczają masy punktów materyalnych układu stałego, r_1 r_2, r_3,... ich odległości od pewnego punktu, w którym jest jednostka masy, natenczas suma

$$\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}+\frac{m_3}{r_3}+\ldots=\sum\frac{m}{r}\qquad\text{(XXXII, 6)}$$

wyraża *potencyał* układu względem owego punktu i oznacza się głoską V.

Przykłady. a) Obliczyć potencyał powłoki (skorupy) kulistej jednorodnej, nieskończenie cienkiej względem punktu zewnątrz kuli położonego.

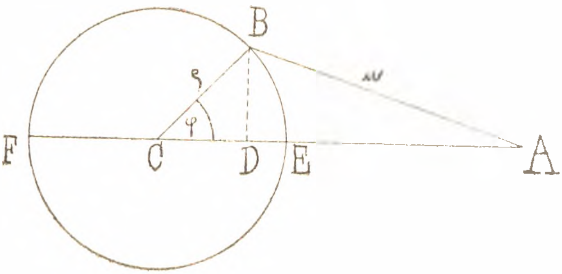

Fig. 42.

Fig. 42. przedstawia przekrój kuli o promieniu ρ, której środek znajduje się w punkcie C. Kładąc $AC = r$, $AB_{,} = u$, $\sphericalangle ACB = \varphi$, oznaczmy masę jednostki powierzchni powłoki przez μ i podzielmy powłokę na pierścienie nieskończenie cienkie płaszczyznami prostopadłemi do AC. Jeżeli ds wyraża element łuku (długości) pierścienia, to ponieważ szerokość pierścienia jest $\rho d\varphi$ (fig. 40), element powierzchni cząstki pierścienia jest $\rho d\varphi ds$, masa cząstki $\mu\rho d\varphi ds$, a jej potencyał względem punktu A wynosi $\frac{\mu\rho d\varphi ds}{u}$; zatem potencyał całego pierścienia po uwzględnieniu, że pierścień ma obwód 2. $BD\pi = 2\rho \sin\varphi\pi$, jest

$$\int_0^{2\,.\,BD\,.\,\pi} \frac{\mu\rho d\varphi ds}{u} = \frac{\mu\rho d\varphi}{u}\int_0^{2\rho\sin\varphi\pi} ds, = \frac{\mu\rho d\varphi}{u} \Big/_0^{2\pi\rho\sin\varphi} s$$

$$= \frac{\mu\rho d\varphi}{u}\,.\,2\pi\rho\sin\varphi = 2\pi\mu\rho^2\,.\,\frac{\sin\varphi d\varphi}{u}\,.$$

Lecz z trójkąta ABC wynika: $u^2 = \rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos\varphi$, skąd po zróżniczkowaniu otrzymujemy: $2u\,du = 2r\rho\sin\varphi\,d\varphi$, $\rho\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{u} = \frac{du}{r}$, co uwzględniwszy, otrzymamy na potencyał pierścienia wyrażenie: $\frac{2\pi\mu\varrho du}{r}$. Dodając potencyały poszczególnych pierścieni począwszy od najbliższego, który jest w punkcie E w odległości $r - \varrho$ od punktu A, aż do najdalszego, który jest w punkcie F w odległości $r + \varrho$ od punktu A, otrzymamy na potencyał V powłoki kulistej wyrażenie

$$V = \frac{2\pi\mu\varrho}{r}\int_{r-\varrho}^{r+\varrho} du = \frac{2\pi\mu\varrho}{r}\Big/_{r-\varrho}^{r+\varrho} u = \frac{4\pi\mu\varrho^2}{r} = \frac{M}{r},$$

gdzie $M = 4\pi\mu\varrho^2$ wyraża masę powłoki kulistej.

Widzimy z tego, że potencyał powłoki kulistej względem punktu zewnątrz położonego jest taki, jak gdyby cała jej masa była skupiona w środku kuli.

β) Obliczyć potencyał kuli jednorodnej względem punktu zewnątrz niej położonego.

Niech μ oznacza masę jednostki objętości (gęstość). Podzielmy kulę na powłoki nieskończenie cienkie współśrodkowe o grubości $d\varrho$. Masa powłoki o promieniu ϱ wynosi $4\varrho^2\pi\mu d\varrho$, a według poprzedzającego przykładu jej potencyał względem punktu będącego w odległości r od środka kuli i zewnątrz kuli położonego będzie $\frac{4\varrho^2\pi\mu d\varrho}{r}$. Dodawszy potencyały poszczególnych powłok, otrzymamy na potencyał kuli o promieniu R wyrażenie

$$V = \frac{4\pi\mu}{r}\int_0^R \varrho^2 d\varrho = \frac{4\pi\mu}{r}\Big/_0^R \frac{\varrho^3}{3}$$

$$= \frac{4\pi\mu R^3}{3\,r} = \frac{M}{r},$$

gdzie $M = \frac{4}{3}\pi R^3\mu$ wyraża masę kuli.

Tu również widzimy, że potencyał kuli względem punktu zewnątrz niej położonego jest taki, jak gdyby cała masa kuli była skupiona w jej środku.

8) Obliczenie przyciągania.

Punkt materyalny o masie m przyciąga drugi o masie 1, będący odeń w odległości r, według prawa Newtona siłą $-\frac{m}{r^2}$, gdzie znak $-$ wyraża, iż przyciąganie odbywa się w przeciwnym kierunku od tego, w którym r liczymy. Przyciąganie układu stałego wywarte na punkt o masie 1 wyraża się zapomocą sumy

$$-\frac{m_1}{r_1^2}-\frac{m_2}{r_2^2}-\frac{m_3}{r_3^2}-\ldots=-\sum\frac{m}{r^2},$$

w której zachodzące ilości mają takie znaczenie, jak na początku ustępu 7).

Przykłady. α) Obliczyć przyciąganie powłoki (skorupy) kulistej jednorodnej, nieskończenie cienkiej, wywarte na punkt zewnątrz kuli położony.

Postępując tak, jak w przykładzie α) ustępu 7) i mając na uwadze fig. 42. otrzymamy $-\frac{\mu\varrho\, d\varphi\, ds}{u^2}$ jako wyrażenie na przyciąganie elementu cząstki pierścienia w punkcie B na punkt A. Przyciąganie to można rozłożyć na dwa składowe: jedno działające w kierunku AC, drugie prostopadłe do tegoż kierunku. Przyciągania składowe cząstek pierścienia prostopadłe do AC znoszą się nawzajem, gdyż dla każdego punktu pierścienia znajdzie się drugi w tej samej odległości, lecz w kierunku wprost przeciwnym od prostej AC położony. Te zatem składowe przyciągania nie wchodzą w rachubę, rozchodzi się tylko o składowe przyciągania działające w kierunku AC.

Składowe przyciąganie cząstki B w kierunku AC jest

$$-\frac{\mu\varrho\, d\varphi\, ds}{u^2}\cos BAD=-\frac{\mu\varrho\, d\varphi\, ds}{u^2}\,\frac{AD}{u}$$

$$=-\frac{\mu\varrho\, d\varphi\, ds}{u^3}(AC-CD)=-\frac{\mu\varrho\, d\varphi\, ds}{u^3}(r-\varrho\cos\varphi),$$

zatem przyciąganie całego pierścienia wynosi

$$-\frac{\mu\varrho\, d\varphi\,(r-\varrho\cos\varphi)}{u^3}\int_0^{2\pi\varrho\sin\varphi} ds=-\frac{2\pi\mu\varrho^2(r-\varrho\cos\varphi)\sin\varphi\, d\varphi}{u^3}.$$

Lecz z równania: $u^2 = r^2 + \varrho^2 - 2 r \varrho \, Cos\, \varphi$ wypada

$$\varrho \, Cos\, \varphi = \frac{r^2 + \varrho^2 - u^2}{2r}, \quad r - \varrho \, Cos\, \varphi = \frac{r^2 - \varrho^2 + u^2}{2r},$$

$$\frac{\varrho \sin \varphi \, d\varphi}{u} = \frac{du}{r},$$

co uwzględniwszy otrzymamy na przyciąganie całego pierścienia wyrażenie

$$-\frac{\pi \mu \varrho (r^2 - \varrho^2 + u^2)}{r^2} \cdot \frac{du}{u} = -\frac{\pi \mu \varrho}{r^2}\left[(r^2 - \varrho^2)\frac{du}{u^2} + du\right].$$

Dodając przyciągania wszystkich pierścieni, otrzymamy na przyciąganie P całej powłoki kulistej wyrażenie

$$P = -\frac{\pi \mu \varrho}{r^2}\left[(r^2 - \varrho^2)\int_{r-\varrho}^{r+\varrho} \frac{du}{u^2} + \int_{r-\varrho}^{r+\varrho} du\right]$$

$$= -\frac{\pi \mu \varrho}{r^2}\left[(r^2 - \varrho^2)\Big|_{r-\varrho}^{r+\varrho} - \frac{1}{u} + \Big|_{r-\varrho}^{r+\varrho} u\right] = -\frac{4 \pi \mu \varrho^2}{r^2} = -\frac{M}{r^2}.$$

Widzimy z tego, że przyciąganie, jakie wywiera powłoka kulista na punkt zewnątrz kuli położony jest takie, jak gdyby cała jej masa była skupioną w środku kuli.

Ponieważ $\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{d}{dr} \cdot \dfrac{M}{r} = -\dfrac{M}{r^2}$, przeto

$$\frac{dV}{dr} = P.$$

β) Obliczyć przyciąganie kuli jednorodnej wywarte na punkt zewnątrz niej położony.

Postępując tak jak w przykł. β) ust. 7), otrzymamy $-\dfrac{4\pi \mu \varrho^2 d\varrho}{r^2}$ jako wyrażenie na przyciąganie powłoki nieskończenie cienkiej, której cząstki znajdują się w odległości ϱ od środka kuli. Dodając przyciągania poszczególnych powłok, otrzymujemy na przyciąganie P całej kuli wyrażenie

$$P = -\frac{4\pi \mu}{r^2}\int_0^R \varrho^2 d\varrho = -\frac{4\pi \mu R^3}{3r^2} = -\frac{M}{r^2}.$$

Widoczna, że o przyciąganiu całej kuli możemy to samo powiedzieć, cośmy udowodnili o przyciąganiu powłoki w poprzedzającym przykładzie.

9) Obliczyć ciśnienienie hydrostatyczne wywarte na powierzchnię figury płaskiej zanurzonej w cieczy.

Jeżeli powierzchnia danej figury jest f, ciężar właściwy cieczy s, natenczas ciśnienie cieczy wywarte na element figury df będący w odległości x od powierzchni wolnej jest $s\,x\,df$ a ciśnienie wywarte na powierzchnię całej figury jest

$$P = \int s\,x\,df = s\int x\,df,$$

gdzie całkowanie trzeba wykonać na elementa powierzchni całej figury. Lecz według przykł. 5) a)

$$\int x\,df = a\,.f,$$

gdzie a oznacza odległość środka ciężkości danej figury od powierzchni wolnej. Mamy zatem

$$P = a\,f\,s,$$

to znaczy: Ciśnienie cieczy wywarte na powierzchnię figury płaskiej zanurzonej w cieczy równa się ciężarowi słupa cieczy, którego podstawą jest powierzchnia figury a wysokością odległość środka ciężkości cieczy od powierzchni wolnej.

10) Wyprowadzić prawo zmiany ciśnienia atmosferycznego w miarę wznoszenia się nad poziom morza.

Jeżeli w naczyniu ciecz wznosi się nad dnem do wysokości h, natenczas ciśnienie wywarte na jednostkę powierzchni będącej w odległości x od dna wynosi

$$p = s\,(h - x),$$

gdzie s oznacza ciężar właściwy cieczy. Różniczkując ostatnie równanie otrzymamy na zmianę ciśnienia przy zmianie odległości wyrażenie

$$dp = -\,s\,d\,x.$$

Podobnie rzecz się ma z ciśnieniem atmosferycznem z tą różnicą, że s się zmienia, gdyż powietrze jest gazem.

Według prawa Mariotta $s = kp$, gdzie k jest ilością stałą, co wstawiwszy w poprzednie równanie otrzymamy

$$dp = -kp\,dx,$$

$$\frac{dp}{p} = -k\,dx,$$

a po zcałkowaniu ostatniego równania wypada

$$ln\,p = -kx + C.$$

Jeżeli dla $x = x_0$ jest $p = p_0$, natenczas

$$C = ln\,p_0 + kx_0,$$

$$ln\,p = -kx + ln\,p_0 + kx_0,$$

$$k(x - x_0) = ln\,p_0 - ln\,p,$$

$$k(x - x_0) = ln\,p_0 - ln\,p; \text{ zatem}$$

$$x - x_0 = \frac{1}{k}(ln\,p_0 - ln\,p).$$

Ponieważ x_0, x oznaczają wysokości liczone od poziomu morza, p_0, p odpowiednie ciśnienia powietrza, przeto według tego wzoru można obliczyć wysokość góry, jeżeli się zna ilość stałą $\frac{1}{k}$ i ciśnienie barometryczne u podnóża i na wierzchołku góry.

Ponieważ $ln\,p - ln\,p_0 = ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = k(x_0 - x_1)$, przeto

$$\frac{p}{p_0} = e^{k(x_0 - x)} = e^{kx_0} \cdot \left(\frac{1}{e^k}\right)^x, \quad \text{a} \quad p = p_0 e^{kx_0} \cdot \left(\frac{1}{e^k}\right)^x.$$

Ilości p_0, e, k, x_0 są dodatnie, $e = 2\,718\ldots > 1$, zatem

$$e^k > 1, \quad \frac{1}{e^k} < 1.$$

Oznaczywszy: $p_0\,e^{kx_0} = a$, $\frac{1}{e^k} = q$, otrzymamy

$$p = a\,.\,q^x.$$

Dla $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ wypada

$$p = a, aq, aq^2, aq^3, \ldots$$

Postęp geometryczny: $a, aq, aq^2, \ldots$ jest malejący, bo $q < 1$.

Widzimy zatem, że ciśnienie powietrza maleje według postępu geometrycznego, gdy wysokość nad poziomem morza wzrasta według postępu arytmetycznego.

XXXIV.

Zastosowanie rachunku różniczkowego do rozwijania funkcyi na szeregi.

Zapomocą różniczkowania można zamienić funkcyę na szereg nieskończony kształtu

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

jak to poznamy na następnych przykładach.

1) Funkcyę e^x rozwinąć na szereg.

Niech będzie $e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots;$ rozchodzi się o obliczenie współczynników $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Gdy $x = 0$, wypada: $e^0 = 1 = a_0$. Chcąc wyznaczyć inne współczynniki, różniczkujemy równanie

$$e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots; \text{ otrzymamy}$$

$$e^x = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + k a_k x^{k-1} + \ldots$$

Z porównania współczynników obu równań wypada

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 = 1, \\ 2a_2 &= a_1, \\ 3a_3 &= a_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ k a_k &= a_{k-1}. \end{aligned}$$

Mnożąc obie strony równań otrzymamy

$$a_k \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k = 1, \quad \text{skąd wypada}$$

$$a_k = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} = \frac{1}{k!}.$$

Zatem szukany szereg jest

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Według XII, 1) szereg ten jest zbieżny.

2) Rozwinąć na szereg $\cos x$ i $\sin x$.

Niech będzie

$$\cos x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_k x^k + \ldots,$$

$$\sin x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \ldots + b_k x^k + \ldots$$

Dla $x = 0$ wypada: $\cos 0 = 1 = a_0$, $\sin 0 = 0 = b_0$.

Różniczkując powyższe równania, otrzymamy

$$\sin x = - a_1 - 2a_2 x - 3a_3 x^2 - 4a_4 x^3 - \ldots - k a_k x^{k-1} - \ldots,$$

$$\cos x = \quad b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + 4b_4 x^3 + \ldots + k b_k x^{k-1} + \ldots$$

Z porównania współczynników wynika

$$a_1 = - b_0 = 0, \quad b_1 = a_0 = 1,$$

$$k b_k = a_{k-1}, \quad b_k = \frac{a_{k-1}}{k},$$

$$(k + 1) b_{k+1} = a_k, \quad b_{k+1} = \frac{a_k}{k+1},$$

$$k a_k = - b_{k-1}, \quad a_k = - \frac{b_{k-1}}{a_k},$$

$$(k + 1) a_{k+1} = - b_k, \quad a_{k+1} = - \frac{b_k}{k+1},$$

$$a_{k+1} = - \frac{a_{k-1}}{k(k+1)}, \quad b_{k+1} = - \frac{b_{k-1}}{k(k+1)}.$$

Z tych wzorów wypada, że: $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = a_{2k+1} = 0$, i również $b_2 = b_4 = b_6 = \ldots = b_{2k} = 0$, (ponieważ $b_0 = a_1 = 0$); to znaczy, że w rozwinięciu $\cos x$ znajdują się tylko potęgi parzyste a w rozwinięciu $\sin x$ tylko potęgi nieparzyste.

Podstawiając za k liczby: 1, 3, 5, ... $(2k - 1)$, otrzymamy

$$a_2 = -\frac{a_0}{1.2} = -\frac{1}{1.2},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{3.4},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{(2k-1)\,2k},$$

z czego wynika

$$a_{2k} = (-1)^k \cdot \frac{1}{1.2.3\dots(2k-1)\,2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}.$$

Podobnież podstawiając za k liczby: 2, 4, 6.... $2k$, otrzymamy

$$b_3 = -\frac{b_1}{2.3} = -\frac{1}{2.3},$$

$$b_5 = -\frac{b_3}{4.5},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$b_{2k+1} = -\frac{b_{2k-1}}{2k\,(2k+1)},$$

z czego wypada

$$b_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}.$$

Uwzględniwszy otrzymane wartości współczynników, mamy

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \dots,$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots$$

Według XII, 3) oba szeregi są zbieżne.

Podstawiając w ostatnich równaniach zamiast x raz ix drugi raz $-ix$, gdzie $i^2 = -1$, otrzymamy

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \dots,$$

$$e^{-ix} = 1 - \frac{ix}{1} - \frac{x^2}{2!} + \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{ix^5}{5!} - \dots.$$

Z tych równań łatwo wyprowadzić następujące

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \cos x,$$

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \frac{ix}{1} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{ix^5}{5!} - \ldots = i \sin x,$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

XXXV.

Zastosowanie rachunku całkowego do rozwijania funkcyi na szeregi.

Rozwijając potęgi dwumianu według wzoru binomialnego i całkując otrzymane równania, możemy niektóre funkcye rozwinąć na szeregi, jak to poznamy na kilku przykładach.

Weźmy pod uwagę następujące szeregi powstałe z rozwinięcia zapomocą wzoru binomialnego:

$$1)\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} x^4 + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} x^6 + \ldots$$
$$+ \frac{1 \,.\, 3 \ldots (2k-3)(2k-1)}{2 \,.\, 4 \ldots (2k-2)\, 2k} x^{2k} + \ldots,$$

$$2)\ \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots + (-1)^k x^{2k} + \ldots,$$

$$3)\ \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots + (-1)^k x^k + \ldots,$$

zbieżne dla $-1 < x < 1$.

Całkując równanie 1), otrzymamy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$$
$$+ \frac{1 \,.\, 3 \ldots (2k-1)}{2 \,.\, 4 \ldots 2k} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \ldots;$$

Według XII, 2) ten szereg jest zbieżny dla $-1 < x < 1$.

Lecz $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\ sin\ x,$ zatem

$$arc\ sin\ x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1\ .\ 3}{2\ .\ 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1\ .\ 3\ .\ 5}{2\ .\ 4\ .\ 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Ilość stała całkowania odpada, bo dla $x = 0$ jest $arc\ sin\ x = 0$.

Całkując równanie 2) otrzymamy

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \ldots;$$

według XII, 3) ten szereg jest zbieżny dla $-1 < x < 1$.

Lecz $\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\ tg\ x$, przeto

$$arc\ tg\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Ilość stała całkowania odpada, bo dla $x = 0$ jest $arc\ tg\ x = 0$.

Całkując równanie 3) otrzymamy

$$\int \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + \ldots;$$

według XII, 3) ten szereg jest zbieżny dla $0 < x < 1$.

Lecz $\int \frac{dx}{1+x} = \int \frac{d\,(1+x)}{1+x} = ln\,(1+x)$, zatem

$$ln\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots$$

Ilość stała całkowania odpada, bo dla $x = 0$ jest $ln\,(1+x) = 0$.

Ostatniego wzoru możnaby użyć do obliczenia logarytmów naturalnych liczb, lecz w stosownem przekształceniu n. p.

$$ln\ 2 = ln\,(1{\cdot}5 + 0{\cdot}5) = ln\ 1{\cdot}5\left(1 + \frac{0{\cdot}5}{1{\cdot}5}\right)$$

$$= ln\ 1{\cdot}5 + ln\left(1 + \frac{1}{3}\right),$$

$$ln\ 3 = ln\,(2 + 1) = ln\ 2\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= ln\ 2 + ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) \quad \text{i t. p.}$$

XXXVI.

Obliczenie liczby π.

Wzorów:

$$1)\ arc\ tg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \ldots$$

$$2)\ arc\ sin\, x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$$

można użyć do obliczenia liczby π, albowiem dla $x = 1$

$$arc\ tg\, 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

jest szeregiem zbieżnym według XII, 3), również dla $x = \frac{1}{2}$

$$arc\ sin\, \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^5}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \ldots$$

jest szeregiem zbieżnym według XII, 2).

Wzór: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

nie jest jednak dogodny do obliczenia, bo szereg w nim jest bardzo powoli zbieżny, wzór

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \ldots$$

jest dogodniejszy. Wykonawszy rachunek do dziewięciu miejsc dziesiętnych otrzymamy

$$
\begin{array}{r}
\frac{\pi}{6} = 0{\cdot}500\ 000\ 000 \\
20\ 833\ 333 \\
2\ 343\ 750 \\
348\ 771 \\
59\ 339 \\
10\ 922 \\
2\ 117 \\
425 \\
88 \\
19 \\
4 \\
1 \\
\hline
0{\cdot}523\ 598\ 769\,,
\end{array}
$$

skąd wypada: $\pi = 3{\cdot}141\ 592\ 614$ z dokładnością do siedmiu miejsc dziesiętnych.

Alfabetyczny rejestr rzeczy.

Liczba oznacza stronicę, Skrócenia: „*p.* = patrz, *fn.* = funkcya, *cał.* = całka, *poch.* = pochodna, *róż.* = różniczka“.

*) Ten termin przy nauce szkolnej jest niezbędny. Ocenienie bowiem, czy punkt jest najwyższy czy najniższy, pociągnęłoby za sobą wprowadzenie znaczenia drugiej pochodnej, a to znów powiększyłoby znacznie materyał nauki. Nazwa „*punkt zwrotu*“ wydała mi się najodpowiedniejszą. Punkt podwójny o tej nazwie może mieć termin: „*punkt podwójny zwrotu*“. Przyp. aut.

Wskazówki przy nauce:

a) w gimnazyach:

Przerobić: rozdział I, II, niektóre przykłady z roz. IV, rozdziały V—VII, X—XIII, z roz. XIV przykłady 1) 2), z roz. XV przykład 1) i część α) z przykł. 2), rozdziały XVII, XVIII, z rozdz. XIX przykłady 1), 2), 14), 15), rozdziały XXIII i XXIV, z rozdz. XXV przykłady 1) i 5), rozdziały XXVI—XXX, z rozdz. XXXI przykłady 1), 10), 11), z rozdz. XXXII przykłady 1), 2) z opuszczeniem ustępu ε), 3) — 7), z rozdz. XXXIII z przykładu 1) rzecz ogólną, przykład 2).

Wymieniony materyał naukowy jest zawarty na 55 stronicach rozprawy, lecz czas potrzebny do jego przerobienia wynosi zaledwie piątą część czasu potrzebnego do przerobienia całej rozprawy.

W miarę czasu możnaby przerobić: rozdziały XX, XXI, z rozdz. XXII przykłady 1), 3) — 5), z rozdz. XXXIII przykłady 3), 5), 6 α β), 9), co jest zawarte na 9 stronicach.

b) w szkołach realnych:

Przerabiać po porządku materyał całej rozprawy. W braku czasu można opuścić: niektóre przykłady z rozdziału IV, rozdziały VIII, IX, niektóre przykłady z rozdziałów XIV — XVI, XIX, XXII, XXV, XXXI — XXXIII, rozdziały XXXIV — XXXVI; a mimo to część przerobiona stanowić będzie organiczną całość.

Omyłki.

Str. 1. wiersz 12. z góry zamiast „$0.\dot{3}\dot{7}$" ma być „$0{\cdot}\dot{3}\dot{7}$".
„ 1. „ 12. od dołu „ „innymi" „ „ „innemi".
„ 3. „ 7. „ „ „ „2π." „ „ „2π".
„ 6. „ 15. z góry „ „płaszczyznie" „ „ „płaszczyźnie".
„ 6. „ 13. od dołu „ $3x^2-8x+5$ „ „ x^2-3x+2.
„ 6. „ 1. i 7. „ „ „ „$\frac{1}{3}$" „ „ „$\frac{2}{9}$".
„ 7. „ 9. „ „ „ „$\frac{1}{5}$" „ „ „$\frac{1}{4}$".
„ 7. „ 7. „ „ „ „$-\frac{1}{5}$" „ „ „$+\frac{1}{5}$".
„ 10. „ 6. „ „ „ „CD" „ „ „CG",
„ 10. „ 6. „ „ „ „DC" „ „ „DH".
„ 11. „ 7. i 14. z góry po „miarę" i „b" „ „ przecinek.
„ 12. „ 6. od dołu ma być: „$F(k)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}$"
„ 15. „ 14. „ „ zamiast „w końcu" ma być „wkońcu".
„ 15. „ 4. „ „ „(fig. 6.)" opuścić.
„ 16. „ 10. z góry zamiast „2" ma być „1".
„ 18. „ 8. „ ma być „$F(x, y)$".
„ 20. „ 8. „ po „0" ma być przecinek.
„ 20. „ 9. od dołu zamiast „$\delta=0.$" ma być „$\delta=0$".
„ 21. „ 3. „ „ „ „;" „ „ „:".
„ 22. „ 10. z góry „ „$1-1$" „ „ „$1-q$".
„ 26. „ 2. „ „ „k^5" „ „ „x^5".
„ „ „ 4. „ „ „x^4" „ „ „x^2".
„ „ „ 8. od dołu „ „a^{k+1}" „ „ „a_{k+1}".
„ „ „ 5. „ „ „ „$>$" „ „ „$<$".
„ 29. „ 8. z góry ma być „$-1<x<1$".
„ „ „ 10. „ „ „ „(XII, 1)".
„ 30. „ 2. „ „ „ „$\left[a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right]^n$".
„ 33. „ 2. „ „ „ „$sin\,(x+\delta)$".
„ 37. „ 8. od dołu ma być znak „$|$" przed znakiem „$=$".
„ 38. „ 7. „ „ zamiast „$[da-bx]$" ma być „$d[a-bx]$".

Str. 39. wiersz 8. od dołu zamiast „innymi“ ma być „innemi“.
„ 41. „ 4. z góry „ „ε_1“ „ „ „ε“.
„ „ „ 13. „ ma być „$df(x) = f'(x)\,dx$“.
„ 47. „ 10. z góry „ „ „$\Delta f(x) = \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$“.
„ „ „ 8. od dołu zamiast „1328“ ma być „13·28“.
„ 48. „ 12. z góry ma być „$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = x \cos \alpha$“.
„ 50. „ 1. „ po „odciętych“ wstawić „(z dodatnim kierunkiem)“.
„ „ „ 5. od dołu i str. 51. w. 2. z góry zamiast „kształt“ ma być „postać“.
„ 58. „ 5. z góry ma być „Funkcya $x^2 - 3x + 2$“.
„ „ „ 6. „ „ „ „$x = 1\frac{1}{2}$,“ „$\frac{d}{dx}\left[x^2-3x+2\right] = 2x-3$“.
„ „ „ 8. „ „ „ „$\left[1\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$“.
„ 62. „ 4. od dołu zamiast „mogliśmy“ ma być „moglibyśmy“.
„ 65. „ 14. „ „ przed „symbol“ położyć „to“.
„ „ „ 13. „ „ zamiast „ ; “ ma być „ : “.
„ 67. „ 11. z góry ma być „$\frac{x^{n+1}}{n+1}$“.
„ 68. „ 6. od dołu zamiast „$\int\sqrt{1-x^2}$“ ma być „$\int\sqrt{1-x^2}\,dx$“.
„ 70. „ 7. „ „ ma być „$\int F(x)\,dx$“.
„ 71. „ 9. z góry zamiast „$arc\,sin\,x$“ ma być „$x\,arc\,sin\,x$“.
„ 77. „ 6. od dołu ma być „$\frac{\pi x}{3}\left(a^2 x^2 + 3ab\,x + 3b^2\right)$“.
„ 78. „ 8. z góry „ „ „$\pi\left[r(b^2 - a^2) - \frac{1}{3}(b^3 - a^3)\right]$“.
„ 81. „ 5. „ zamiast „$\frac{dt^2}{2}$“ ma być „$\frac{at^2}{2}$“.
„ „ „ 9. od dołu ma być „$\overline{CE}^2$“.
„ 82. „ 7. z góry zamiast „$\frac{x^2}{y^2}$“ ma być „$\frac{x^2}{r^2}$“.
„ 90. „ 11. od dołu „ „2τ“ „ „ „$2a$“.
„ 91. „ 12. z góry „ „ϱ“ „ „ „ϱ^2“.
„ „ „ 4. od dołu „ „$d3\varphi^3$“ „ „ „$d|3\varphi|$“.
„ „ „ 3. „ „ „ „$\frac{n\pi\varrho^1}{2}$“ „ „ „$\frac{n\pi\varrho^1}{2}$“.

Str. 93. wiersz 13. z góry zamiast „AB,“ ma być „AB“.
„ 96. „ 1. i 2. „ „ „$Cos\, \varrho$“ „ „ „$\cos \varphi$“.
„ „ „ 2. „ „ „μ^2“ „ „ „u^2“.
„ „ „ 3. „ ma być „$\frac{\varrho \sin \varphi \, d\varphi}{u}$“.
„ „ „ 6. „ zamiast „$\frac{du}{u}$“ ma być „$\frac{du}{u^2}$“.
„ „ „ 10. „ „ „$r + \pi$“ „ „ „$r + \varrho$“.
„ „ „ 5. od dołu „ „$d\varphi$“ „ „ „$d\varrho$“.
„ 100. „ 10. „ „ ma być „$a_k = -\frac{b_{k-1}}{k}$“.
„ 101. „ 4. „ „ zamiast „w ostatnich równaniach“ ma być „we wzorze: $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$“
„ 104. „ 4. z góry zamiast „$\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}$“ ma być „$\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$“.

Wiadomości szkolne.

I.

a) Zmiany w gronie nauczycielskiem:

Przybyli:

1. **Kaniak Józef**, zastępca nauczyciela w c. k. gimnazyum w Wadowicach, przeniesiony w tym samym charakterze do tutejszego zakładu rozp. c. k. R. S. K. z 21. czerwca 1910 l. 32283.
2. **Łucki Aleksander**, dr. fil., zastępca nauczyciela w c. k. gimnazyum św. Jacka w Krakowie, mianowany rzeczywistym nauczycielem w tutejszym zakładzie rozp. c. k. R. S. K. z 21. czerwca 1910 l. 25469.
3. **Kaniowski Tadeusz**, zastępca nauczyciela w filii c. k. gimnazyum w Stryju, mianowany rzeczywistym nauczycielem w tutejszym zakładzie rozp. c. k. R. S. K. z 22. lipca 1910 l. 38955.
4. **Sykutowski Franciszek**, kandydat stanu nauczycielskiego, mianowany zastępcą nauczyciela w tutejszym zakładzie rozp. c. k. R. S. K. z 31. stycznia 1911 l. 50031.

Ubyli:

1. **Wiśniowski Józef**, rzeczywisty nauczyciel, przeniesiony w tym samym charakterze do c. k. gimnazyum św. Anny w Krakowie rozp. c. k. R. S. K. z 22. czerwca 1910 l. 28637.
2. **Jurkowski Błażej**, dr. fil., profesor, przeniesiony w tym samym charakterze do c. k. II. szkoły realnej we Lwowie rozp. c. k. R. S. K. z 22. lipca 1910 l. 31334.
3. **Wilk Stanisław**, zastępca nauczyciela, przeniesiony w tym samym charakterze do c. k. gimnazyum IV. we Lwowie rozp. c. k. R. S. K. z 1. grudnia 1910 l. 73872.

b) Grono nauczycielskie

z końcem roku szkolnego 1910/11.

Dyrektor:

Ralski Jan, dr. fil. w VI. r., delegat c. k. Rady szkolnej krajowej do Wydziału szkoły przemysłowej uzupełniającej, uczył matematyki w kl. V; tygodniowo godzin 4.

Nauczyciele:

1. **Drozd Hieronim**, profesor, przydzielony do służby w c. k. szkole realnej w Tarnowie (rozp. c. k. R. S. K. z 15. lipca 1910 l. 37600).
2. **Fedorowicz Stanisław**, ksiądz, egz. zastępca nauczyciela, zawiadowca biblioteki ruskiej dla uczniów, uczył religii gr. kat. w kl. I—VII; tygodniowo godzin 7.
3. **Filimowski Stanisław**, profesor, zawiadowca biblioteki niemieckiej dla uczniów, uczył języka niemieckiego w kl. II, V, VI, VII; tygodniowo godzin 16.
4. **Gartner Franciszek**, profesor w VIII r., gospodarz klasy II, zawiadowca gabinetu historyi naturalnej, uczył matematyki w kl. I—III. historyi naturalnej w kl. I, II, V—VII; tygodniowo godzin 19.
5. **Gonet Michał**, profesor w VIII r., gospodarz kl. V, zawiadowca zbioru geograficzno-historycznego, biblioteki nauczycielskiej i podręczników szkolnych dla ubogich uczniów uczył historyi w kl. IV—VII, geografii w kl. IV—VI; tygodniowo godzin 15.
6. **Kaniak Józef**, zastępca nauczyciela, zawiadowca gabinetu rysunków odręcznych, uczył rysunków odręcznych w kl. I—VII, kaligrafii w kl. I; tygodniowo godzin 24.
7. **Kaniowski Tadeusz**, rzeczywisty nauczyciel, gospodarz kl. VI, zawiadowca biblioteki polskiej dla uczniów, uczył języka polskiego w kl. I, VI, VII, historyi w kl. I; tygodniowo godzin 12.
8. **Komęza Stanisław**, zastępca nauczyciela, gospodarz kl. III, uczył języka polskiego w kl. II—V, historyi w kl. II, III; tygodniowo godzin 18.

9. **Konieczny Władysław**, rzeczywisty nauczyciel, gospodarz kl. I, uczył języka niemieckiego w kl. I, III, IV; tygodniowo godzin 15.
10. **Litwin Walenty**, ksiądz, profesor w VIII r., uczył religii rzym. kat. w kl. I—VII; tygodniowo godzin 14.
11. **Łucki Aleksander**, dr. fil., rzeczywisty nauczyciel, na urlopie (rozp. c. k. R. S. K. z 14. lipca 1910 l. 37240).
12. **Ostrowski Wiktor**, profesor, gospodarz kl. IV, zawiadowca biblioteki francuskiej dla uczniów, uczył języka francuskiego w kl. III—VII; tygodniowo godzin 16.
13. **Otremba Gustaw**, profesor, na urlopie (rozp. c. k. R. S. K. z 6. czerwca 1910 l. 23470 i z 15. stycznia 1911 l. 726/IV)
14. **Rozmuski Tadeusz**, profesor, zawiadowca gabinetu chemicznego, uczył geografii w kl. I—III, chemii w kl. IV—VI, kierował pracownią chemiczną uczniów kl. V—VII; tygodniowo godzin 17.
15. **Steczko Józef**, profesor, gospodarz kl. VII, zawiadowca gabinetu fizycznego, uczył matematyki w kl. VI, VII, fizyki w kl. VI, VII; tygodniowo godzin 17.
16. **Sykutowski Franciszek**, egz. z gimnastyki zastępca nauczyciela, uczył matematyki w kl. IV, fizyki w kl. III, IV, gimnastyki w kl. I–VII; tygodniowo godzin 23.
17. **Tenczarowski Tadeusz**, egz. zastępca nauczyciela, zawiadowca gabinetu geometrycznego, uczył w pierwszem półroczu: matematyki w kl. IV, VI, geometryi w kl. II—VII; tygodniowo godzin 22; — w drugiem półroczu geometryi w kl. II—VII; tygodniowo godzin 14, (mając zniżenie tygodniowej liczby godzin nauki na mocy rozp. c. k. R. S. K. z 24. grudnia 1910 l. 78101).

Nadto uczył w pierwszem półroczu:

Stanisław Wilk, egz. zastępca nauczyciela gimnastyki w kl. I—VII; tygodniowo godzin 14.

c) Nauczyciel pomocniczy:

Seidenwerg Izydor, uczył religii mojżeszowej w kl. I—VII; tygodniowo godzin 7.

d) Nauczyciele przedmiotów względnie obowiązkowych i nadobowiązkowych:

Ks. Fedorowicz Stanisław, uczył języka ruskiego w dwóch oddziałach; tygodniowo godzin 4.

Wilusz Adam, rzeczywisty nauczyciel c. k. gimnazyum w Jarosławiu, uczył śpiewu w dwóch oddziałach; tygodniowo godzin 4.

II.

Plan uaukowy.

Na miejsce planu z roku 1900 wszedł w życie na podstawie rozp. c. k. R. S. K. z 20. lipca 1909 l. 37271 za zezwoleniem c. k. M. W. i O. z 6. lipca 1909 l. 24339 nowy plan naukowy z takiemi zmianami, które były niezbędne, aby przejście z jednego planu do drugiego odbyło się stopniowo bez uszczerbku dla nauki.

III.

Tematy do wypracowań piśmiennych dla klas wyższych.

Tematy polskie.

Klasa V.

1. Szkolnictwo w Polsce za Piastów. (szk.)
2. Znaczenie Grunwaldu w dziejach Polski. (dom.)
3. Rey ojcem języka i literatury polsk. (szk.)
4. „Kto bohaterów nie wielbi ojczystych, Sypcie mu w oczy żwirami pogardy“ Wężyk. (dom.)
5. Budowa „Odprawy posłów greckich“ J. Kochan. (szk.)
6. Rozwój boleści w trenach. (szk.)
7. Miłość ojczyzny w Kazaniach sejmowych Skargi. (dom.)
8. Cechy sielanki konwencyonalnej. (szk.)
9. Korzyści zabaw na wolnem powietrzu. (dom.)
10. Kmicic a Jacek Soplica na podstawie lektury prywatnej. (dom.)

Klasa VI.

1 Wspomnienia starego konia. (dom.)

2. Elegia Karpińskiego „Powrót z Warszawy na wieś“ jako przyczynek do charakterystyki poety. (szk.)

3. Fircyk a Szarmancki w komedyi polskiej XVIII wieku. (dom.)

4. Pobyt Eneasza w podziemiu. (szk.)

5. Wykazać zasadnicze i charakterystyczne znamiona tragedyi pseudoklasycznej na „Barbarze Radziwiłłównie“ Felińskiego. (szkol.)

6. Do wyboru:

a) Znaczenie unii Litwy z Polską.

b) Czego domaga się Brodziński od poetów polskich, aby ich utwory były odbiciem ducha narodowego. (Na podstawie rozprawy „O klasyczności i romantyczności“).

c) Charakterystyka porównawcza obu bohaterów Rzewuskiego powieści p. t. „Listopad“. (dom.)

7. Objaśnić i rozwinąć zasadnicze myśli w „Odzie do młodości“. (szkol.)

8. do wyboru:

a) Młodość poety na podstawie IV. części Dziadów.

b) Rozwinąć i uzasadnić myśl, zawartą w dwuwierszu Mickiewicza:

„Pieniądzmi drudzy cię wzbogacą.
Mądrość sam z siebie własną musisz dobyć pracą“—

c) Almansor a Konrad Wallenrod. (dom.)

9. Charakterystyka tragedyi starożytnej. (szkol.)

10. Towarzystwo Przyjaciół Nauk w Warszawie i jego sposób służenia sprawie publicznej. (szkol.)

Klasa VII.

1. Rozwinąć myśl Naruszewicza:

„Wasz to obyczaj: cierń w życia przeciągu
Kłaść im na głowy, kwiat aż na posągu“. (dom.)

2. Wyjaśnić słowa, napisane przez więźnia w III. części „Dziadów“ na ścianie więziennej:

„Gustavus obiit, hic natus est Conadus“. (szkol.)

3. Znaczenie maszyn w życiu cywilizacyjnem i społecznem w wieku naszym. (dom.)

4. Obraz stepu ukraińskiego. (Na podstawie „Maryi“ Malczewskiego.) (szk.)

5. Jak się spełnia w życiu Balladyny złorzeczenie Goplany

rzucone jej w twarz w chwili zabicia siostry: „Ręka zbrodni dalej cię zaprowadzi; natura zbrodnią pogwałcona, mścić się będzie“. (szkol.)

6. Do wyboru :

a) Stosunki wewnętrzne Polski za czasów Kazimierza Jagiellończyka.

b) Mowa na cześć Tadeusza Kościuszki.

c) Typy polskie w komedyach Fredry. (dom.)

7. O przyczynach, które literaturze narodowej po r. 1830. odmienny nadały charakter. (szkol.)

8. Do wyboru ;

a) Wpływ towianizmu na literaturę polską.

b) Geneza i znaczenie „Psalmów Przyszłości“ Krasiński.

c) Krasińskiego „Przedświt“ a Kajsiewicza „Kazanie o pokucie“ pod względem myśli głównej i zamiaru poetów. (dom.)

9. Charakterystyka Mohorta na tle ówczesnych stosunków obyczajowych i politycznych. (szk.)

Tematy niemieckie.

Klasa V.

1. Des Kaisers neue Kleider. Erzählung nach Andersens gleichnamigem Märchen. (szk.)

2. Die edle Tat des Grafen von Habsburg. Nach Schillers Gedicht „Der Graf von Habsburg“. — (dom.)

3. Das klagende Lied. (Nach der Schullektüre.) — (szk.)

4. Möros auf dem Rückwege nach Syrakus. Nach Schillers Gedicht „Die Bürgschaft“. — (dom.)

5. Theodor Körners Leben und Tod. (Nach der Schullektüre.) — (szk.)

6. Inhaltsangabe der Ballade von L. Uhland „Der Schenk von Limburg„. — (dom.)

7. Die Tellsage. (Nach der Schullektüre) — (szk.)

8. Gedankengang in Schillers Ballade „Der Taucher (dom.)

9. Andreas Hofers Tod. (Nach der Schullektüre.) — (szk.)

10. Goethes „Ballade vom vertriebenen und zurückkehrenden Grafen“ (Inhaltsangabe.) — (dom.)

11. Das Wasser der Jugend. (Nach Baumbachs gleichnamigem Märchen) — szk.

12. Schillers Jugend. (Nach der Schullektüre) — (dom.)
13. Die Sage von König Oedipüus. — (szk.)
14. Die Bedeutung der Eisenbahnen. — (dom.)

Klasa VI.

1. Wie habe ich die Ferien zugebracht. In Briefform. (dom.)
2. Die Gralsage. (Nach der Schullektüre). — (szk.)
3. Gang der Handlung im ersten Aufzuge des Lustspiels von Lessing „Minna von Barnhelm“. — (dom.)
4. Gedankengang in Schillers „Kampf mit dem Drachen szk.
5. Die Vorgeschichte des Majors Tellheim. Nach Lessings „Minna von Barnhelm“ — (dom.)
6. Inhaltsangabe der Ballade von L. Uhland „Das Glück von Edenhall“ — (szk.)
7. Hüons Abenteuer in Bagdad. Nach Wielands „Oberon“ — (dom.)
8. Die Sage von Lohengrin. (Nach der Schullektüre) — (szk.)
9. Die Macht des Gesanges in Uhlands Ballade „Bertran de Born“. — (dom.)
10. Die Faustage. (Nach der Schullektüre.) — (szk.)

Klasa VII.

1. Gang der Handlung im ersten Aufzuge von. Schillers „Die Piccolomini.“ — (dom.)
2. Goethes Balladen „Der Erlkönig“ und „Der Fischer“. (Ein Vergleich.) — (szk.)
3. Über den Zweck der Studien. (dom.)
4. Gedankengang in Schillers „Das verschleierte Bild zu Sais. — (szk.)
5. Gang der Handlung im ersten Aufzuge von Schillers „Wallensteins Tod“. — (dom.)
6. Inhaltsangabe der Ballade von Bürger „Lenore“. — szk.
7. Gedankengang in Schillers „Das Lied von der Glocke“. — (dom.)
8. Eine Übersetzung aus dem Polnischen. — (szk.)
9. Heines Gedicht „Belsazar“. (Gedankengang). — (dom.)

Tematy francuskie.

Klasa V.

1. Angles et triangles. — (szk.)
2. Une visite á la ménagerie. — (dom.)
3. Compte rendu de la nouvelle: Le siège de Berlin (szk.)
4. Comment s'oriente-t-on à la gare (sujet d' une lettre à un jeune ami). — (dom.)
5. Les changements de température dans notre climat (szk.)
6. Exercice de grammaire. — (dom.)
7. Les gens de la ferme. (D'après le tableau mural). (szk.)
8. L'éclairage. — (szk.)
9. Chez l'épicier. Dialogue. — (dom).
10. Lettre de condoléance à cause de la mort du père. szk.
11. Expédition d' une lettre. — (dom.)
12. Sujet de la fable: Le chêne et le roseau. — (szk.)
13. La photographie. — (dom.
14. La construction d'une maison (d'apres le tableau mural. — (szk.)

Klasa VI.

1. Une traduction. — (szk.)
2. Comment j'ai passé mes vacances. — (dom.)
3. Les métiers et les artisans à Jaroslaw. — (szk.)
4. L' humanisme et le College de France. — (dom.)
5. Description du cheval. — (szk.)
6. La marmite de Papin. — (dom.)
7. Description du tableau mural: „La foret" — (szk.)
8. La vie de salon au 18. siécle. (D'apres la lecture.) (szk.)
9. Le touriste dans les montagnes (D'aprés le tableau mural. — (dom.)
10. Les souvenirs polonais à Paris. — (szk.)
11. Une journée passée avec un ami. (En forme de lettre.) — (dom.)
12. Description de la bicyclette. — (szk.)
13. Les causes de la Révolution française. — (dom.)
14. Origine de la Marseillaise. — (szk.)

Klasa VII.

1. Une traduction. — (szk.)
2. L'évolution du roman au 19 siécle, — (dom.)
3. Organisation de l'armée — (szk.)
4. Les moyens de locomotion. — (dom.)
5. Un théorěme géométrique. — (szk.)
6. Les écoles et l'instruction publique en France — (dom.)
7. Les Parnassiens. — (szk.)
8. Lettre. (Choix de la profession) — (szk.)
9. Les émigrés polonais en France. — (dom.)
10. La description du télégraphe. — (szk.)
11. Les écrivains réalistes et naturalistes. — (dom.)
12. Le Louvre. — (szk.)

IV.

Egzamin dojrzałości.

Piśmienny egzamin dojrzałości odbył się w dniach od 29. maja do 1. czerwca.

Tematy do piśmiennego egzaminu dojrzałości były następujące:

Z języka polskiego:

1. Wpływ Francyi na dzieje społeczeństw i literaturę polską w XVIII wieku.
2. Koleje jako czynnik cywilizacyjny.
3. Znaczenie gór w przyrodzie.

Z języka niemieckiego:

Przetłómaczyć na język niemiecki część ustępu L IV pod tytułem: „Pióra stalowe" z „Czytań polskich dla klasy pierwszej szkół średnich Dra Maryana Reitera" od wiersza 12. z góry na stronicy 100. do wiersza 8. z góry na stronicy 101.

Z języka francuskiego:

Przetłómaczyć na język polski część ustępu 79. pod tytułem: „Le Panthéon" z podręcznika szkolnego pod tytułem: „La France (seconde partie) Dra Węckowskiego i Szaroty" od wiersza 6. z góry na stronicy 214. do wiersza 3. z góry na stronicy 215.

Z geometryi wykreślnej:

1. Dane są dwie proste wichrowate i płaszczyzna nachylona do obu rzutni; wyznaczyć prostą, która przecinając obie proste dane, jest zarazem prostopadłą do danej płaszczyzny.
2. Wykreślić rzuty stożka obrotowego, gdy dane są: rzuty jego wierzchołka „*W*“, ślady płaszczyzny „*P*“ jego podstawy, oraz kąt nachylenia „*α*“ tworzących do płaszczyzny podstawy.
3. Dane: prosta „*l*“ i dwa punkty „*A*“ i „*B*“. Przesunąć przez punkt „*A*“ płaszczyzny, któreby od punktu „*B*“ miały daną odległość „*d*“, zaś do prostej „*l*“ były równoległe.

Egzamin ustny odbył się w dniach od 19. do 21. czerwca pod przewodnictwem p. Kaspra Brzostowicza, dyrektora c. k. szkoły realnej w Krośnie, jako delegata c. k. Rady szkolnej krajowej.

Do egzaminudojrzałości zgłosiło słę 20 uczniów publicznych. Z tych otrzymało

świadectwo dojrzałości z odznaczeniem . .	4
świadectwo dojrzałości	15
reprobowano na pół roczu	1

Wykaz abituryentów, którzy złożyli egzamin dojrzałości w terminie letnim r. szk. 1910/11.

L. p.	Imię i nazwisko	Rok urodzenia	Miejsce urodzenia	Religia	uczęszczał do szkoły realnej lat	Uznany za	Przyszły zawód
1	Bałaban Zygmunt	1893	Jarosław w Galicyi	mojż.	7	dojrzałego	technika
2	Biliński Teofil	1891	Bilina „	gr. kat.	7	„	akademią roln.
3	Gerstenfeld Abraham	1892	Jarosław „	mojż.	8	„	akad. sztuk pięk.
4	Grüner Maurycy	1892	Drohobycz „	„	9	„	technika
5	Hand Maryan	1890	Wygnanka „	rz. kat.	8	„	kolej
6	Karczmarski Stanisł.	1890	Jarosław „	„	10	„	akademia roln.
7	Kwieciński Bolesław	1892	Skała „	„	8	„	technika
8	Loegler Władysław	1891	Lwów „	„	7	„	akad. roln. i las.
9	Madey Antoni	1892	Lwów „	„	9	dojrz. z odzn.	technika
10	Montag Hersch	1890	Jarosław „	mojż.	9	dojrzałego	medycyna
11	Płoskoń Karol	1889	Rudołowice „	rz. kat.	8	„	technika
12	Schneebaum Józef	1894	Jarosław „	mojż.	7	„	„
13	Skalij Stanisław	1892	Lwów „	gr. kat.	7	„	medycyna
14	Sobolewski Zygmunt	1894	Kołomyja „	rz. kat.	7	dojrz. z odzn.	technika
15	Stawarski Józef	1889	Dybków „	„	8	dojrzałego	weterynarya
16	Wasner Abraham	1890	Jarosław „	mojż.	10	dojrz. z odzn.	teologia
17	Wikarski Leon	1892	Nagórzanka „	rz. kat.	8	dojrzałego	akad. sztuk pięk.
18	Wilk Zdzisław	1893	Sieniawa „	„	8	dojrz. z odzn.	technika
19	Zawadowski Stefan	1892	Zaleszczyki st. „	gr. kat.	9	dojrzałego	teologia

V.

Zbiory naukowe.

1. Biblioteka nauczycielska.

Zakupiono:

Dziwiński. Wykłady matematyki. Kurs I. Tom 2gi. — Ernst. Budowa świata. — Sienkiewicz. Wiry. — Chołodecki. Księga pamiątkowa gimnazyum III. we Lwowie. — 18 stereoskopów i 50 fotografii z Tatr. — Fotografię komety Halleya. — Jahrbuch des höheren Unterrichtswesens in Oesterreich. — Szematyzm Galicyi. — Hoborski i Wilk. Zasadnicze pojęcia rachunku różniczkowego i całkowego.

Prenumerowano czasopisma:

Biblioteka warszawska. — Kosmos. — Kwartalnik historyczny. — Pamiętnik literacki. — Poradnik językowy. — Przegląd historyczny. — Ruch. — Wszechświat. — Geographische Zeitschrift. — Das literarische Echo. — Vierteljahrschrift für körperliche Erziehung. — Verordnungsblatt für d. Dienstbereich des k. k. Minist. f. K. u. U.

W darze otrzymano wydawnictwa c. k. Akademii Umiejętności w Krakowie, c. k. Rady szk. kraj. i Wydziału krajowego.

Biblioteka liczy 1113 pozycyi.

2. Biblioteka uczniów.

Zakupiono:

Przyborowski. Grom Maciejowicki. — Przyborowski. Adjutant naczelnego wodza. — Kraszewski. Kordecki. — Demolder-Mortkowiczowa. Serce ubogich. — Mortkowiczowa. Stacho. — Gąsiorowski. Huragan. — Sieroszewski. Zamorski dyabeł. — Sieroszewski. Ze świata. — Za wolność. — Eward. Ciche jezioro. — Gałęzowska. Wnuki. — Umiński. Bohater z pod Spionskopu.

Otrzymano w darze: Misye katolickie za r. 1910.

Stan biblioteki wynosi:

książek	polskich	pozycyi	605,
„	niemieckich	„	367,
„	ruskich	„	38,
„	francuskich	„	13,
podręczników	szkolnych		145,

3. Gabinet fizykalny.

Zakupiono:

Statyw do skioptikonu. — Przyrząd do okazania załamania się światła w cieczy.

Stan gabinetu:

I.	Mechanika ciał stałych	pozycyi	. . . . .	32
II.	„ cieczy	„	. . . . .	22
III.	„ gazów	„	. . . . .	22
IV.	Nauka o głosie	„	. . . . .	21
V.	„ o świetle	„	. . . . .	66
VI.	„ o cieple	„	. . . . .	30
VII.	„ o elektryczności	„	. . . . .	134
VIII.	Astronomia	„	. . . . .	6
IX.	Narzędzia i przybory	„	. . . . .	36

4. Gabinet historyi naturalnej.

Zakupiono:

Model ucha ludzkiego. — Tauber. 7 tablic ściennych z bakteryami i wymoczkami. — Niemann - Sternstein. 6 tablic ściennych do anatomii roślin.

Stan gabinetu:

a) z działu zoologii i anatomii:

Zwierząt wypchanych okazów 332

w tem dar Wielm. Pana Edwarda Micewskiego z Tuczemp w ilości 308 okazów.

Preparatów suchych 18

Preparatów w formalinie i spirytusie . . . 77

w tem zbiór ryb krajowych zebranych staraniem zawiadowcy gabinetu.

Modeli zoologicznych 12

Szkieletów 5

Tablic ściennych 161

Pudełka z owadami 4

b) z działu botaniki

Modeli botanicznych 33

Tablic ściennych 167

Zielnik z 300 roślin 1

c) z działu mineralogii i geologii:

Zbiór 240 minerałów	1
„ 150 skał	1
„ 100 skamielin	1
Modeli i przyrządów pomocn.	120
Tablic ściennych	18
Mikroskop	1
Preparatów mikroskopowych	93
Siekiera kamienna	1

5. Gabinet chemii.

Stan gabinetu:

Przyrządów	pozycyi	27
Utensyliów drewnianych . . .	„	12
„ metalowych . . .	„	36
„ porcelanowych . . .	„	8
„ szklanych	„	33
„ innych (rogow., asbest. i t. p.	„	7

6. Gabinet geometryi.

Zakupiono:

Graniastosłup prosty, trójboczny, z drzewa, składający się z trzech części. — Dwa trójściany symetryczne. — Dwa trójściany wzajemnie biegunowe. — Dwie płaszczyzny prostopadłe do trzeciej. Prosta prostopadła do płaszczyzny. — Graniastosłup ukośny, przecięty prostopadle do krawędzi. — Dwie siatki pobocznic ostrosłupów. — Płaszczyzna z prostą do niej prostopadłą i trzy rzutnie. — Rzuty dwu prostych wichrowatych na jednę płaszczyznę. — Płaszczyzna obracająca się około prostej. — Trzy modele do kolineacyi środkowej. — Model do okazania kładu płaszczyzny. – Trzy cyrkle drewniane. – Pudełko z cyrklami.

Stan gabinetu:

Modeli do nauki planimetryi	12
„ „ „ stereometryi	72
„ „ „ o punkcie, prostej i płaszczyźnie .	22
„ „ „ „ przekrojach brył . . .	6
„ „ „ „ przenikaniu brył . . .	19
„ „ „ „ cieniach	14

Przyrząd projekcyjny z żelaza na podstawce .	1
Dzieł z wzorami tomów	7
Przyborów do rysowania	40

7. Gabinet rysunków odręcznych.

Zakupiono:

2 modele z drzewa — Model jabłka. — Pudełko z drewnianymi modelami. — Czara z wysokiem uchem. — 7 naczyń Schliemanowskich. — Czara staro-amerykańka. — Naczynie rzymskie. — Naczynie z glazurą. — 4 modele geometryczne z drutu mosiężnego.

Stan gabinetu:

Modeli do nauki perspektywy	4
„ drewnianych	40
„ gipsowych, glinianych	242
„ szklanych	21
„ metalowych	34
Rozmaitych przedmiotów z natury . . .	102
Dzieł z worami, książek	45
Pudełko z modelami drewnianymi . . .	1

8. Zbiór geograficzno-historyczny.

Zakupiono:

Mapę: „Wirtschaftsgeographie“ Isbahr'a. — Mapę Galicyi Spetta.

Stan zbioru:

Map zwyktych	67
„ reliefowych	2
Globusów	2
Obrazów geograficznych, etnograficznych . .	93
„ historycznych	150
Atlasy	2
Model terminologiczny	1
Obrazy Hirta do geografii i etnografji tomów .	5
Obrazów do stereoskopu	22

9. Zbiór środków dona uki śpiewu.

Stan zbioru:

Fisharmonia	1
Śpiewników	16
Mszy kościelnych	8

VI.

Kronika zakładu.

Rok szkolny rozpoczął się dnia 3. września uroczystem nabożeństwem.

Dnia 9. września i 19. listopada Zakład brał udział w uroczystem nabożeństwie za spokój duszu ś. p. Cesarzowej Elżbiety a 28. czerwca za spokój duszy ś. p. Cesarza Ferdynanda I.

Dnia 4. października obchodził Zakład Imieniny Najjaśniejszego Pana uroczystem nabożeństwem.

Dnia 25. października obchodził Zakład uroczystość Patrona szkolnego św. Jana Kantego.

Dnia 31. stycznia odbył się uroczysty poranek ku czci Adama Mickiewicza.

Od 8. do 17. lutego lustrował Zakład c. k. krajowy Inspektor szkół Radca Dworu Jan Franke.

Dnia 15. lutego lustrował naukę rysunków odręcznych c. k. krajowy Inspektor szkół Antoni Stefanowicz.

W ciągu roku uczniowie wyznania katolickiego przystępowali trzykrotnie do spowiedzi i komunii św.; przed spowiedzią wielkanocną odbyły się rekolekcye uczniów obrządku rzymsko-katolickiego pod przewodnictwem Wielebnego księdza Mieczysława Lisińskiego, katechety gimnazyalnego, zaś rekolekcye obrządku grecko-katolickiego pod przewodnictwem księdza katechety tego obrządku.

Dnia 7. czerwca hospitował naukę religii rz. kat. komisarz biskupi ks. Feliks Świerzyński Dziekan i Proboszcz w Grodzisku.

Od 5. do 12. kwietnia profesor Wiktor Ostrowski i nauczyciele Tadeusz Kaniowski i Władysław Konieczny brali udział w kursie uzupełniającym z zakresu nauk humanistycznych dla nauczycieli szkół średnich w c. k. Uniwersytecie Jagiellońskim w Krakowie w myśl. rozp. c. k. Ministerstwa W. i O. z 23. lutego 1911 l. 2182. i rozp. c. k. R. S. K. z 8. marca 1911 l. 4291/IV.

Dnia 31. stycznia zakończono pierwsze, a dnia 30 czerwca drugie półrocze.

VII.

Ważniejsze rozporządzenia władz szkolnych.

Prezydyum c. k. Rady szkolnej krajowej rozp. z 30. sierpnia 1910 l. 366 przypomina Dyrekcyi zakładu ścisłe przestrzeganie przepisów w sprawie prawidłowego zachowania się uczniów w szkole i poza szkołą.

C. k. Rada szkolna krajowa rozp. z 19. czerwca 1910 l. 32555 podaje do wiadomości rozp. c. k. Ministerstwa W. i O. z 8. maja 1910 l. 19817 w sprawie fizycznego wychowania młodzieży w szkołach średnich.

Prez. c. k. Rady szk. kr. rozp. z 9. grudnia 1910 l. 512 poleca Dyrekcyi przypomnieć jak najenergiczniej uczniom obowiązujący przepis, który zakazuje uczniom brania udziału w jakichkolwiek publicznych występach i manifestacyach.

C. k. Rada szk. kr. rozp. z 8 grudnia 1910 l. 72581 normuje liczbę wypracowań pisemnych w drugim języku krajowym.

C. k. Rada szk. kr. rozp. z 6. lutego 1911 l. 1469/IV podaje do wiadomości, kiedy uczniowie klasy VII tracą uwolnienie od opłaty szkolnej za drugie półrocze.

Prez. c. k. Rady szk. kr. rozp. z 15. lutego 1911 l. 429 poleca Dyrekcyi przypomnieć uczniom, że na zasadzie § 26. przepisów szkolnych nie wolno im należeć do żadnych towarzystw, nawet sportowych.

C. k. Rada szk. kr. rozp. z 30. stycznia 1911 l. 595/IV poleca obchodzenie wszelkich uroczystości szkolnych tylko w czasie od nauki wolnym.

C. k. Rada szk. kr. rozp. z 4. marca 1911 l. 3838/IV przypomina Dyrekcyi obowiązek ścisłego przestrzegania, by uczniowie nie brali udziału w balach i zabawach publicznych.

C. k. Rada szk. kr. rozp. z 8. marca 1811 l. 4091/IV podaje do wiadomości, że według rozp. c. k. Ministerstwa W. i O. z 22. lutego 1911 l. 35613 1910 przedstawienia kinematograficzne należy zaliczać do przedstawień publicznych a tem samem stosować do nich przepisy szkolne.

C. k. Rada szk. kr. rozp. z 7. kwietnia 1911 l. 6520/IV podaje do wiadomości rozp. c. k. Ministerstwa W. i O. z 30. marca 1911 l. 8661 normujące ferye główne i świąteczne w szkołach średnich.

Prez. c. k. Rady. szk. kr. rozp. z 16. maja 1911 l. 184 poleca Dyrekcyi, by jak najsurowiej zakazała uczniom brania jakiegokolwiek udziału w akcyi wyborczej.

VIII.
Ćwiczenia fizyczne młodzieży.

Nauczyciele: Gartner, Gonet, Kaniak, Komęza, Ostrowski, Sykutowski, Stęczko, Tenczarowski i Wilk urządzali wycieczki z uczniami czyto piesze, czy na rowerach. O ile było możliwem‘ to połączone były z różnemi zabawami i grami.

Nauczyciele gimnastyki Sykutowski i Wilk w czasie pogodnym, w godzinach przeznaczonych na naukę gimnastyki, urządzali z odpowiedniemi klasami jużto zabawy i gry w ogrodzie „Sokoła“ już też wycieczki za miasto. W ten sposób kl. od I do VI miały po 25, kl. VII. 17 zabaw. Wszyscy uczniowie uczęszczający na gimnastykę, brali wtenczas obowiązkowo udział w zabawie, mianowicie z kl. I. 32, II. 39, III. 27, IV. 19, V. 21, VI. 22, VII. 19 uczniów. Ogółem było 167 zabaw.

Przerwy na pauzach spędzali uczniowie na podwórzu szkolnem na zabawach wolnych z przyrządami pod przewodnictwem profesora Gartnera według programu przezeń ułożonego.

W dniu 29. października 1910 r. uczniowie klas VI. i VII. w liczbie 38 zrobili wycieczkę koleją do cukrowni w Przeworsku pod przewodnictwem prof. Gartnera, w towarzystwie prof.: Kaniaka, Komęzy i Tenczarowskiego. Tam podzielono ich na 3 grupy, a inżynierowie oprowadzali ich po niej, objaśniając im jak najdokładniej nie tylko wszelkie urządzenia fabryczne, lecz także sposób wyrabiania i rafinowania cukru, począwszy od pierwszego stadyum, aż do pakowania całkiem gotowego cukru.

W chwilach wolnych od nauki szkolnej pracowali uczniowie pod przewodnictwem prof. Gartnera w ogrodzie botanicznym, istniejącym od trzech lat w parku miejskim.

Obraz wycieczek przedstawia następująca tabelka:

L.	Wycieczka	do	ilość uczniów z klas	Prowadzący nauczyciel
1	piesza	Wądołów	50, V, VI, VII	Sykutowski
2	"	Muniny	18, V	"
3	"	Pawłosiowa	15, VI	"
4	"	Przemyśla	4, V	"
5	"	Chłopic	19, VII	Sieczko, Tenczarowski,
6	na rowerach	Olchowy	8, z różnych kl.	Gonet, Ostrowski, Komęza.

Oprócz wyżej wymienionych wycieczek odbyli prof. Gonet, Komęza, Ostrowski, Sykutowski i Tenczarowski w towarzystwie 5—10 uczniów kilka mniejszych wycieczek na rowerach w okolice Jarosławia.

IX.

Zajęcia uczniów poza nauką szkolną.

Poza nauką szkolną uczniowie brali udział w Czytelni uczniów, pracowni mechanicznej i introligatorni.

Czytelnią uczniów kierował prof, Ostrowski, pracownią mechaniczną prof. Ks. Litwin, introligatornią prof. Gartner.

Czytelnia uczniów otwarta była w soboty od godz. 5—7. Sprawami Czytelni kierował Wydział złożony z 6 uczniów klas najwyższych z prof. Ostrowskim na czele.

Liczba członków wynosiła 51.

Urządzano 21 zebrań, podczas których wygłaszano następujące referaty:

1) O języku polskim.
2) O Powstaniu Listopadowem.
3) O Adamie Mickiewiczu.

Prenumerowano następujące pisma:

1) Tygodnik Illustrowany.
2) Nasz kraj.
3) Znicz.
4) Łan Młodzieży.
5) Śmigus.

Dnia 31. stycznia 1911 r. urządziła Czytelnia poranek ku czci Adama Mickiewicza, w którego program wchodziły deklamacye utworów wieszcza, poprzedzane objaśnieniami uczniów i profesorów. W przerwach śpiewał chór.

W tym roku poczyniono starania celem założenia własnej bibloteki, narazie zebrano 10 dzieł.

W pracowni mechanicznej pracowało w środę i sobotę popołudniu ogółem 18. uczniów, a mianowicie: z kl. I. 3, II. 7, III. 4, IV. 4.

Uczniowie wykonywali przedmioty następujące:

a) w zakresie stolarstwa i tokarstwa: ramy, sanki, łódkę, młotki drewniane, stołki pod kwiaty, oszczepy.

b) w zakresie ślusarstwa: toczono groty do oszczepów, poszczególne części składowe rowerów, oraz robiono ostrza do scyzoryków.

Zrobiono kilka modeli do geometryi z drutu mosiężnego i blachy, oraz kilka przyrządów fizykalnych.

Nadto wykonywali uczniowie różne naprawy dla siebie jak: rowerów, sanek, oszczepów, scyzoryków, łyżew, nożów, klatek.

Do introligatorni uczęszczali uczniowie w poniedziałki i czwartki, później we wtorki i piątki od godziny 3—7 wieczorem. Wszystkich uczniów uczęszczało 35 z kl. II., III. i V, przeważnie jednak z kl. II. i III. Przeciętnie pracowało po 10 uczniów. Oprawiali książki szkolne, własne i zakładowe, nadto atlasy, fotografie, robili i naprawiali modele do nauki mineralogii. Równocześnie odbywały się ćwiczenia zootomiczne. Uczniowie robili preparaty i wypychali okazy zoologiczne.

W zakładzie istnieje trzeci rok Kasa Oszczędności uczniów założona staraniem prof. Gartnera i zostająca pod jego zarządem. Rozwija się pomyślnie. Do kasy składało 115 uczniów. Najniższa wkładka wynosiła 2 h. Niektórzy uczniowie uskładali sobie w ten sposób dość znaczne kwoty, dochodzące niekiedy do kilkudziesięciu koron. Pieniądze składane umieszcza się na książeczce Kasy oszczędności miasta Jarosławia p. t. „Uczniowie Szkoły realnej“ dwa razy na miesiąc tj. 14 i 30. każdego miesiące.

Ogólna kwota, złożona tego roku, przekroczyła sumę 350 K.

X.

Pomoc dla ubogich uczniów.

Dochód.

	K. h.
Pozostałość kasowa z r. s. 1909/10 . . .	136·90
Dar Świet. Rady miasta Jarosławia . . .	100·—
„ “ Wydziału powiat. w Jarosławiu . .	50·—
„ Szan. Gminy wyzn. izrael. w Jarosławiu .	35·—
„ Dyrektora Dra Jana Ralskiego . . .	30·—
„ Profesorów egzaminujących . . .	3·18
„ N. N.	10·—
Od prof. Gartnera rabat od zeszytów . . .	38·30
Datki przy wpisach	115·62
„ profesorów i uczniów po egzortach rz. kat. .	13·54
Razem	532·64

Rozchód.

Za ubrania dla uczniów	63·—
„ lekarstwa	28·84
„ książki i oprawę	214·18
Razem	306·02

Bilans.

Dochód . .	532·64 K.
Rozchód .	306·02 „
Pozostałość .	226·62 K.

t. j. Pozostałość wynosi dwieście dwadzieścia sześć koron 62 h.

XI.
Statystyka.

	KLASA							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	Razem
1. Liczba uczniów.								
Z końcem r. s. 1909/10	30	28	21	27	23	28	24	181
Na początku r. s. 1910/11	39	40	30	22	22	25^{1}	21	199^{1}
W ciągu roku szkolnego wstąpiło	—	2	0^{1}	1^{1}	—		1	4^{2}
W ogóle przyjęto	39	42	30^{1}	23^{1}	22	25^{1}	22	203^{3}
z innych zakładów z promocyą	37	12	5^{1}	1	2	1	1	59^{1}
« « repetentów	—	1	2	—	1	—	—	4
z tutejszego zakładu z promocyą	—	26	21	18	17	18	20	120
« « repetentów	2	3	2	4	2	6^{1}	1	20^{1}
W ciągu roku szkolnego wystąpiło	8	2	2	4	2	1	1	20
Liczba uczniów z końcem r. s. 1910/11	31	40	28^{1}	19^{1}	20	24^{1}	21	183^{3}
publicznych	31	40	28	19	20	24	21	183
prywatnych	—	—	1	1	—	1	—	3
Razem	31	40	29	20	20	25	21	186
2. Miejsce urodzenia.								
Miasto Jarosław	9	10	9	8	7	12	8	63
Powiaty okoliczne (Jarosław, Cieszanów, Przeworsk)	6	12	5	2	4	4	3	36
Galicya z W. Ks. Krak.	15	17	13^{1}	9^{1}	9	7^{1}	10	80^{3}
Austrya dolna								1
Węgry		1						1
Rosya			1					1
Niemcy	1							1
Razem	31	40	28^{1}	19^{1}	20	24^{1}	21	183^{3}
3. Język ojczysty.								
Polski	28	38	21^{1}	19^{1}	20	21^{1}	18	165^{3}
Ruski	3	1	7	—	—	2	3	16
Niemiecki		1		—	—	1		2
Razem	31	40	28^{1}	19	20^{1}	24^{1}	21	183^{3}
4. Wyznania religijne.								
Rzymsko-katolickie	27	31	17^{1}	12^{1}	13	10^{1}	10	120^{3}
Greko-katolickie	3	5	7	1	1	2	3	22
Ewangielickie		2	—		—	1	—	3
Mojżeszowe	1	2	4	6	6	10	8	38
Razem	31	40	28^{1}	19^{1}	20	24^{1}	21	183^{3}
5. Wiek uczniów.								
Urodzonych w r. 1900	6							6
« 1899	9	3						12
« 1898	10	9	2					21
« 1897	6	17	4	1				28
« 1896		5	9	7				21
« 1895		6	8^{1}	5^{1}	1	2		22^{1}
« 1894			5	4	8	2	2	21
« 1894				2	5	6	3	16
« 1892					4	7	7	18
« 1891					2	5	2	9
« 1890						2	5	7
« 1899						0^{1}	2	2^{1}
Razem	31	40	28^{1}	19^{1}	20	24^{1}	21	183^{3}

	KLASA							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	Razem
6. Według miejsca pobytu rodziców.								
Miejscowych	17	19	12^1	14	13	17	14	106^1
Zamiejscowych	14	21	16	5^1	7	7^1	7	77^2
Razem .	31	40	28^1	19^1	20	24^1	21	183^3
7. Klasyfikacya.								
a) Z końcem r. s. 1910/11 . . .								
Chlubnie uzdolnionych . . .	1	1	4	—	—	1	2	9
Uzdolnionych	18	22	14^1	13	11	10	18	106^1
Nieuzdolnionych	4	5	5	1^1	8	8	1	32^1
Do egz. popr. przypuszczony .	8	12	5	5	1	5	—	36
Razem .	31	40	28^1	19	20	24	24	183^2
b) Uzupełnienie klasyfikacyi za rok szkolny 1910/11								
Do egzaminu poprawczego . .	11	3	7	8	6	5	2	42
Zdało	11	3	7	8	4	4	2	39
Zie zdało	—	—	—	—	2	1	—	3
Ostateczny wynik za r. s. 1910/11 .								
Chlubnie uzdolnionych . . .	—	4	—	—	1	—	2	7
Uzdolnionych	25	17	18	22	17	21	21	141
Nieuzdolnionych	5	7	3	5	5	6^1	1	32^1
Razem .	30	28	21	27	23	27^1	24	180^1

8 Opłaty.

Opłatę szkolną złożyło
w 1. półroczu ucz. publ. 77. pryw. 1
„ 2. „ „ „ 69 „ 1

Było uwolnionych
w 1. półroczu od całej opłaty 118 ucz. publ.
„ 2. „ „ „ „ 69 „ „

Opłata szkolna wynosiła
w 1. półroczu 2340 K
„ 2. „ 2100 „
Razem 4440 K.

Taksy wstępne wynosiły	281 K. 40 h.
Datki na środki naukowe	412 „ — „
Taksy na duplikaty świadectw	12 „ — „
Razem	705 K. 40 h.

9. Przedmioty obowiązkowe i względnie obowiązkowe.

Na ćwiczenia w pracowni chemicznej uczęszczało 17 uczniów.
Na naukę śpiewu uczęszczało 51 uczniów.
Na naukę języka ruskiego jako przedmiotu względnie obowiązkowego uczęczczało 18 uczniów.

10. Stypendya.

Stypendya pobierało 3 uczniów.
Ogólna kwota stypendyów wynosi 315 K.

XII.

SPIS UCZNIÓW

Z KOŃCEM ROKU SZKOLNEGO 1910/11.

Uczniowie chlubnie uzdolnieni oznaczeni są tłustemi czcionkami.

Klasa I.

Albiński Tadeusz
Barłóg Edmund
Cyran Józef
Dub Jan
Duda Franciszek
Duda Teodor
Ekert Karol
Estkowski Stanisław
Gall Aleksander
Gondek Władysław
Gosławski Maryan
Gurgul Wincenty
Kosiński Kazimierz
Kowalski Leon
Kozacki Tadeusz
Kozacki Stanisław
Kranz Mojżesz
Macierzanka Stanisław
Milli Włodzimierz
Pielichowski Michał
Schwarz Fryderyk
Sieminowicz Aleksander
Stanoszek Emilian
Svoboda Teodor
Trybułowski Karol
Welz Władysław
Wilczyński Józef
Witkowski Eugeniusz
Woźniakowski Mieczysław
Wraży Leon
Żak Jan

Klasa II.

Barański Józef
Bochno Teodor
Chomicki Władysław
Cząstka Stanisław
Feherpataky Eugeniusz
Flisowski Stanisław
Fussteig Szymon
Gajewski Eugeniusz
Goczyński Stanisław
Guzik Franciszek
Heil Wilhelm
Hrycak Władysław
Klein Oskar
Koczyrkiewicz Eugeniusz
Mączyński Egeniusz
Michalski Zdzisław
Mieszczyk Karol
Milli Zygmunt
Mück Henryk
Myczkowski Adam
Niziński Stanisław
Ostrihańsky Ludwik
Pietruszka Zygmunt
Rech Stanisław
Sommer Bolesław
Stańkowski Stanisław
Starek Józef

Kraśniński Fryderyk
Krzeczkowski Józef
Leib Teodor
Łojak Mieczysław
Malles Eliasz
Markowski Waleryan
Stolarczyk Egeniusz
Szwec Stefan
Wardecki Feliks
Wiszniewski Roman
Wójcicki Roman
Zawisza Emilian

Klasa III.

Darowski Jerzy
Denasiewicz Kazimierz
Durkalec Wilhelm
Harassek Adam
Haszczyc Orestes
Hatata Anatol
Hatała Roman
Ilkowski Stanisław
Kałamarz Roman
Kapuściński Władysław
Kondro Jan
Kratz Joachim
Król Antoni
Kulczycki Eugeniusz
Kurzweil Samuel
Latocha Stanisław
Rembisz Jan
Rokosz Jan
Rosenberg Leiser
Sanak Mieczysław
Sozański Nikodem
Stölzer Emanuel
Szczekot Augustyn
Szumski Zenon
Wierzbicki Eugeniusz
Wochanka Wilhelm
Zawadil Wilhelm
Zawitkowski Stanisław
Sarzyńska Adela (pryw.)

Klasa IV.

Bojakowski Michał
Eilberg Izrael
Hartfelder Jan
Kaucki Stanisław
Kling Henryk
Komarnicki Bolesław (pryw.)
Kowalski Władysław
Maksymowicz Seweryn
Mizgalewicz Julian
Narcyzenfeld Eisik
Niemczyk Franciszek
Pastuch Leon
Piela Stanisław
Powolny Władysław
Raab Izydor
Rübner Filip
Sandig Maurycy
Sobolewski Karol
Ways Tadeusz
Wondraczek Maryan

Klasa V.

Bikowski Ludwik
Brathspiess Gabryel
Donenhirsch Abraham
Lorenz Maryan
Metzger Izak
Michalski Jan
Mikulski Jan
Pastuch Jan
Petzelt Jan
Piela Bronisław
Pląskowski Maryan
Rosenbaum Izak
Sonnenblick Perez
Wiatr Władysław

Naspiński Jan
Nowakowski Ludwik
Nowotarski Jan
Wnęk Jan
Woller Kopel
Zieliński Adolf

Klasa VI.

Baczyński Tadeusz
Balaban Alfred
Chmielowski Czesław
Dobrzański Ziemowit
Galotta Józef
Gwizda Zygmunt
Klang Natan
Köhler Rudolf
Lipper Adolf
Łowicki Edmund
Menkes Teodor
Morawiecki Adolf
Mryczko Adam
Mühlbauer Józef
Mühlbauer Rudolf
Podhorecki Michał
Ringel Izydor
Ringel Maurycy
Schreckinger Joachim
Starek Jan
Szkolnicki Aleksander
Turnheim Saul
Wiszniewski Edward
Wrażej Eugeniusz

Klasa VII.

Balaban Zygmunt
Biliński Teofil
Gerstenfeld Abraham
Grüner Maurycy
Hand Maryan
Karczmarski Stanisław
Knispel Benzion
Knispel Mojżesz
Kwieciński Bolesław
Loegler Władysław
Madey Antoni
Montag Hersch
Płoskoń Karol
Schneebaum Józef
Skalij Stanisław
Sobolewski Zygmunt
Stawarski Józef
Wąsner Abraham
Wikarski Leon
Wilk Zdzisław
Zawadowski Stefan

W Jarosławiu, dnia 30. czerwca 1911.

Dr. Jan Ralski
dyrektor.

Wykaz książek szkolnych, które w tutejszym zakładzie będą używane w roku szkolnym 1910/11.

KLASA I.

Religia. Ks. Ślósarz, Katechizm religii katolickiej. Wyd. 3. Lwów 1908. Opr. 1 K.
Serednyj Katechizm chrystyjańsko-katoł. religii, odobrenyj austryjsk. Epyskopatom. Lwiw 1906. Opr. 80 h.

Język polski. Konarski, Zwięzła gramatyka języką polskiego. Lwów 1902. Opr. 50 hal. — Dr. Maryan Reiter, Czytania polskie dla I. klasy z illustracyami. Lwów 1910. Opr. 3.

Język niemiecki. German, Petelenz, Gayczak, Ćwiczenia niemieckie dla I. klasy. Wyd. 7. Lwów 1910. Opr. 2 K. 40 h.

Geografia. Benoni i Tatomir, Krótki rys geografii, oprac. Wierzbicki. Wyd. 9. Lwów 1908. Opr. 1 Kor.

Historya powszechna. B. Gebert i G. Gebertowa, Opowiadania z dziejów ojczystych, Lwów 1910. Opr. 2 K 20 h.

Matematyka. Ignacy Kranz. Arytmetyka na klasę I. Kraków 1911. Opr. 1 K 50 h. — Ignacy Kranz. Geometrya poglądowa na kl. I. Opr, 1 K 20 h.

Historya naturalna. Nusbaum - Wiśniowski, Wiadomości z zoologii dla niższych klas szkół średnich. Wyd. 3. Lwów 1910. Opr. 3 K 60 h. — Rostafiński, Botanika szkolna na klasy niższe. Wyd. 6. Kraków 1907. Opr. 2 K 60.

KLASA II.

Religia. Jak w kl. I.

Język polski. Małecki, Gramatyka języka polskiego szkolna. Wyd. 9. i 10. Lwów 1906. Opr. 2 K 40 h. — Reiter, Czytania polskie dla II. klasy (w druku).

Język niemiecki. German i Petelenz, Ćwiczenia niemieckie dla II. klasy. Wyd. 5. Lwów 1907. Opr. 2 K 20 h.

Geografia. Siwek, Geografia dla II. i III. klasy (w druku).

Historya powszechna. Dr. Kazimierz Krotoski, Opowiadania z dziejów monarchii austr. węg. w związku z historyą powszechną. Lwów 1910. Opr. 2 K 50 h.

Matematyka. Ignacy Kranz, Arytmetyka na klasę II. Kraków 1910. Opr. 1 K 50 h.

Historya naturalna. Rostafiński, Botanika szkolna dla klas niższych. Wyd. 6. Kraków 1907. Opr. 2 K 60 hal. — Nusbaum - Wiśniowski, Wiadomości z zoologii dla niższych klas szkół średnich. Wyd. 3. Lwów 1910. Opr. 3 K 60 h.

Geometrya i rysunki geometryczne. Ign. Kranz. Geometrya poglądowa, na niższe klasy szkół średnich. Część I. Kraków 1911. Opr. 1 K 40 h.

KLASA III.

Religia. Ks. Jougan, Liturgika. Wyd. 1—3. Lwów 1906. Opr. 1 K 40 h. — Ks. Dąbrowski, Historya biblijna zakonu starego. Wyd. 5. Lwów 1911. Opr. 1 K 70 h.
Liturgika. wyd. 3. Torońskoho. Lwiw 1905. Opr. 1 K 60 h. W półroczu II.: Torońskyj. Istorya biblijna staroho zawita. Lwiw 1911.

Język poski. Małecki, Gramatyka języka polskiego szkolna. Wyd. 9. i 10. Lwów 1905. Opr. 2 K 40 h. — Czubek-Zawiliński. Wypisy polskie dla III. klasy. Lwów 1904. Wyd. 2. Opr. 2 K.

Język niemiecki. German i Petelenz, Ćwiczenia niemieckie dla klasy III. Wyd. 4. Lwów 1907, wyczerpane; przygotowuje się wyd. 5. zmienione. — Jahner. Deutsche Grammatik, Wyd. 3. Lwów 1907. Opr. 2 K 20 h.

Język francuski. Dr. St. Węckowski, Książka do nauki języka francuskiego dla klasy III. szkoły realnej. Lwów 1908. Opr. 1 K 80 h.

Geografia. Baranowski i Dziedzicki, Geografia powszechna oprac. Dr. Eug. Romer, wyczerpane.

Historya. Dr. Kazimierz Krotoski, Opowiadania z dziejów monarchii austr.-węg. w związku z historyą powszechną. Lwów 1910. Opr. 2 K 50 h. — Zipper, Opowiadania z mitologii Greków i Rzymian. Lwów 1897. Opr. 2 K 40 h.

Matematyka. Ignacy Kranz, Arytmetyka dla klasy III. Kraków 1910. Opr. 1 K 80 h.

Fizyka. Kawecki i Tomaszewski, Fizyka dla niższych klas szkół średnich. Wyd. 6. Kraków 1910. Opr. 2 K.

Geometrya i rysunki geometryczne. Kranz Ignacy, Geometrya poglądowa. Część II. Kraków 1908. Opr. 2 K.

KLASA IV.

Religia. Ks. Dąbrowski. Historya biblijna zakonu nowego. Wyd. 1–3. Stanisławów 1902. Opr. 1 K 80 h.
Torońskyj: Istorya biblijna nowoho zawita, wydanie II. Lwiw 1911. Opr. 1 K. 60 h.

Język polski. Małecki, Gramatyka języka polskiego szkolna. Wyd. 9. i 10. Lwów 1905. Opr. 2 K 40 h. — Próchnicki, Wzory poezyi i prozy. Wyd. 2. i 3. Lwów 1906. Opr. 3 K.

Język niemiecki. German-Petelenz-Gayczak. Ćwiczenia niemieckie dla IV. klasy. Wyd. 4. Lwów 1910. Opr. 3 K. – Jahner, Deutsche Grammatik. Wyd. 3. Lwów 1907. Opr. 2 K 20 h.

Język francuski. Dr. Stanisław Węckowski, Książka do nauki języka francuskiego dla IV. klasy szkoły realnej. Lwów 1910. Opr. 2 K 80 h.

Geografia. Benoni-Majerski, Geografia austr.-węgierskiej monarchii. Wyd. 5 zmienione i przerobione przez Bolesława Baranowskiego. Lwów 1907. Opr. 1 K 20 h.

Historya. Zakrzewski. Historya powszechna. Część I. Wyd. 1—3. Kraków 1902. Opr. 2 K 40 h.

Matematyka. Dziwiński, Podręcznik arytmetyki i algebry dla klas wyższych. Wyd. 4. Lwów 1910. Opr. 4 K 50 h.

Fizyka. Kawecki i Tomaszewski. Fizyka dla niższych klas szkół średnich. Wyd. 6. Kraków 1910. Opr. 2 K.

Chemia. Duchowicz-Wiśniowski. Wiadomości z chemii i mineralogii dla klas niższych (w druku).

Geometrya i rysunki geometryczne. Przygotowują się dwa nowe podręczniki geometryi dla klasy IV. i V.

KLASA V.

Religia: Ks. Dr. Maciej Sieniatycki, Ogólna katolicka dogmatyka. Lwów 1906, Opr. 2 K.
W I. półroczu: A. Torońskij: Chrystyańsko-katoł. dogmatoka fundamentalna i apologetyka dla klas wyższych. Wydanie II. Lwiw 1906. Opr. 2 K,

W II. półroczu: A. Torońskij: Chryst.-katoł. dogmatyka czastna. Wydanie II Lwiw 1906.

Język polski: Tarnowski i Bobin, Wypisy polskie dla szkół realnych i seminaryów nauczycielskich. Tom I. Wyd. I—3 Lwów 1905. Opr. 3 K.
Zathey. Antologia rzymska. Lwów 1898. Opr. 3. K.

Język niemiecki: Ippoldt und Stylo, Deutsches Lesebuch für die oberen Klassen der galizischen Mittelschulen I. Teil V Klasse. Wyd. 2. Lwów 1907. 4. K.

Język francuski: Dr. Stanisław Węckowski. Książka do nauki języka francuskiego dla klasy V. Lwów 1910. 3 K 20 h.

Historya: Zakrzewski, Historya powszechna. Część II. Wyd. 3 i 4. Kraków 1906. Opr. 2 K. 40 h.

Matematyka: Dziwiński, Podręcznik arytmetyki i algebry dla klas wyższych. Wyd. 4. Lwów 1910. Opr. 4 K. 50 h.
Kranz. Logarytmy. Kraków 1900. 1 K. 20 h.

Historya naturalna: Rostafiński, Botanika szkolna dla klas wyższych. Wyd. 2. Kraków 1901. 3. K.

Chemia: Brunner i Tołłoczko, Chemia nieorganiczna. Kraków 1908. Wyd. III. 3 K. 60 h.

Geometrya i rysunki geometyczne: Močnik-Maryniak, Geometrya dla klas wyższych. Opr. 4 K.
Łazarski, Zasady geometryi wykreślnej (z atlasem). Wyd. II. Lwów 1901. 3 K. 40.

KLASA VI.

Religia: Ks. Szczeklik, Etyka katolicka. Wyd. 3. i 4. Tarnów 1908. Opr. 2 K.
Dr. Dorożyńskyj: Etyka. Lwiw 1904 2 K.

Język polski: Tarnowski i Bobin, Wypisy polskie dla szkół realnych i seminaryów nauczycielskich. Tom I. Wyd. 3. Lwów 1905. Opr. 3. K.
Tarnowski i Bobin, Wypisy polskie dla szkół realnych i seminaryów nauczycielskich. Tom II. Wyd. 1—2. Lwów 1900 Opr. 3 K.
Zathey. Antologia grecka. Lwów 1894. Opr. 4 K.
Zathey. Antologia rzymska. Lwów 1898. Opr. 3 K.

Język niemiecki: Ippoldt u. Stylo. Deutsches Lesebuch für die

oberen Klassen der galiz. Mittelschulen. III Teil VII. Klasse Lwów 1907. Wyczerpane. 4 K.
Przygotowuje się nowe wydanie.
Lektura szkolna obowiązkowa. Goethe: „Egmont" Wydanie Tow. naucz. szkół wyższych. — Lwów. Cena 50 h.

Język francuski: Dr. Stanisław Węckowski i Dr. J. Szarota La France, Lwów 1910. Opr. 3 K. 50 h.

Historya: Zakrzewski, Historya powszechna. Część III. Wyd. 2. skrócone. Kraków 1903. Opr. 2 K. 80 h.

Matematyka: Dziwiński, Podręcznik arytmetyki i algebry dla klas wyższych. Wyd. 3. Lwów 1906. Opr. 4 K.
Kranz, Logarytmy. Kraków 1900. Opr. 1 K. 20 h.
Kranz, Trygonometrya kulista w zdaniach. Wyd. 1. i 2. Kraków 1906. 30 h.

Historya naturalna: Dr. Józef Nusbaum. Zoologia dla klas wyższych szkół średnich. Lwów 1909 3 K. 60 h.

Chemia: Duchowicz-Bolland, Chemia organiczną. Lwów 1906 2 K. 50 h.

Fizyka: Kawecki i Tomaszewski, Fizyka dla wyższych klas szkół średnich. Kraków 1906. Opr. 3 K. 40 h.

Geometrya i rysunki geometryczne: Jak w kl. V.

KLASA VII.

Religia: Ks. Walenty Gadowski, Zarys historyi kościoła katolickiego. Wyd. 3. Kraków 1911. Opr. 3 K.
Wapler-Stefanowycz: Istorya chrystyańsko-kat. cerkwy. Lwiw 1903. 2 K.

Język polski: Tarnowski i Bobin. Wypisy polskie. Część II. Wyd. 1—2. Lwów 1900. Opr. 3 K.
Zathey, Antologia grecka, Lwów 1894 Opr. 4 K.
Zathey, Antologia rzymska. Lwów 1897. Opr. 3 K.

Język niemiecki: Ippoldt u. Stylo, Deutsches Lesebuch für die oberen Klassen der. galiz. Mittelschulen III Teil VII. Klasse Lwów 1907. Opr. 4 K.
Ippoldt, Deutsches Lesebuch für die oberen Klassen der galiz. Mittelschulen IV Teil VIII. Klasse. Opr. 4 K.
Lektura szkolna obowiązkowa, Schiller: „Maria Stuart" Wydanie Graesera. — Cena 60 h.

Język francuski: Dr. St. Węckowski i Dr. J. Szarota. La France. Opr. 4 K.

Historya: Zakrzewski, Historya powszechna. Część III. Wyd. 2. skrócone. Kraków 1903. Opr. 2 K. 80 h.
Lewicki Zarys dziejów Polski i krajów ruskich z nią połączonych. Wyd. 1—3. Kraków 1901. Opr. 2 K.
Głąbiński-Finkel, Historya i statystyka austryacko-węgierskiej monarchii. Wyd. 3. (w druku).

Matematyka: Dziwiński, Zasady algebry. Wyd. 2. Lwów 1898. Opr. 3 K. 60 h.
Kranz, Logarytmy, Kraków 1900. Opr. 1 K. 20 h.

Historya naturalna: Łomnicki, Mineralogia i geologia. Wyd 5. Lwów 1909. 1 K. 60 h.

Fizyka, Kawecki i Tomaszewski, Fizyka dla wyższych klas szkół średnich. Wyd. 3. i 4. Kraków 1906. Opr. 3 K. 40 h.

Geometrya i rysunki geometryczne: Jak w kl. V.

Podręczniki dla nauki religii mojż.: Z. Kammerling, Wiara i ustawa, nauka o wierze i powinnościach izraelickich. Lwów 1906,
S. Spitzer, Modły Izraelitów, Kraków 1907,
S. Spitzer, Historya biblijna oraz zasady wiary i moralności, Kraków 1907.

Podręczniki dla nauki języka ruskiego:

KLASA III.

Bohdan Łepki: Czytanka Ruska 1904.
Kokorudz-Konarski: Gramatyka ruska dla Polaków. Lwów 1900.

KLASA IV.

Łuczakowski: Wzory poezyi i prozy, wyd. 2. Lwów 1909.
Kokurudz-Konarski: Gramatyka ruska.

KLASA V.

W I. Podręczniki jak w klasie IV.
W II. Barwiński: Wybir z narodnoi literatury ukraińsko-ruskoi dla seminaryj uczytelskych. Lwiw 1910.

KLASA VI.

Barwiński: Wybir z narodnoi literatury jak w II. półroczu kl. V.
