SPRAWOZDANIE

DYREKCYI

C. K. WYŻSZEGO GIMNAZYUM REALNEGO

IMIENIA FRANCISZKA JÓZEFA

w Drohobyczu

za rok szkolny

1893.

LWÓW 1893.
NAKŁADEM FUNDUSZU NAUKOWEGO.

Z drukarni naukowego Towarzystwa imienia Szewczenki
pod zarządem K. Bednarskiego.

O sześciokącie Pascala i sześcioboku Brianchona. (Ueber das Pascal'sche Sechseck und das Brianchon'sche Sechsseit.) Napisał Roman Moskwa.

Wiadomości szkolne, przez dyrektora.

O sześciokącie Pascala i sześcioboku Brianchona.

§. 14.

Zestawmy rezultaty paragrafów poprzednich z ostatnim:

W paragrafach poprzednich było 15 promieni, które przecinały się w 105 punktach.

Czterdzieści pięć z tych punktów rozłożonych jest na promieniach Pascala tak iż przez każdy punkt przechodzą cztery promienie, a na każdym promieniu leżą trzy punkty. Sześćdziesiąt pozostałych punktów tworzy wierzchołki sześćdziesięciu sześciokątów Pascala, odpowiadających sześćdziesięciu promieniom Pascala.

Boki każdego z tych sześćdziesięciu sześcioboków zestawione stosownie w trzy pary przecinają się w trzech punktach leżących na odpowiednym promieniu Pascala.

Pod pewnymi warunkami 60 owych wierzchołków utworzy sześć wierzchołków leżących na krzywej C_2 drugiego stopnia.

W paragrafie ostatnim było 15 punktów, które połączone były 105 promieniami.

Czterdzieści pięć z tych promieni przechodzi przez punkty Brianchona tak, iż na każdym promieniu leżą cztery punkty, a przez każdy punkt przechodzą trzy promienie. Sześćdziesiąt pozostałych promieni tworzy boki sześćdziesięciu sześcioboków Brianchona, odpowiadających sześćdziesięciu punktom Brianchona.

Wierzchołki sześcioboku każdego zestawione stosownie w trzy pary wyznaczają trzy promienie przechodzące przez odpowiedny punkt Brianchona.

Pod pewnymi warunkami 60 owych promieni utworzy sześć promieni osłaniających krzywą E_2 drugiej klasy.

Wyszedłszy od zupełnie ogólnych systemów Pascala i Brianchona doszliśmy więc do całkiem szczególnych, to jest do takiego systemu Pascala, który jest wyznaczony przez sześć punktów leżących na C_2 i takiego systemu Brianchona, który jest wyznaczony przez sześć stycznych do E_2. Możemy teraz pójść odwrotną drogą i wykazać, że każdy sześciokąt wpisany w C_2 wyznacza system Pascala, a każdy sześciobok opisany na E_2 system Brianchona.

Jako twierdzenia zasadnicze, od których wyjdziemy, są twierdzenia Pascala i Brianchona. Okoliczność ta, że krzywe drugiego stopnia są zarazem krzywymi drugiej klasy i odwrotnie, wyświeca stosunek w jakim te twierdzenia względem siebie stoją. Z całego toku dotychczasowego przeprowadzenia widać, że na płaszczyźnie punkt i promień są równouprawnionymi elementami. Każdemu twierdzeniu wyprowadzonemu dla punktu odpowiada podobne twierdzenie dla promienia. Prawo to zwane prawem dwoistości tyczy się i utworów powstałych przez ruch punktu lub promienia, to znaczy, że z każdego twierdzenia udowodnionego dla krzywych n-go stopnia, można na podstawie prawa dwoistości wyprowadzić odpowiedne twierdzenie dla krzywych n-ej klasy. W takim właśnie stosunku stoją do siebie twierdzenia Pascala i Brianchona. Twierdzenia te brzmią:

Przeciwłegłe boki sześciokąta wpisanego w krzywą drugiego stopnia przecinają się w trzech punktach leżących na tym samym promieniu (twierdzenie Pascala).

Przeciwległe wierzchołki sześcioboku opisanego na krzywej drugiej klasy połączone są trzema liniami przechodzącymi przez ten sam punkt (twierdzenie Brianchona).

Oba twierdzenia zostały udowodnione już w paragrafach poprzednich, a jeszcze raz wypowiedziane w punkcie 3) na początku tego paragrafu.

Ponieważ jednak są zasadniczymi twierdzeniami dla następnej części rozprawki, w której pójdziemy odwrotną drogą, przeto wypada je niezawiśle od rezultatów poprzedniej części udowodnić.

Jeżeli wierzchołki sześciokąta naznaczymy w pewnym porządku przez 1, 2, 3, 4, 5, 6, a bok łączący n. p. punkty 1 i 2 przez (12), natenczas bokami przeciwległymi są:

(12) i (45)	rozłączone	wierzchołkiem	3
(23) i (56)	„	„	4
(34) i (61)	„	„	5

Z korzyścią będzie zauważyć, że jeżeli zmienimy porządek boków rozłączonych wierzchołkiem 4, napiszemy więc jako boki przeciwległe (12) i (45), (56) i (23), (34 i 61), natenczas pierwsze boki tych trzech par są wszystkie nieparzyste, przeciwległe zaś im drugie boki są wszystkie parzyste, tudzież, że tak system nieparzystych jako też system parzystych przechodzi przez wszystkie wierzchołki sześciokąta. Promienie (14), (25), (36) nazywają się głównymi przekątniami sześciokąta i przechodzą również przez wszystkie wierzchołki.

Niech więc będzie sześciokąt 1 2 3 4 5 6 wpisany w krzywą C_2. Obierzmy dwa z jego wierzchołków n. p. 1 i 5 jako środki dwóch pęków projektywnych, przez których przecięcie krzywa powstała. Cztery pozostałe wierzchołki wyznaczają cztery pary odpowiednych promieni

(12), (13), (14), (16) i (52), (53), (54), (56)

Musi być więc funkcya anharmoniczna

[(12) (13) (14) (16)] = [(52), (53), 54), (56)]

Przetnijmy pęk 1 promieniem (34) a pęk 5 promieniem (23) to otrzymamy na tych promieniach podziały projektywne albowiem (α, 3, 4, β) = [(12), (13), (14), (16)] = [(52), (53), (54), 56)] = (2, 3, γ, δ) gdzie α i β oznaczają punkty przecięcia promienia (34) z promieniami (12) i (16) a γ i δ punkty przecięcia promienia (23) z promieniami (54) i (56). Punktom α, 3, 4 β podziału na (34) odpowiadają punkty 2, 3, γ, δ podziału na (23). Ponieważ zaś punkt wspólny 3 obu podziałów odpowiada sam sobie przeto podziały te są perspektywne a więc promienie (α 2) (4 γ) i (β δ) muszą przechodzić przez ten sam punkt. To udowadnia twierdzenie Pascala. Albowiem punkt β jest punktem przecięcia przeciwległych boków (16) i (34), punkt δ punktem przecięcia się boków przeciwległych (56) i (23). Promień (β δ łączy więc punkty przecięcia dwóch par przeciwległych boków, a jakeśmy udowodnili przechodzi także przeż punkt przecięcia promieni (α 2) i (4 γ) czyli promieni (12) i (45) a więc przez punkt przecięcia trzeciej pary przeciwległych boków.

Podobnie udowodnimy twierdzenie Brianchona jeżeli boki sześcioboku naznaczymy w pewnym porządku przez I, II, III, IV, V, VI a przez (I II) punkt przecięcia boków I i II, natenczas wierzchołkami przeciwległymi są:

(I II) i (IV V) rozłączone bokiem III
(II III) i (V VI) „ „ IV
(III IV) i (VI I) „ „ V

Obierzmy n. p. boki I i V jako osi dwóch podziałów projektywnych, które na nich wyznaczają inne styczne krzywej E_2: Cztery inne boki wyznaczają cztery pary odpowiednych punktów.

(I II), (I III), (I IV), (I VI),
(V II), (V III), (V IV), (V VI).

Funkcye anharmoniczne tych punktów muszą wiąc być równe a więc

[(I II), (I III), (I IV), (I VI)] = [(V II), (V III), (V IV), (V VI)]

Połączmy punkty podziału na I z punktem (III IV) promieniem A, III, IV, B, a punkty podziału na V z punktem (II III) promieniami II, III, G, D, a otrzymamy dwa pęki projektywne tak, że promieniom A, III, IV, B pęku pierwszego odpowiadają promienie II, III, G, D pęku drugiego. Jak widzimy wspólny promień III odpowiada sam sobie, zatem pęki te są perspektywne, przeto trzy inne pary odpowiednych promieni przecinają się w trzech punktach tej samej prostej, więc punkta (A II), (IV G) i (B D) leżą na tej samej prostej. Przez to twierdzenie Brianchona jest udowodnione. Albowiem promień B łączy przeciwległe wierzchołki (III IV) i VI I), promień D łączy przeciwległe wierzchołki (II III) i (V VI). Punkt przecięcia promieni B i D t. j. punkt (B D) leży jeszcze na linii która łączy punkta (A II) i (G IV), które właśnie są trzecią parą wierzchołków przeciwległych (I II) i (IV V).

Twierdzenia Pascala i Brianchona dadzą się wyprowadzić z twierdzeń Carnota, które przyjmujemy jako znane. Z twierdzeń tych to, które się odnosi do krzywych stopnia n-go opiewa:

Jeżeli krzywą n-go stopnia połączymy z trójkątem, natenczas każdy bok tego przetnie krzywą w n punktach, a jeżeli dla każdego z tych punktów utworzymy stosunek odcinkowy ze względu na wierzchołki trójkąta na tym samym boku leżące, natenczas iloczyn wszystkich 3 n stosunków równa się + 1.

Mając więc sześciokąt 1 2 3 4 5 6 wpisany w krzywą C_2, obierzmy trójkąt utworzony z nieparzystych jego boków (12), (34), (56) jako trójkąt fundamentalny.

Bok parzysty (23) przecina boki tego trójkąta względnie w punktach 2, 3, (23, 56), bok parzysty (45) w punktach (12, 45) 4, 5 a bok (61) w punktach 1, (61, 34), 6.

Jeżeli więc stosunki odcinkowe tych punktów, utworzone tak jak twierdzenie Carnota wymaga, naznaczymy przez q_2, q_3. r, s q_4, q_5, q_1, t, q_6, natenczas musi być według twierdzenia Carnota

$$q_2\ q_3\ r = 1,\ s\ q_4\ q_5 = 1,\ q_1\ t\ q_6 = 1$$
$$\text{a więc i } q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5\ q_6\ r\ s\ t = 1$$

Ponieważ zaś krzywa C_2 przecina boki trójkąta fundamentalnego w punktach 1, 2, 3, 4, 5, 6, tedy według twierdzenia Carnota musi być $q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5\ q_6 = 1$, co zestawione z ostatniem zrównaniem daje r s t = 1. Z tego wynika że punkty (23, 56), (12, 45) i (61, 34) leżą na tym samym promieniu a to jest właśnie twierdzenie Pascala.

Odwrotnie, gdybyśmy wiedzieli, że trzy ostatnie punkty leżą na prostej, że więc r s t = 1, natenczas musielibyśmy wnosić że 6 pierwszych leży na krzywej stopnia drugiego, co innymi słowy tak brzmi:

Jeżeli z 9 punktów, w których się dwa systemy, każdy złożony z trzech prostych, przecinają, trzy leżą na jednym i tym samym promieniu, natenczas sześć innych leży na krzywej stopnia drugiego.

Twierdzenie Carnota odnoszące się do krzywych n-ej klasy opiewa:

Jeżeli krzywą n-ej klasy połączymy z trójkątem, natenczas z każdego wierzchołka trójkąta można poprowadzić n stycznych do krzywej, a jeżeli dla każdej stycznej utworzymy stosunek wstaw ze względu na boki trójkąta przez ten sam wierzchołek przechodzące, natenczas iloczyn wszystkich 3 n stosunków równa się $= (-1)^n$.

Punkt możemy uważać jako krzywę pierwszej klasy, do której z każdego innego punktu można poprowadzić tylko jednę styczną. Jeżeli więc którykolwiek punkt P połączymy z wierzchołkami O_1 O_2, O_3 trójkąta fundamentalnego promieniami p_1, p_2, p_3, natenczas promienie te można uważać jako styczne wyprowadzone z wierzchołków trójkąta O_1 O_2 O_3 do krzywej pierwszej klasy P. Musi być więc według twierdzenia Carnota $q_1\ q_2\ q_3 = 1$ jeżeli q_1, q_2, q_3 oznaczają stosunki wstaw tych promieni.

Mając więc sześciobok I II III IV V VI opisany na krzywej drugiej klasy obierzmy jego wierzchołki nieparzyste (I II) (III IV) (V VI) jako wierzchołki trójkąta fundamentalnego.

Z wierzchołkami trójkąta fundamentalnego połączony jest wierzchołek

parzysty (II III) względnie promieniami II, III, [(II III) (V VI)]
„ (IV V) „ „ [(I II) (IV V)] IV, V
„ (VI I) „ „ I [(III IV) (VI I)] VI.

Jeżeli więc stosunki odcinków tych promieni, utworzone tak jak tego twierdzenie Carnota wymaga, naznaczymy przez

$$q_2,\ q_3,\ r$$
$$s,\ q_4,\ q_5$$
$$q_1\ t,\ q_6$$

natenczas musi być według twierdzenia Carnota

$$q_2\ q_3\ r = -1,\ s\ q_1\ q_5 = -1,\ q_1\ t\ q_6 = -1$$
$$\text{a więc i } q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5\ q_6\ r\ s\ t = -1$$

Ponieważ zaś promienie I II III IV V VI są stycznymi wyprowadzonymi z wierzchołków trójkąta fundamentalnego do krzywej drugiej klasy, przeto według twierdzenia Carnota musi być $q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5\ q_6 = (-1)^2 = 1$, co zestawione ze zrównaniem ostatniem daje $r\ s\ t = -1$. Z tego wynika że promienie [(II III), (V VI)], [(I II) (IV V)], [(III IV) (VI I)] przechodzą przez ten sam punkt, a to jest właśnie twierdzenie Brianchona.

Twierdzenie Pascala da się jeszcze w następujący sposób udowodnić.

Zrównanie krzywej n-go stopnia we współrzędnych trójkątowych można napisać w kształcie

$$X_0\ x_1^n + X_1\ x_1^{n-1} + X_2\ x_1^{n-2} + \ldots X_n = 0,$$

gdzie w ogóle X_k jest jednorodną funkcyą współrzędnych x_2 i x_3 k^{go} stopnia, a więc posiada $k + 1$ współczynników. Cała więc lewa strona powyższego zrównania ma

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

współczynników. Ponieważ zaś całe zrównanie przez jeden współczynnik podzielić można, przeto liczba niezawisłych od siebie współczynników jest $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$.

Jeżeli współczynniki te są wiadome, natenczas zrównanie krzywej a więc i krzywa sama jest dokładnie wyznaczona. Jeżeli zaś współczynniki nie są znane, natenczas musi być danych $\frac{n(n+3)}{2}$ warunków, z których by je wyznaczyć można. Takimi danymi mogą być współrzędne $\frac{n(n+3)}{2}$ punktów, przez które krzywa przechodzi. Jeżeli bowiem wartości tych współrzędnych wstawimy kolejno w zrównanie krzywej, którego współczynniki przyjmujemy za niewiadome, natenczas otrzymamy $\frac{n(n+3)}{2}$ zrównań pierwszego stopnia o $\frac{n(n+3)}{2}$ niewiadomych. Ze zrównań tych można dokładnie oznaczyć wszystkie współczynniki. Wynika z tego że krzywa n stopnia jest dokładnie wyznaczona przez $\frac{n(n+3)}{2}$ punktów, a więc n. p. krzywa drugiego przez $\frac{2(2+3)}{2} = 5$ punktów.

Jeżeliby więc danych było tylko $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ punktów, natenczas możnaby przez nie poprowadzić nieskończoną liczbę krzywych n^{go} stopnia. W tym bowiem razie mielibyśmy na oznaczenie $\frac{n(n+3)}{2}$ współczynników tylko $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ zrównań. Z tych zrównań możnaby więc wyznaczyć $\frac{n(n+3)}{1} - 1$ współczynników jako linearne funkcye ostatniego współczynnika λ. Gdy teraz tak wyznaczone współczynniki wstawimy w zrównanie krzywej, natenczas będzie je można przedstawić w kształcie

$$\varphi(x_1\ x_2\ x_3) + \lambda\, \psi (x_1\ x_2\ x_3) = 0$$

gdzie φ i ψ są jednorodnymi funkcyami n^{go} stopnia zmiennych x_1, x_2, x_3. W zrównaniu tem tylko współczynnik λ jest nieoznaczony, a ile razy damy mu jaką specyalną wartość, tyle razy otrzymamy krzywą przechodzącą przez powyższe $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ punktów. Ponieważ zaś λ może przyjąć wszelkie wartości między $-\infty$ a $+\infty$ leżące, przeto istnieje nieskończona liczba krzywych, które przez te punkta poprowadzić można. Do tych krzywych należą i krzywe $\varphi(x_1\ x_2\ x_3) = 0$ i $\psi(x_1\ x_2\ x_3) = 0$ albowiem pierwszą z nich otrzymamy, położywszy $\lambda = 0$ drugą, jeżeli owe zrównanie napiszemy w kształcie $\frac{\varphi(x_1\ x_2\ x_3)}{\lambda} +$ $\psi(x_1\ x_2\ x_3) = 0$ i położymy $\lambda = \infty$.

Wszystkie te krzywe przecinają się jednak jeszcze w innych stałych punktach. Każdy bowiem punkt przecięcia się krzywych $\varphi = 0$ i $\psi = 0$ jest także punktem każdej krzywej $\varphi + \lambda\,\psi = 0$ albowiem wartości x_1, x_2, x_3 które sprawdzają zrównania $\varphi = 0$ i $\psi = 0$ sprawdzą także i zrównanie $\varphi + \lambda\,\psi = 0$. Ponieważ zaś obydwie krzywe $\varphi = 0$ i $\psi = 0$ jako krzywe n^{go} stopnia mają n^2 wspólnych punktów, przeto wszystkie krzywe $\varphi + \lambda \psi = 0$ muszą przez te punkty przechodzić, w które owych $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ jest już wliczonych. Krzywe takie tworzą pęk krzywych n^{go} stopnia. Punkty, przez które każda krzywa pęku przechodzi zowią się wierzchołkami pęku, a liczba ich jest n^2. Jeżeli z n^2 wierzchołków pęku $n\,r$ leży na krzywej r^{go} stopnia C_r natenczas reszta wierzchołków w liczbie $n\,(n - r)$ musi leżeć na krzywej C_{n-r}.

Jeżeli bowiem z pozostałych $n\,(n - r)$ wierzchołków obierzemy $\frac{(n - r)(n - r + 3)}{2}$ natenczas wyznaczają one dokładnie krzywą stopnia $n - r$. Krzywa ta razem z krzywą C_r tworzy zdegenerowaną krzywą stopnia n która przechodzi przez $n\,r$ $+ \frac{(n - r)(n - r + 3)}{2} = \left(\frac{n\,(n + 3)}{2} - 1\right) + \frac{(r - 1)(r - 2)}{2}$ wierzchołków pęku. Jeżeli zaś jakaś krzywa stopnia n przechodzi tylko przez $\frac{n\,(n + 3)}{2} - 1$ wierzchołków pęku, natenczas jest krzywą pęku i musi przechodzić przez resztę wierzchołków. Z tego wynika, że i krzywa $C_r + C_{n-r}$ jest krzywą pęku ponieważ przechodzi przez więcej wierzchołków pęku, niż potrzeba, aby ten wniosek uczynić można Ponieważ zaś na krzywej C_r leży już $n\,r$ wierzchołków i więcej leżeć nie może, albowiem krzywa C_r krzywą C_n najwięcej w $n\,r$ punktach przecinać może, przeto inne wierzchołki $n\,(n - r)$ muszą leżeć na krzywej C_{n-r}.

Z tego twierdzenia wynika twierdzenie Pascala. Mając bowiem sześciobok 1 2 3 4 5 6, możemy system promieni 12, 34, 56 uważać jako zdegenerowaną krzywą stopnia trzeciego. Boki 23, 45 61 przedstawiają również krzywą stopnia trzeciego. Obie krzywe przecinają się w $n^2 = 9$ punktach. Ponieważ zaś z tych 9 punktów $n.\,r = 3.\,2$ leżą na krzywej stopnia 2 przeto pozostałe $n\,(n - r) = 3\,(3 - 2) = 3$ t. j. punkta (12, 45), (34, 61), (23, 56) muszę leżeć na krzywej $C_{n-r} = C_{3-2} = C_1$ a więc na linii prostej.

W podobny sposób można udowodnić twierdzenie Brianchona. Naprzód ze zrównania krzywej E_n klasy n wynika, że jest dokładnie wyznaczoną przez $\frac{n\,(n + 3)}{2}$ stycznych. Jeżeli więc danych jest tylko $\frac{n\,(n + 3)}{2} - 1$ stycznych, natenczas istnieje nieskończona liczba krzywych n_{ej} klasy w te styczne wpisanych. Krzywe te tworzą szereg krzywych n^{ej} klasy wpisany w n^2 stycznych. Można następnie udowodnić, że jeżeli z tych n^2 stycznych $n\,r$ osłania krzywą E_r natenczas pozostałe $n\,(n - r)$ muszą osłaniać E_{n-r}. Z tego wynika twierdzenie Brianchona. Mając bowiem sześciobok I II III IV V VI opisany na E_2 możemy uważać punkty (I II), (III IV), (V VI) jako zdegenerowaną krzywę E_3 a punkty (II III), (IV V), (VI I) jako zdegenerowaną krzywą E'_3. Obydwie krzywe wpisane są w n^2 promieni I, II, III, IV, V, VI [(I II), (IV V)], [(II III), (V VI)], [(III IV), (VI I)], a ponieważ pierwsze n. r = 3. 2 = 6 osłaniają krzywą E_2, przeto trzy pozostałe muszą osłaniać krzywę $E_{3-2} = E_1$ to znaczy muszą się przecinać w jednym punkcie.

§. 15.

Analitycznie można twierdzenie Pascala w następujący udowodnić sposób. Udowodniliśmy, że jeżeli $\varphi = 0$ i $\psi = 0$ są zrównania dwóch krzywych n^{go} stopnia, natenczas zrównanie $\varphi + \lambda \psi = 0$ przedstawia krzywę stopnia n przechodzącą przez punkty przecięcia krzywych $\varphi = 0$ i $\psi = 0$. Jeżeli więc $\varphi = 0$ i $\psi = 0$ są zrównania dwóch krzywych stopni a drugiego natenczas $\varphi + \lambda \psi = 0$ albo $\varphi - \lambda \psi = 0$ będzie przedstawiać krzywę stopnia drugiego przechodzącą przez cztery punkty przecięcia się krzywych $\varphi = 0$ i $\psi = 0$. Twierdzenie to pozostaje niezmienne, jeżeli jedna z funkcyj φ i ψ lub obydwie naraz dadzą się rozłożyć na dwa czynniki stopnia pierwszego. Jeżeli więc a = 0, b = 0, c = 0, d = 0 są zrównania czterech promieni, natenczas $a. b - \lambda c. d = 0$ przedstawia krzywę drugiego stopnia przechodzącą przez cztery punkta w których promienie a = 0 i b = 0 przecinają promienie c = 0 i d = 0. Współczynnik λ o tyle tu jest potrzebny, o ile mamy na uwadze cały pęk krzywych, przechodzących przez te punkty.

Jeżeli zaś z pomiędzy nich wybierzemy jednę, przez co λ otrzyma pewną ściśle oznaczoną wartość, natenczas można ten współczynnik wciągnąć albo w trójmian c albo w trójmian d i napisać zrównanie tej krzywej w kształcie a. b — c. d = 0.

Niech więc będzie w krzywą C_2 wpisany sześciobok 1 2 3 4 5 6. Ponieważ krzywa ta przechodzi przez punkty przecięcia się promieni 12 i 34 z promieniami 23 i 41 przeto zrównanie jej musi się dać przedstawić w kształcie (12). (34) — (23). (41) = 0, pisząc symbolicznie zrównanie n. p. promienia 12 w kształcie (12) = 0. Ponieważ zaś ta sama krzywa przechodzi i przez punkta przecięcia się linii 45 i 61 z liniami 56 i 41 przeto zrównajej musi się dać przedstawić i w kształcie (45) (61) — (56) (41) = 0 Musi być więc

$$(12). (34) - (23). (41) = (45). (61) - (56). (41)$$
$$\text{albo } (12). (34) - (45). (61) = (41) [(23) - (56)]$$

Otóż lewa strona tego zrównanie położona równa zero, przedstawia krzywę przechodząca przez punkty przecięcia się linii 12 i 34 z liniami 45 i 61 czyli przez punkty (12, 45), (34, 61), (12, 61), (34, 45) czyli inaczej przez punkty (12, 45) (34, 61), 1, 4. Ponieważ jednak zrównanie tej samej krzywej da się przedstawić i w kształcie (14) [(23) — (56)] = 0, przeto krzywa ta składa się z dwóch promieni (14) = 0 i (23) — (56) = 0, które jak się pokazało przechodzić muszą przez punkta (12, 45), (34, 61) 1, 4. Ponieważ prosta 14 przechodzi przez dwa ostatnie punkty, przeto prosta (23) — (56) = 0 musi przechodzić przez punkty (12, 45) i (34, 61). Atoli ze zrównania tej prostej widać, że ona przechodzi i przez punkt (23, 56). Punkty więc (12, 45), (34, 61), (23, 56) leżą na tym samym promieniu, co było do udowodnienia.

Chcąc w ten sposób wyprowadzić zrównanie promienia Pascala przyjmijmy za trójkąt fundamentalny O_1 O_2 O_3 trójkąt, którego boki O_2 O_1 i O_3 O_1 są stycznymi krzywej C_2 w punktach O_1 i O_3. Ze względu na ten trójkąt zrównanie ogólne

$$a_{11}\, x_1^{\,2} + a_{22}\, x_2^2 + a_{33}\, x_3^2 + a_{23}\, x_2\, x_3 + a_{31}\, x_3\, x_1 + a_{12}\, x_1\, x_2 = 0$$

przybiera pojedynczy kształt

$$k^2\, x_2^2 - x_1\, x_3 = 0$$

Punkt bowiem O_3 dla którego $x_1 = 0$ $x_2 = 0$, jako też punkt O_1 dla którego $x_3 = 0$ $x_2 = 0$ muszą czynić zadość zrównaniu krzywej, co tylko wtenczas być może, jeżeli współczynniki $a_{11} = a_{33} = 0$, w skutek czego otrzymujemy naprzód

$$a_{22}\, x_2^2 + a_{23}\, x_2\, x_3 + a_{31}\, x_3\, x_1 + a_{12}\, x_1\, x_2 = 0$$

Aby wynaleść punkta przecięcia się krzywej z bokiem O_1 O_2 którego zrównanie jest $x_3 = 0$, trzeba w zrównaniu krzywej położyć $x_3 = 0$ przez co otrzymujemy dla stosunku $\frac{x_2}{x_1}$ punktów przecięcia zrównanie

$$a_{22}\, x_2^2 + a_{12}\, x_1\, x_2 = 0 \text{ czyli } a_{22} \left\{\frac{x_2}{x_1}\right\}^2 + a_{12} \frac{x_2}{x_1} = 0$$

Jeden z pierwiastków jest 0, drugi zaś oblicza się ze zrównania $a_{22} \frac{x_2}{x_1} + a_{12} = 0$. Ponieważ jednak O_1 O_2 jest styczną w punkcie O_1 przeto i drugi pierwiastek powyższego zrównania musi być zero, co tylko wtenczas być może, jeżeli $a_{12} = 0$. Z podobnej przyczyny musi być i $a_{23} = 0$ tak, że ze zrównania ogólnego pozostaje

$$a_{22}\, x_2^2 + a_{31}\, x_3\, x_1 = 0$$

czyli, jeżeli przez a_{31} podzielimy zrównanie i położymy

$$\frac{a_{22}}{a_{31}} = -k^2$$

$$k^2\, x_2^2 - x_3\, x_1 = 0 \qquad 1)$$

Znak — jest tu konieczny, gdyż inaczej zrównanie przedstawiałoby krzywą urojoną.

Zrównanie wszelkiej prostej przechodzącej przez O_2 ma kształt $x_3 = \mu^2\, x_1$. Prosta ta przecina C_2 w dwóch punktach.

Stosunek $\frac{x_3}{x_1}$ jest dla obydwóch punktów jednakowy mianowicie $\frac{x_3}{x_1} = \mu^2$ Aby obliczyć $\frac{x_2}{x_1}$ wstawmy $x_3 = \mu^2 x_1$ w zrównanie krzywej C_2 a otrzymamy $k^2 x_2^2 = \mu^2 x_1^2$ czyli $\frac{x_2}{x_1} = \pm \frac{\mu}{k}$

Jeżeli weźmiemy pierwszy znak natenczas mamy punkt krzywej dla którego istnieją zrównania $\frac{x_3}{x_1} = \mu^2$ i $\frac{x_2}{x_1} = \frac{\mu}{k}$ czyli $x_1 : x_2 : x_3 = k : \mu : \mu^2 k$. Obrany przez nas układ jest więc dlatego dogodny, że położenie punktu na krzywej wyznaczone jest jednym parametrem μ.

Zrównanie promienia łączącego dwa punkta x'_i i x''_i krzywej C_2, których parametrami są μ' i μ'' jest

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ k & \mu' & \mu'^2 k \\ k & \mu'' & \mu''^2 k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{czyli}$$

$$x_1 (\mu' \mu''^2 - \mu'' \mu'^2) k - x_2 (\mu''^2 - \mu'^2) k^2 + x_3 (\mu'' - \mu') k = 0$$

$$\text{albo } \mu' \mu'' x_1 - k(\mu' + \mu'') x_2 + x_3 = 0 \qquad 2)$$

Niech więc teraz będzie sześciokąt 1 2 3 4 5 6 wpisany w krzywą C_2. Parametry jego wierzchołków niech będą $\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_5 \mu_6$.

Oznaczywszy symbolicznie lewą stronę zrównania 2) przez $(\mu' \mu'')$ otrzymamy

$$(\mu_1 \mu_6)(\mu_5 \mu_4) - (\mu_5 \mu_6)(\mu_1 \mu_4) = (x_1 x_3 - k^2 x_2^2)(\mu_1 - \mu_5)(\mu_6 - \mu_4)$$

$$\text{albo } \frac{(\mu_1 \mu_6)(\mu_5 \mu_4) - (\mu_5 \mu_6)(\mu_1 \mu_4)}{(\mu_1 - \mu_5)(\mu_6 - \mu_4)} = x_1 x_3 - k_2 x_2^2 \qquad 3)$$

o czem łatwo przekonać się można. Ze zrównania tego widać, że zrównanie $x_1 x_3 - k^2 x_2^2 = 0$ można napisać w kształcie

$$\frac{(\mu_1 \mu_6)(\mu_5 \mu_4) - (\mu_5 \mu_6)(\mu_1 \mu_4)}{(\mu_1 - \mu_5)(\mu_6 - \mu^4)} = 0$$

z czego wynika że C_2 przechodzi przez punkty przecięcia się promieni (16) i (54) z promieniami (56) i (14).

Podobnie otrzymamy

$$\frac{(\mu_1 \mu_2)(\mu_3 \mu_4) - (\mu_2 \mu_3)(\mu_1 \mu_4)}{(\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_3)} = x_1 x_3 - k^2 x_2^2 \qquad 4$$

które dowodzi że C_2 przechodzi także przez punkty przecięcia się promieni (12) i (34) z promieniami (23) i (14)

Ale ze zrównań 3) i 4) wynika

$$\frac{(\mu_1 \mu_2)(\mu_3 \mu_4)}{(\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_4)} = \frac{(\mu_1 \mu_6)(\mu_5 \mu_4)}{(\mu_1 - \mu_5)(\mu_6 - \mu_4)}$$

$$= (\mu_1 \mu_4) \left[\frac{(\mu_2 \mu_3)}{(\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_4)} - \frac{(\mu_5 \mu_6)}{(\mu_1 - \mu_5)(\mu_6 - \mu_4)} \right] \qquad 5)$$

Lewa strona tego zrównania położona równa zero oznaczałaby zrównanie krzywej drugiego stopnia, przechodzącej przez punkty przecięcia się promieni (12) i (34) z promieniami (16) i 54 to znaczy, przez punkta (12, 16) (2, 54) (34. 16) (34, 54) czyli przez punkta 1, (12, 54), (34, 61), 4.

Prawa strona zrównania 5) pokazuje jednak że krzywa ta rozpada się na dwa promienie, z których jeden $(\mu_1 \mu_4) = 0$ przechodzi przez punkta 1 i 4. Drugi więc promień

$$\frac{(\mu_2 \mu_3)}{(\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_4)} - \frac{(\mu_5 \mu_6)}{(\mu_1 - \mu_5)(\mu_6 - \mu_4)} = 0 \qquad \text{czyli}$$

$$(\mu_1 - \mu_5)(\mu_6 - \mu_4)(\mu_2 \mu_3) - (\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_4)(\mu_5 \mu_6) = 0 \qquad 6)$$

musi przechodzić przez dwa inne punkta (12, 45), (34, 61). Ze zrównania jego jednak widać, że przechodzi on i przez punkt przecięcia się prostych 23 i 56. Jest to więc promień Pascala sześciokąta 1 2 3 4 5 6 a zrównanie jego jest 6).

Zastąpiwszy w zrównaniu 6) symbole $(\mu_2 \mu_3)$ i $(\mu_5 \mu_6)$ ilościami, które przedstawiają i uporządkowawszy całe zrównanie według współrzędnych, otrzymamy

$$\begin{aligned} &[\mu_1 (\mu_6 - \mu_2) + \mu_3 (\mu_2 - \mu_4) + \mu_5 (\mu_4 - \mu_6)]\, x_3 - \\ &- \{[\mu_1 \mu_4 (\mu_6 - \mu_2) + \mu_3 \mu_6 (\mu_2 - \mu_4) + \mu_5 \mu_2 (\mu_4 - \mu_6)] - \\ &- [\mu_1 \mu_4 (\mu_3 - \mu_5) + \mu_3 \mu_6 (\mu_5 - \mu_1) + \mu_5 \mu_2 (\mu_1 - \mu_3)]\}\, k\, x_2 - \\ &- [\mu_1 \mu_4 (\mu_3 \mu_2 - \mu_5 \mu_6) + \mu_3 \mu_6 (\mu_5 \mu_4 - \mu_1 \mu_2) + \mu_5 \mu_2 (\mu_1 \mu_6 - \mu_3 \mu_4)]\, x_1 = 0 \end{aligned}$$

czyli inaczej

$$\begin{vmatrix} \mu_1\mu_1 & 1 \\ \mu_3\mu_6 & 1 \\ \mu_5\mu_1 & 1 \end{vmatrix} x_2 - \left\{ \begin{vmatrix} \mu_1\mu_4 & \mu_4 & 1 \\ \mu_3\mu_6 & \mu_6 & 1 \\ \mu_5\mu_2 & \mu_2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mu_1\mu_4 & \mu_1 & 1 \\ \mu_3\mu_6 & \mu_3 & 1 \\ \mu_5\mu_2 & \mu_5 & 1 \end{vmatrix} \right\} k x_2 - \begin{vmatrix} \mu_1\mu_1 & \mu_1 & \mu_4 \\ \mu_3\mu_6 & \mu_3 & \mu_6 \\ \mu_5\mu_2 & \mu_5 & \mu_2 \end{vmatrix} x_1 = 0$$

co znów nic innego nie jest jak

$$\begin{vmatrix} x_3 & k x_2 & k x_2 & x_1 \\ \mu_1\mu_4 & \mu_1 & \mu_4 & 1 \\ \mu_3\mu_6 & \mu_3 & \mu_6 & 1 \\ \mu_5\mu_2 & \mu_5 & \mu_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad 7$$

Wyznacznik po lewej stronie zrównania jest tak zbudowany iż nietylko swej absolutnej wartości, lecz nawet znaku swego nie zmieni, jeżeli indeksy 1, 3, 5 między sobą a 2, 4, 6 między sobą cyklicznie przemienimy. Przez to bowiem nic innego nie czynimy, jak że naprzód szereg drugi z trzecim a następnie w nowym wyznaczniku trzeci z czwartym przemienimy. Ponieważ zaś wyznacznik zrównania 7) jest niczem innem, jak tylko lewą stroną zrównania 6) przeto to samo można i o tej ostatniej powiedzieć to znaczy, że wcale się nie zmieni przez ową przemianę indeksów. Zrównanie promienia Pascala można więc w następujących trzech kształtach przedstawić

$$\begin{aligned} &(\mu_1 - \mu_5)(\mu_6 - \mu_4)(\mu_2 \mu_3) - (\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_4)(\mu_5 \mu_6) = 0 \\ &(\mu_3 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_6)(\mu_4 \mu_5) - (\mu_3 - \mu_5)(\mu_4 - \mu_6)(\mu_1 \mu_2) = 0 \qquad 8 \\ &(\mu_5 - \mu_3)(\mu_4 - \mu_2)(\mu_6 \mu_1) - (\mu_5 - \mu_1)(\mu_6 - \mu_2)(\mu_3 \mu_4) = 0 \end{aligned}$$

gdzie lewe strony zrównań są wyrazami identycznymi. Zrównania te pojedynczo wzięte przedstawiają, że promień Pascala przechodzi przez punkty przecięcia się promieni (23) i 56 (45) i (12) (61) i (34).

Ponieważ n. p. $(\mu_1-\mu_5)\,(\mu_6-\mu_4)\,(\mu_2-\mu_3)=0$ przedstawia ten sam promień co zrównanie $(\mu_2-\mu_3)=0$ t. j. promień (23) przeto położywszy dla skrócenia

$$(\mu_1-\mu_5)\,(\mu_6-\mu_4)\,(\mu_2-\mu_3)=a,\quad (\mu_1-\mu_3)\,(\mu_2-\mu_4)\,(\mu_5-\mu_6)=a'$$
$$(\mu_3-\mu_1)\,(\mu_2-\mu_6)\,(\mu_4-\mu_5)=b,\quad (\mu_3-\mu_5)\,(\mu_4-\mu_6)\,(\mu_1-\mu_2)=b'$$
$$(\mu_5-\mu_3)\,(\mu_4-\mu_2)\,(\mu_6-\mu_1)=c,\quad (\mu_5-\mu_1)\,(\mu_6-\mu_2)\,(\mu_3-\mu_4)=c'$$

otrzymamy jako zrównania boków parzystych (23), (45), (61) $a=0$ $b=0$ $c=0$ a przeciwległych im nieparzystych (56), (12) (34) $a'=0$ $b'=0$ $c'=0$. Jako zrównania zaś promienia Pascala $a-a'=0$, $b-b'=0$, $c-c'=0$. 9)

Gdzie $a-a'=b-b'=c-c'$.

§. 16.

Do zrównania promienia Pascala możemy dojść jeszcze i w następujący sposób, z którego wyniknie nowa własność tego promienia.

Jeżeli dwa pęki projektywne P i P_1, przez których przecięcie powstaje krzywa C'_2 przetniemy krzywą C_2, przechodzącą przez punkty P i P', natenczas promienie A, B, C pęku P wyznaczą na C_2 punkty a, b, c, a odpowiednie im promienie A' B' C', punkty a' b' c'. W ten sposób otrzymamy na C_2 dwa podziały punktów a, b, c, d . . . i a', b', c', d' . . . a jeżeli te punkta będziemy uważać za odpowiednie, w których krzywa C_2 przecięta jest przez promienie odpowiednie pęków P i P', natenczas jednemu punktowi podziału U odpowiada tylko jeden punkt podziału U' i na odwrót. Każdy punkt na C_2 można uważać jako należący do układu U lub U'. Uważaiąc go jako punkt x do układu U należący, wyszukamy odpowiedni mu punkt x' układu U', jeżeli' naprzód pociągniemy promień X pęku P i wyszukamy odpowiedni jemu promień X' pęku P'. Punkt przecięcia się promienia X' z krzywą C_2 jest szukany x^1. Ten sam punkt x możemy uważać jako punkt y' należący do U'. Odpowiedni mu punkt y układu U wyszukamy, jeżeli pociągniemy naprzód promień Y' pęku P' i wyszukamy odpowiedni mu promień Y pęku P. Ponieważ więc uzupełnienie takich dwóch układów sprowadza się do uzupełnienia dwóch pęków projektywnych, a te dokładnie są wyznaczone przez trzy pary odpowiednych promieni, przeto i dwa takie układy na C_2 dokładnie są wyznaczone przez trzy pary odpowiednych punktów.

Niech więc będą na C_2 trzy pary odpowiednych punktów a, b, c i a', b', c'. Aby z tych par można uzupełnić układy, potrzeba tylko punkty a, b. c połączyć z jakimkolwiek punktem na C_2 promieniami A, B, C, a punkty a', b', c' z innym jakimkolwiek punktem na C_2 promieniami A', B', C' i uwa żać te pęki jako projektywne. Ponieważ zaś wierzchołki tych pęków leżą do wolnie na C_2, przeto obierzmy punkt a jako wiarzchołek pęku A' B' C' a odpowiedny mu punkt a' za wierzchołek pęku A B C. Przy tak obranych wierzchołkach pęki te są perspektywne, albowiem wspólny promień (a a') odpowiada sam sobie. Z tego wynika, że odpowiednie promienie przecinają się na promieniu II, który tu jest wyznaczony albowiem znamy dwa jego punkty mianowicie punkt przecięcia się promieni B i B' czyli promieni (a' b) i (a b') i punkt przecięcia się promieni C i C' czyli (a' c) i (a c'). Uzupełnienie teraz łatwe. Chcąc n. p. do punktu x wynaleść odpowiedni x' łączy się x z punktem a' promieniem X czyli (a' x). Promień ten przecina II w punkcie, przez który musi przechodzić odpowiedni promieniowi (a' x) promień (a x'), który C_2 przecina w szukanym punkcie x'.

Ponieważ, jak się powiedziało, jednemu punktowi układu U odpowiada tylko jeden punkt układu U' i na odwrót, przeto między parametrami μ i μ' dwóch odpowiednich punktów musi istnieć zrównanie kształtu takiego samego, jak dla dwóch układów projektywnych prostolinijnych a więc

$$a\,\mu\,\mu' + b\,\mu + c\,\mu' + d = 0.$$

Również istnieją tak tu jak i tam dwa punkty podwójne, których parametry wyznaczają się ze zrównania $a\,\mu^2 + (b+c)\mu + d = 0$

Punkty te podwójne są właśnie te, w których promień II przecina C_2. Uważajmy bowiem punkt przecięcia t jako należący do układu U. Chcąc wynaleść odpowiedni mu t' ciągniemy naprzód promień (a' t). ten przecina II w punkcie t. Punkt ten połączony z punktem a daje promień a t odpowiedny promieniowi (a' t). Promień (a t) przecina C_2 w punkcie odpowiednym punktowi t, punktem tym jednak jest znowu t. Rezultat ten jest ważny. Jeżeli bowiem promień II przechodzi przez punkta podwójne, natenczas jest on promieniem stałym w figurze i wcale nie zależy od tego, którą parę punktów odpowiednych przyjmiemy jako wierzchołki pęków projektywnych i musielibyśmy ten sam promień II otrzymać, gdybyśmy obrali wierzchołki pęków w punktach b i b' lub c i c'. Obrawszy a i a' otrzymaliśmy, że na II przecinają się linie a b' i a' b jakoteż a c' i a' c. Gdybyśmy obrali za wierzchołki punkty b i b' otrzymalibyśmy jeszcze że na II przecinają się linie bc' i b'c. Oznaczywszy punkta a, b, c przez 1, 5, 3 a punkta a' b' c' przez 4, 2, 6 otrzymujemy że na II przecinają się linie (12) i (45), (61) i (34) (56) i (23). Jak więc widzimy, II jest promieniem Pascala sześciokąta 1 2 3 4 5 6. Promień Pascala przecina więc krzywę C_2 w punktach podwójnych dwóch podziałów, jakie na niej wyznaczają nieparzyste i przeciwległe im parzyste wierzchołki sześciokąta.

Zrównanie $a\,\mu\,\mu' + b\,\mu + c\,\mu' + d = 0$ prowadzi do zrównania 7) paragrafu poprzedniego. Jeżeli bowiem tak jak tam $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3\ .\ .\ .\ \mu_5\ \mu_6$ są parametrami punktów 1, 2, 3, . . . 5, 6 a δ parametrem punktu podwójnego natenczas muszą istnieć zrównania

$$a\,\delta^2 + b\,\delta + c\,\delta + d = 0,\quad a\,\mu_1\,\mu_4 + b\,\mu_1 + c\,\mu_4 + d = 0$$
$$a\,\mu_3\,\mu_6 + b\,\mu_3 + c\,\mu_6 + d = 0,\quad a\,\mu_5\,\mu_2 + b\,\mu_5 + c\,\mu_2 + d = 0$$

które razem tylko wtedy istnieć mogą, jeżeli

$$\begin{vmatrix} \partial^2 & \partial & \partial & 1 \\ \rho_1\rho_4 & \rho_1 & \rho_4 & 1 \\ \rho_3\rho_6 & \rho_3 & \rho_6 & 1 \\ \rho_5\rho_2 & \rho_5 & \rho_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Zrównaniu temu czyni zadość parameter, któregokolwiek punktu podwójnego. Ponieważ zaś

$$\frac{\partial^2}{x_3} = \frac{\partial}{x_2\, k} = \frac{1}{x_1} = \nu \text{ albo } \partial^2 = \nu\, x_3, \partial = \nu\, k\, x_2,\ 1 = \nu\, x_1$$

gdzie x_1, x_2, x_3 są współrzędnymi któregokolwiek punktu podwójnego a ν współczynnikiem proporcyonalności, przeto otrzymamy, jeżeli w powyższym wyznaczniku wstawimy wartości za ∂^2 ∂ i następnie całe zrównanie przez ν podzielimy

$$\begin{vmatrix} x_3 & kx_2 & kx_2 & x_1 \\ \rho_1\rho_4 & \rho_1 & \rho_4 & 1 \\ \rho_3\rho_6 & \rho_3 & \rho_6 & 1 \\ \rho_5\rho_2 & \rho_5 & \rho_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Zrównanie to przedstawia jeżeli x_1 x_2 x_3 są współrzędne bieżące, promień, który jednak jest promieniem Pascala albowiem współrzędne obu punktów podwójnych spełniają jego zrównanie.

§. 17.

Z punktów 1, 2, 3, 4, 5, 6 danych na obwodzie C_2 można oprócz sześciokąta 1 2 3 4 5 6 nakreślić jeszcze wiele innych zmieniając następstwo wierzchołków. Każdy z tych sześciokątów musi być sześciokątem Pascala to znaczy, że jego przeciwległe boki przecinają się w trzech punktach, leżących na tym samym promieniu. Udowodniliśmy to jako konieczny wniosek wynikający z twierdzenia Carnota. Teraz chodzi nam o wykazanie, jak te sześciokąty nakreślić można. Oczywiście otrzymamy je wszystkie jeżeli poczynimy wszystkie przemiany cyfer 1, 2, 3, 4, 5, 6. Liczba wszystkich przemian wynosi 720, ale każdy sześciokąt jest tu 12 razy policzony, albowiem co 12 przemian jak n. p.

1 2 3 4 5 6	1 6 5 4 3 2
2 3 4 5 6 1	2 1 6 5 4 3
3 4 5 6 1 2	3 2 1 6 5 4
4 5 6 1 2 3	4 3 2 1 6 5
5 6 1 2 3 4	5 4 3 2 1 6
6 1 2 3 4 5	6 5 4 3 2 1

przedstawiają jeden i ten sam sześciokąt. Obrawszy bowiem którykolwiek z wierzchołków za pierwszy, otrzymamy, jeżeli wyszedłszy z niego posuwać się będziemy po obwodzie sześciokąta w jednym kierunku, jedną z przemian pierwszej kolumny, jeżeli zaś będziemy się posuwać w kierunku przeciwnym, przemianę stojącą w tym samym wierszu drugiej kolumny. Wszystkie te przemiany wynikają z jednej którejkolwiek z nich przez cykliczną przemianę jej cyfer w jednym i przeciwnym mu drugim kierunku. Z tego wynika, że liczba różnych sześciokątów jest 720 : 12 = 60.

Do liczby tej można dojść i w następujący sposób. Sześć punktów danych na C_2, a więc punktów takich, pomiędzy którymi nie ma trójki, leżącej na tym samym promieniu, można połączyć co dwa pietnastu promieniami. Zrównania tych promieni według poprzedniego paragrafu są:

$$\begin{array}{lll}
(\mu_1\ \mu_2) = 0 & (\mu_2\ \mu_3) = 0 & (\mu_3\ \mu_5) = 0 \\
(\mu_1\ \mu_3) = 0 & (\mu_2\ \mu_4) = 0 & (\mu_3\ \mu_6) = 0 \\
(\mu_1\ \mu_4) = 0 & (\mu_2\ \mu_5) = 0 & (\mu_4\ \mu_5) = 0 \\
(\mu_1\ \mu_5) = 0 & (\mu_2\ \mu_6) = 0 & (\mu_4\ \mu_6) = 0 \\
(\mu_1\ \mu_6) = 0 & (\mu_3\ \mu_4) = 0 & (\mu_5\ \mu_6) = 0
\end{array}$$

Każdy z tych promieni przecina innych ośm na obwodzie C_2, n. p. promień (12) przecinają w punkcie 1 promienie (13), (14), (15), (16) a w punkcie 2 promienie (23), (24), (25,) (26). Pozostałe promienie, których jest 6, przecinają go w punktach nie leżących na obwodzie C_2. Na każdym promieniu mamy więc 6 takich punktów, zatem wszystkich 6.15 = 90. Każdy punkt jednak liczony jest dwa razy, przeto liczba różnych punktów jest 90 : 2 = 45. Promienie przecinające się w którymkolwiek z tych 45 punktów można uważać jako przeciwległe boki jakiegoś sześciokąta. Pytanie tylko, ile takich sześciokątów istnieje, w których te dwa promienie są bokami przeciwległymi. Weźmy n. p. promienie (12) i (45). Ponieważ dwa przeciwległe boki są takie, które są rozłączone jednym wierzchołkiem, przeto idąc z 1 do 2 możemy dalej posunąć się tylko do punktu 3 albo do 6, nigdy zaś do 4 lub 5. Posunąwszy się do 3, możemy teraz pójść albo do 4, a stąd po promieniu (45) do 5, następnie do 6 i powrócić do 1, albo możemy pójść od 3 do 5, a stąd po linii (45) do 4, następnie do 6 i powrócić do 1. W pierwszym razie otrzymamy sześciokąt 1 2 3 4 5 6, w drugim sześciokąt 1 2 3 5 4 6. Jeżeli zaś z 2 udamy się do 6, natenczas pozostała droga może być albo 6 4 5 3 1, a więc sześciokąt 1 2 6 4 5 3, albo droga 6 5 4 3 1, która daje sześciokąt 1 2 6 5 4 3, czyli 2 1 3 4 5 6. Wszelkie inne sposoby łączenia dałyby tylko cykliczne przemiany powyższych czterech, nie przedstawiałyby więc nowych sześciokątów. Istnieją więc zawsze cztery sześciokąty, które którekolwiek dwa promienie, nie przecinające się na obwodzie C_2, mają jako przeciwległe boki. W naszym przykładzie są to sześciokaty 1 2 3 4 5 6, 1 2 3 5 4 6, 1 2 6 4 5 3, 2 1 3 4 5 6.

Z którejkolwiek z tych przemian można łatwo wyprowadzić trzy inne, zmieniając w niej raz następstwo punktów, przez które przechodzi jeden obrany promień, drugi raz następstwo punktów, przez które przechodzi bok mu przeciwległy, trzeci raz miejsce dwoch pozostałych punktów. Każdy z tych czterech sześciokątów ma promień Pascala, który jednak przez punkt (12) (45) przechodzić musi. Przez każdy więc z owych 45 punktów przechodzą cztery promienie Pascala, rezultat, któryśmy w jednym z poprzednich paragrafów na innej drodze otrzymali. Przez wszystkie punkta przechodzi ich więc 45.4 = 180; ale ponieważ na każdym promieniu leżą trzy z owych punktów, przeto każdy promień został tu trzy razy policzony, wszystkich zatem różnych promieni jest 180 : 3 = 60.

Aby poznać wszystkie różne sześciokąty, powróćmy do figury sześciokąta 1 2 3 4 5 6. Pociągniętych tu jest 9 linij, mianowicie

boki nieparzyste	12, 56, 34
boki parzyste	45, 23, 61
przekątnie główne	36, 14, 25

Linie te tak są zestawione, że w liniach każdego wiersza jako też w liniach każdej kolumny znajdują się wszystkie indeksy. Z zestawionych w ten sposób linii można sześć sześciokątów utworzyć. Kombinując bowiem pierwszy wiersz z drugim, drugi z trzecim, trzeci z pierwszym, otrzymujemy sześciokąty

1 2 3 4 5 6, 1 6 3 2 5 4, 1 4 3 6 5 2, a

Kombinując tak samo kolumny, otrzymujemy inne trzy sześciokąty

1 2 3 6 5 4, 1 4 3 2 5 6, 1 6 3 4 5 2 a'

Sześciokąty te stoją w takim związku ze sobą, że z jednego któregokolwiek z nich, wszystkie inne wyprowadzić można. We wszystkich bowiem wierzchołki nieparzyste są te same 1, 3, 5. Wpisawszy pomiędzy nie cykliczne przemiany wierzchołków parzystych w przeciwnym kierunku, otrzymamy sześciokąty grupy a'. Zauważyć wypada, że te same sześciokąty można napisac i tak:

1 2 3 4 5 6, 3 2 5 4 1 6, 5 2 1 4 3 6 a

3 2 1 4 5 6, 5 2 3 4 1 6, 1 2 5 4 3 6 a'

Z tego wynika, że te same sześciokąty otrzymamy jeżeli wierzchołki parzyste zostawimy zawsze na tem samem miejscu, a wierzchołki nieparzyste raz w jednym, drugi raz w przeciwnym kierunku cyklicznie przemienimy.

Według tego będziemy mogli z każdego sześciokąta i jego głównych przekątni utworzyć pięć innych sześciokątów. Otóż zostawmy z owych 9 linij sześciokąta 1 2 3 4 5 6 jego nieparzyste boki i parzysty bok 23 niezmienione, ale zamiast parzystych boków 45 i 61 pociągnijmy 46 i 51. Otrzymamy znowu sześciokąt, który od owych sześciu już poznanych jest różny, albowiem dwie nowe linie 46 i 51 w nim się znajdują. Jest to sześciokąt

z bokami nieparzystymi	12, 65, 34
z bokami parzystymi	46, 23, 51
i głównymi przekątniami	35, 14, 26

Z dziewięciu tych linij, które w takim samym do siebie stoją stosunku, jak dziewięć linij, sześciokąta 1 2 3 4 5 6 możemy według powyżej wskazanej metody utworzyć sześciokaty

1 2 3 4 6 5, 1 4 3 5 6 2, 1 5 3 2 6 4 b

1 2 3 5 6 4, 1 5 3 4 6 2, 1 4 3 2 6 5 b'

Zatrzymawszy zaś w pierwotnej figurze boki nieparzyste i bok parzysty 45 i ciągnąc zamiast 23 i 61 linie 26 i 31 otrzymamy sześciobok

z bokami nieparzystymi 12, 43, 65
z bokami parzystymi 54, 6,2 31
przekątniami 36, 15, 24

z których dziewięciu linii utworzyć można sześć sześciokatów

1 2 6 5 4 3, 1 5 6 3 4 2, 1 3 6 2 4 5 c
1 2 6 3 4 5, 1 3 6 5 4 2, 1 5 6 2 4 3 c'

Wreszcie otrzymujemy, jeżeli zostawimy boki nieparzyste i parzysty 61 a zamiast 23 i 45 pociągniemy 24 i 35 sześciokąt

z nieparzystymi bokami 12, 56, 43
z parzystymi bokami 35. 24, 61
przekątniami 46, 13, 25

z których dziewięciu linii otrzymujemy sześciokąty

1 2 4 3 5 6, 1 3 4 6 5 2, 1 6 4 2 5 3 d
1 2 4 6 5 3, 1 6 4 3 5 2, 1 3 4 2 5 6 d'

Jeżeli teraz w pierwotnej figurze zatrzymamy boki parzyste 23, 45, 61 i kolejno jeden z boków nieparzystych 12, 34, 56, natenczas otrzymamy ciągnąc w pierwszym razie zamiast 34 i 56 linie 35 i 46, w drugim zamiast 12 i 56, linie 15 i 26, w trzecim zamiast 12 i 34 linie 24 i 13, kolejno w pierwszym razie sześciokąt z bokami

nieparzystymi 12, 46, 35
przeciwległymi im parzystymi 45, 23, 61
przekątniami - 36, 15, 24

w drugim razie sześciokąt z bokami

nieparzystymi 15, 26, 43
przeciwległymi parzystymi 32, 54, 61
przekątniami 64, 31, 25

w trzecim sześciokąt z bokami

nieparzystymi 13, 56, 24
przebiwległymi parzystymi 45, 32, 61
przekątniami 26, 14, 35

W pierwszym razie możemy utworzyć sześciokąty

1 2 3 5 4 6, 1 5 3 6 4 2, 1 6 3 2 4 5 e
1 2 3 6 4 5, 1 6 3 5 4 2, 1 5 3 2 4 6 e'

w drugim sześciokąty

1 5 4 3 2 6, 1 3 4 6 2 5, 1 6 4 5 2 3 f
1 5 4 6 2 3, 1 6 4 3 2 5, 1 3 4 5 2 6 f'

w trzecim sześciokąty

1 3 2 4 5 6, 1 4 2 6 5 3, 1 6 2 3 5 4 g
1 3 2 6 5 4, 1 6 2 4 5 3, 1 4 2 3 5 6 g'

Jeżeli nakoniec zostawiając w pierwotnej figurze przekątnie 14, 25, 36 i kolejno jeden z boków nieparzystych 12, 34, 56, pociągniemy: w pierwszym razie zamiast 34 i 56 linie 35 i 46, w drugim zamiast 12 i 56 linie 15 i 62, w trzecim zamiast 12 i 34 linie 13 i 24, natenczas otrzymamy następujące grupy linii

12, 64, 53	14, 25, 36	13, 24, 65
36, 25, 41	62, 43, 51	52, 36, 41
45, 13, 26	35, 16, 24	46, 15, 23

Z pierwszych otrzymujemy sześciokąty

1 2 5 3 6 4,	1 3 5 4 6 2,	1 4 5 2 6 3	h
1 2 5 4 6 3,	1 4 5 3 6 2,	1 3 5 2 6 4	h'

z drugich sześciokąty

1 4 3 6 2 5,	1 6 3 5 2 4,	1 5 3 4 2 6	i
1 4 3 5 2 6,	1 5 3 6 2 4,	1 6 3 4 2 5	i'

z trzecich sześciokąty

1 3 6 5 2 4,	1 5 6 4 2 3,	1 4 6 3 2 5	k
1 3 6 4 2 5,	1 4 6 5 2 3,	1 5 6 3 2 4	k'

§. 18.

Otrzymaliśmy więc 60 żądanych sześciokątów, które rozpadają się na 20 grup po trzy a, b, c . . . a', b', c', . . . Łatwo można udowodnić, iż promienie Pascala trzech sześciokątów którejkolwiek z tych grup przecinają się w jednym punkcie.

Udowodniliśmy już, że zrównania nieparzystych boków sześciokąta Pascala i przeciwległych im parzystych dadzą się przedstawić w kształcie

$$a' = 0 \quad b' = 0 \quad c' = 0 \quad \text{i} \quad a = 0 \quad b = 0 \quad c = 0$$

tak, że $a - a' = b - b' = c - c'$, a zrównanie promienia Pascala jest $a - a' = 0$, albo $b - b' = 0$, albo $c - c' = 0$. I odwrotnie: jeżeli zrównania sześciu linii dadzą się przedstawić w takim kształcie, że owe zrównania identyczne będą wypełnione nateneczas z tego wynika, że te linie tworzą sześciokąt Pascala, ponieważ, ze zrównań identycznych wynika, że trzy punkty przecięcia się leżą na tej samej prostej, zatem sześć innych według twierdzenia Carnota na krzywej drugiego stopnia.

Aby udowodnić, że promienie Pascala sześciokątów każdej z dwudziestu grup przecinają się w jednym punkcie, weźmy na uwagę grupę a. Grupa ta powstaje z dziewięciu linii

12	56	34
45	23	61
36	14	25

Jak z poprzedniego wiadomo, zrównania pierwszych sześciu są $b' = 0 \quad a' = 0 \quad c' = 0$

dla linii	12	56	34
i	$b = 0$	$a = 0$	$c = 0$
dla linii	45	23	61

Zrównanie promienia Pascala sześciokąta utworzonego z tych sześciu linii jest

$$c'' = a - a' = b - b' = c - c' = 0 \qquad 1)$$

Wyznaczmy teraz trzy symbole a'' b'' c'' zrównaniami

$$a'' + b + c' = 0 \quad a + b' + c'' = 0 \quad a' + b'' + c = 0 \qquad 2)$$

Ponieważ z identyczności $a - a' = b - b' = c - c'$ wypływają identyczności $a + b' = a' + b$, $b + c' = b' + c$, $c + a' = c' + a$, przeto symbole owe można wyznaczyć i zrównaniami

$$a'' + b' + c = 0 \quad a' + b + c'' = 0 \quad a + b'' + c' = 0 \quad 3)$$

Z pierwszych zrównań 2) i 3) wypływa, że prosta, której zrównanie jest $a'' = 0$ przechodzi przez punkt przecięcia się linii (45) i (34) i przez punkt przecięcia się linii (12) i (61) Jest to więc zrównanie przekątni (14) I rzeczywiście, gdybyśmy symbole b, b', c, c' zastąpili wyrazami, które przedstawiają, a które w jednym z poprzednich paragrafów są podane, natenczas otrzymalibyśmy

$$b + c' = b' + c = (\mu_5 - \mu_3)(\mu_6 - \mu_2)(\mu_1 \; \mu_4)$$

Tak samo wypływa ze zrównań 2 i 3 że $b'' = 0$ i $c'' = 0$ są zrównania przekątni (36) i (25). Ze zrównań 2 i 3 wynikają jednak, jeżeli je stosownie odciągniemy identyczności

$$a' - a'' = b' - b'' = c' - c''$$
$$a'' - a = b'' - b = c'' - c$$

z czego wynika, że przekątnie i boki nieparzyste, jakoteż przekątnie i boki parzyste tworzą także sześciokąty Pascala, rezultat który już pierwej otrzymaliśmy. Pierwsze tworzą sześciokąt 1 4 3 6 5 2, drugie 1 6 3 2 5 4. Zrównaniem promienia Pascala pierwszego jest więc według poprzedzającego

$$\sigma = a' - a'' = b' - b'' = c' - c'' = 0, \text{ drugiego zaś}$$
$$\sigma' = a'' - a = b'' - b = c'' - c = 0$$

Ponieważ zaś $\sigma + \sigma' + \sigma'' = 0$, przeto te trzy promienie przechodzą przez jeden i ten sam punkt. Widać to zresztą i ze zrównań tych promieni. Zrównanie promienia σ'' było

$$(\mu_1 - \mu_5)(\mu_6 - \mu_4)(\mu_2 \; \mu_3) - (\mu_1 \; \mu_3)(\mu_2 \; \mu_4)(\mu_5 \; \mu_6) = 0$$

Ponieważ sześciokąty 1 4 3 6 5 2 i 1 6 3 2 5 4 otrzymujemy z sześciokąta 1 2 3 4 5 6 przez cykliczną przemianę cyfer 2, 4, 6, przeto w ten sam sposób otrzymamy i zrównania linii Pascala tych sześciokątów ze zrównania linii σ''. Są więc one

$$(\mu_1 - \mu_5)(\mu_2 \; \mu_6)(\mu_4 \; \mu_3) \quad (\mu_1 - \mu_3)(\mu_1 - \mu_6)(\mu_5 \; \mu_2) = 0$$
$$(\mu_1 - \mu_5)(\mu_4 \; \mu_2)(\mu_6 \; \mu_3) - (\mu_1 - \mu_3)(\mu_6 - \mu_2)(\mu_5 \; \mu_4) = 0$$

Z tych zrównań nie widać jeszcze, żeby te trzy promienie przechodziły przez jeden i ten sam punkt. Jeżeli jednak do zrównania drugiego dodamy

$$(\mu_1 \mu_4 \mu_5 \mu_6 - \mu_1 \mu_4 \mu_5 \mu_6) x_1 + (\mu_1 \mu_2 \mu_5 - \mu_1 \mu_2 \mu_5 + \mu_4 \mu_6 \mu_3 -$$
$$- \mu_4 \mu_6 \mu_3) k \, x_2 + (\mu_2 \mu_3 - \mu_2 \mu_3) x_3 = 0$$

a do zrównania trzeciego

$$(\mu_1 \mu_4 \mu_2 \mu_3 - \mu_1 \mu_4 \mu_2 \mu_3) x_1 + (\mu_1 \mu_6 \mu_3 - \mu_1 \mu_6 \mu_3 + \mu_2 \mu_4 \mu_5 -$$
$$\mu_2 \mu_4 \mu_5) k \, x_2 + (\mu_5 \mu_6 - \mu_5 \mu_6) x_3 = 0$$

natenczas otrzymamy jako zrównania promienia Pascala sześciokąta 1 2 3 4 5 6

$$(\mu_1 - \mu_5)(\mu_6 - \mu_4)(\mu_2 \; \mu_3) - (\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_4)(\mu_5 \; \mu_6) = 0$$

sześciokąta 1 4 3 6 5 2

$$(\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_4)(\mu_5 \; \mu_6) - (\mu_3 - \mu_5)(\mu_6 \; \mu_2)(\mu_1 \; \mu_4) = 0$$

sześciokąta 1 6 3 2 5 4

$$(\mu_3 - \mu_5)(\mu_6 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_4) - (\mu_1 - \mu_5)(\mu_6 - \mu_4)(\mu_2 - \mu_3) = 0$$

Z tych zrównań, których suma jest identycznie równa zero wynika, że te linie przechodzą przez jeden i ten sam punkt.

W ten sposób moglibyśmy dla każdej z dwudziestu grup powyższe twierdzenie udowodnić. Dla grup a', b', c'. . . wynika ono jednak już z twierdzenia udowodnionego dla grup a, b, c . . Jeżeli bowiem uwzględnimy grupę a', to, łatwo udowodnić, że promienie Pascala sześciokątów tej grupy t. j. sześciokątów, 1 2 3 6 5 4, 1 4 3 2 5 6, 1 6 3 4 5 2 przechodzą przez jeden i ten sam punkt, skoro tylko zastosujemy twierdzenie znane o trójkątach perspektywnych mianowicie:

Jeżeli trzy trójkąty wpisane są w trzy promienie, przechodzące przez jeden i ten sam punkt, natenczas odpowiedne boki tych trójkątów tworzą trzy inne trójkąty, wpisane w trzy inne promienie, które także przecinają się w jednym punkcie.

Otóż trzy trójkąty, których boki są a, a' a'' b, b' b'' c c' c'' wpisane są w trzy linie σ σ' σ'' tak, że

na σ	leżą wierzchołki	(a' a'')	(b' b'')	(c' c'')
„ σ' „	„	(a'' a)	(b'' b)	(c'' c)
„ σ'' „	„	(a a')	(b b')	(c c').

Odpowiedne boki tych trójkątów tworzą więc trzy inne trójkąty a b c, a' b' c', a'' b'' c'' wpisane w trzy inne promienie s s' s'' tak, że na promieniu

s	leżą wierzchołki	(b c)	(b' c')	(b'' c'')
s' „	„	(c a)	(c' a')	(c'' a'')
s'' „	„	(a b)	(a' b')	(a'' b'')

Z tego widać, że zrównania tych promieni muszą się dać przedstawić w kształtach

$$s = b - c = b' - c' = b'' - c'' = 0$$
$$s' = c - a = c' - a' = c'' - a'' = 0$$
$$s'' = a - b = a' - b' = a'' - b'' = 0$$

Ze zrównań tych poznajemy po pierwsze, że promienie s, s', s'' przecinają się w jednym punkcie, po drugie że promień

s	jest promieniem Pascala sześciokąta	1 6 3 4 5 2
s'	„ „ „ „	1 4 3 2 5 6
s''	„ „ „ „	1 2 3 6 5 4

Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie. Sześćdziesiąt promieni Pascala przecina się dwadzieścia razy po trzy w jednym punkcie. Są to, jak poznajemy, punkta Steinera.

Zaprowadźmy dla punktu Steinera, w którym się n. p. promienie Pascala sześciokątów grupy a przecinają, symbol $\begin{pmatrix} 1\,3\,5 \\ 2\,4\,6 \end{pmatrix}$ pisząc wierzchołki nieparzyste w górze, a pod nimi wierzchołki parzyste tak, jak one w sześciokącie 1 2 3 4 5 6 po sobie następują. Z tego, co wiemy, jak te sześciokąty jeden z drugiego powstają wynika, iż ten symbol w rozmaitych kształtach napisać można, a będzie on zawsze przedstawiał punkt Steinera, w którym się te same promienie przecinają. Tak n. p. pozostanie punkt Steinera ten sam, jeżeli zostawiając wierzchołki parzyste na swoim miejscu przemienimy cyklicznie w stosownym kierunku wierzchołki nieparzyste. Otrzymamy przez to symbole

$$\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}3&5&1\\2&4&6\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}5&1&3\\2&4&6\end{pmatrix}\qquad 1)$$

Zmieniając teraz w każdym z tych trzech symbolów wierzchołki parzyste cyklicznie, otrzymujemy symbole

$$\begin{pmatrix}1&3&5\\4&6&2\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}3&5&1\\4&6&2\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}5&1&3\\4&6&2\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1&3&5\\6&2&4\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}3&5&1\\6&2&4\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}5&1&3\\6&2&4\end{pmatrix}$$

które przedstawiają ten sam punkt Steinera. Ale i wtenczas otrzymamy ten sam punkt, jeżeli w pierwszym symbolu 1) cyfry górne i dolne odwrotnie a więc $\begin{pmatrix}5&3&1\\6&4&2\end{pmatrix}$ napiszemy, albowiem to nic innego nie oznacza, jak napisać sześciokąt 1 2 3 4 5 6 w kształcie 6 5 4 3 2 1. Uczyniwszy z tym symbolem nowym te same przemiany, co z symbolem $\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{pmatrix}$ otrzymamy dziewięć innych Są one

$$\begin{pmatrix}5&3&1\\6&4&2\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}3&1&5\\6&4&2\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1&5&3\\6&4&2\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}5&3&1\\4&2&6\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}3&1&5\\4&2&6\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1&5&3\\4&2&6\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}5&3&1\\2&6&4\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}3&1&5\\2&6&4\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1&5&3\\2&6&4\end{pmatrix}$$

Tak więc ten sam punkt Steinera można 18 a nawet 36 symbolami oznaczyć, gdyż w każdym z napisanych 18 symbolów można zrobić górne cyfry dolnymi a dolne górnymi nie zmieniając przez to punktu Steinera, albowiem taka przemiana nie oznacza nic innego, jak żeśmy zamiast od jakiego wierzchołka nieparzystego, wyszli od parzystego Zmieniając jednak w jakikolwiek inny sposób cyfry, otrzymamy inny punkt Steinera. Tak n. p. $\begin{pmatrix}1&3&5\\2&6&4\end{pmatrix}$ przedstawia punkt Steinera w którym się promienie Pascala sześciokątów grupy a' przecinają. Z symbolu tego wynika 35 innych, ze wszystkich wymieniamy tylko trzy następujące

$$\begin{pmatrix}1&3&5\\2&6&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}3&5&1\\2&6&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}5&1&3\\2&6&4\end{pmatrix}$$

Z symbolów 1) i 2) można teraz łatwo wyprowadzić symbole dla innych 18 punktów, zmieniając cyfry stojące nad sobą. Pisząc symbole, które z jednego z tych sześciu otrzymamy pod nim i dołączając zarazem znak grupy tych sześciokątów, których linie Pascala w dotyczącym punkcie się przecinają, otrzymamy

$$\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{pmatrix}a\ \begin{pmatrix}3&5&1\\2&4&6\end{pmatrix}a\ \begin{pmatrix}5&1&3\\2&4&6\end{pmatrix}a\ \begin{pmatrix}1&3&5\\2&6&4\end{pmatrix}a'\ \begin{pmatrix}3&5&1\\2&6&4\end{pmatrix}a'\ \begin{pmatrix}5&1&3\\2&6&4\end{pmatrix}a'$$
$$\begin{pmatrix}1&3&6\\2&4&5\end{pmatrix}b\ \begin{pmatrix}3&5&6\\2&4&1\end{pmatrix}f\ \begin{pmatrix}5&1&6\\2&4&3\end{pmatrix}h\ \begin{pmatrix}1&3&4\\2&6&5\end{pmatrix}e'\ \begin{pmatrix}3&5&4\\2&6&1\end{pmatrix}k'\ \begin{pmatrix}5&1&4\\2&6&3\end{pmatrix}d'$$
$$\begin{pmatrix}1&4&5\\2&3&6\end{pmatrix}d\ \begin{pmatrix}3&4&1\\2&5&6\end{pmatrix}e\ \begin{pmatrix}5&4&3\\2&1&6\end{pmatrix}k\ \begin{pmatrix}1&6&5\\2&3&4\end{pmatrix}h'\ \begin{pmatrix}3&6&1\\2&5&4\end{pmatrix}b'\ \begin{pmatrix}5&6&3\\2&1&4\end{pmatrix}f'$$

$\begin{pmatrix}2&3&5\\1&4&6\end{pmatrix}c\begin{pmatrix}2&5&1\\3&4&6\end{pmatrix}g\begin{pmatrix}2&1&3\\5&4&6\end{pmatrix}i\begin{pmatrix}2&3&5\\1&6&4\end{pmatrix}c'\begin{pmatrix}2&5&1\\3&6&4\end{pmatrix}g'\begin{pmatrix}2&1&3\\5&6&4\end{pmatrix}i'$

Oczywiście że tak samo, jakeśmy ze symbolów punktów Steinera grupy a i a' wyprowadzili symbole wszystkich innych, tak samo moglibyśmy to uczynić ze symbolów którychkolwiek dwóch innych grup tą samą literą oznaczonych. To więc, co tutaj udowodnimy, będzie ważne dla każdego innego przypadku. Udowodnimy zaś:

Każde cztery punkty stojące w powyższej tąbelce pod sobą leżą na tej samej prostej.

Uwzględnijmy n. p. punkty pierwszej kolumny t. j. punkty Steinera grup a, b, c, d Promień Paskala sześciokąta 1 2 3 4 5 6 grupy a przechodzi przez punkty (12, 45) (23, 56), (34, 61). Przez pierwszy punkt przechodzi jednak i promień Pascala pierwszego sześciokąta grupy c, który naznaczmy dlatego przez c_1, przez punkt (23, 56) przechodzi i promień b_1, a przez (24, 61) linia d_1. Owe trzy punkty możemy więc także określić przez (12, c_1), (56, b_1), (34, d_1). Ponieważ z pomiędzy 9 punktów przecięcia dwóch systemów po trzy linie t. j. systemów linij 12, 56, 34 i systemu linij c_1, b_1, d_1, trzy powyższe leżą na promieniu a_1, przeto według twierdzenia Carnota sześć innych (12, b_1) (12, d_1) (56, c_1) 56, d_1) 34, c_1) (34, b_1) leżą na krzywej drugiego stopnia.

Ale punkt (12, b_1) = (12, 46) (12, d_1) = (12, 35)
(56, c_1) = (56, 31) (56, d_1) = (56, 24)
(34, c_1) = (34, 26) (34, b_1) = (34, 51)

Ale przez punkt (12, 46) przechodzi i promień d_2
" " (12, 35) " " b_2
" " (56, 31) " " d_2
" " (56, 24) " " c_2
" " (34, 26) " " b_2
" " (34, 51) " " c_2

Zatem jest także (12, b_1) = (d_2 b_1), (12, d_1) = (b_2 d_1) (56, c_1) = (d_2 c_1) (56, d_1) = (c_2 d_1) (34, c_1) = (b_2 c_1) (34, b_1) = (c_2 b_1). Otóż sześć tych punktów (d_2 b_1), (b_2 d_1), (d_2 c_1), (c_2 d_1), (b_2 c_1), (c_2 b_1), w których się przecinają systemy b_1, c_1, d_1 i b_2, c_2, d_2, leży jak się powiedziało na krzywej stopnia drugiego zatem według twierdzenia Carnota trzy inne t. j. (b_1 b_2), (c_1 c_2) (d_1 d_2) leżą na promieniu. Te trzy ostatnie punkta zaś niczem innem nie są jak $\begin{pmatrix}1&3&6\\2&4&5\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&4&5\\2&3&6\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2&3&5\\1&4&6\end{pmatrix}$ 3)

Do tego rezultatu doszliśmy wyszedłszy od punktu $\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{pmatrix}$ Gdybyśmy jednak wyszli od którego z punktów 3) n. p. od $\begin{pmatrix}1&3&6\\2&4&5\end{pmatrix}$, z którego przez takie same przemiany dochodzimy do punktów $\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&4&6\\2&3&5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&3&5\\1&4&6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2&3&6\\1&4&5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&4&5\\2&3&6\end{pmatrix}$

natenczas bylibyśmy otrzymali, że punkty $\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2&3&5\\1&4&6\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&4&5\\2&3&6\end{pmatrix}$ leżą na tej samej prostej. Ponieważ zaś ta prosta przechodzi przez punkty $\begin{pmatrix}2&3&5\\1&4&6\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&4&5\\2&3&6\end{pmatrix}$, przez które i prosta łacząca punkta 3) przechodzi, przeto obie proste są jedną i tą samą prostą, a zatem punkta

$$\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&3&6\\2&4&5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&4&5\\2&3&6\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2&3&5\\1&4&6\end{pmatrix}$$

leżą na tej samej prostej.

Z powyższej tabelki widać, że przez punkt $\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{pmatrix}$ przechodzą trzy takie proste, a ponieważ to, co się o tym punkcie udowodniło, można o każdym innym udowodnić, przeto przez każdy punkt Steinera przechodzą trzy takie proste.

Wszystkich zatem prostych mamy 3.20 = 60; ponieważ jednak na każdej z nich leżą cztery punkty Steinera, przeto każda z nich policzoną została cztery razy, wszystkich zatem różnych promieni jest 60 : 4 = 15.

Otrzymaliśmy więc: Dwadzieścia punktów Steinera leży 15 razy po cztery na promieniu tak, że przez każdy z 20 punktów przechodzą trzy promienie.

Są to, jak rozpoznajemy, promienie Plückera. Poniżej podajemy tabelkę tych promieni oznaczając każdy punkt Steinera literą tej grupy promieni Pascala, które się w nim przecinają. Na promieniu

s_1	leżą punkty	a	b	c	d	na s_2	leżą	a	e	f	g
s_3	„ „	a	h	i	k	„ s_4	„	b	e'	k	f'
s_5	„ „	b	g	i'	h'	„ s_6	„	c	f'	h	g'
s_7	„ „	a'	e'	h'	c'	„ s_8	„	a'	k'	b'	g'
s_9	„ „	a'	d'	f'	i'	„ s_{10}	„	c	e	k'	i'
s_{11}	„ „	d'	h	e	b'	„ s_{12}	„	d	i	e'	g'
s_{13}	„ „	d	h'	k'	f	„ s_{14}	„	b'	c'	f	i

na s_{15} leżą c' k d' g

§. 19.

Jeżeli pomiędzy piętnastu liniami, jakie między sześciu na C_2 danymi punktami pociągnąć można, wybierzemy dziewięć takich, iż sześć z nich tworzą boki a trzy inne główne przekątnie, któregokolwiek z 60 sześciokątów, natenczas, jak z poprzednich paragrafów wiadomo, można z tych dziewięciu linii utworzyć sześć sześciokątów. Opuśćmy teraz sześć owych linii, które tworzą boki sześciokąta a pozostawiając główne przekątnie, pociągnijmy sześć pozostałych linii n. p. opuśćmy boki sześciokąta 1 2 3 4 5 6 a zostawiając jego przekątnie 14, 25, 36, pociągnijmy linie 13, 15, 24, 26, 46, 35. Z tych dziewięciu linii można utworzyć trzy sześciokąty

1 3 5 2 6 4, 3 5 1 4 2 6, 5 1 3 6 4 2.

Porządek w jakim wierzchołki tych sześciokątów po sobie następują, łatwo się daje z sześciokąta 1 2 3 4 5 6 wyprowadzić. Na pierwszych bowiem trzech miejscach stoją cykliczne przemiany wierzchołków nieparzystych, na czwartem miejscu stoi wierzchołek parzysty, który leży między pierwszym i drugim nieparzystym, na piątem miejscu znajduje się ten wierzchołek parzysty, który leży między pierwszym a trzecim nieparzystym.

Promienie Pascala takich trzech sześciokątów przecinają się w jednym punkcie.

Albowiem promień Pascala pierwszego przechodzi przez punkty (13, 26), (35, 64), (52, 41)

promień Pascala drugiego przechodzi przez punkty (35, 42) (51, 26), (14, 63)

promień Pascala trzeciego przechodzi przez punkty (51, 64) (13, 42). (36, 25).

Łącząc teraz punkty stojące w tej samej kolumnie, po dwa liniami prostymi, otrzymamy trzy trójkąty. których wierzchołki leżą na owych trzech promieniach Pascala. Oznaczmy promień Pascala któregokolwiek sześciokąta znakiem tego sześciokąta, to widzimy, że bokami pierwszego trójkąta są promienie Pascala

1 3 5 6 2 4, 1 5 3 6 4 2, 3 1 5 2 6 4

bokami drugiego promienie Pascala

3 5 1 4 6 2, 3 1 5 4 6 2, 5 3 1 6 4 2

bokami trzeciego promienie

14, 63, 25

Boki odpowiedne pierwszych dwóch trójkątów przecinają się w punktach

(1 3 5 6 2 4, 3 5 1 4 6 2), (1 5 3 6 4 2, 3 1 5 4 6 2),
(3 1 5 2 6 4, 5 3 1 6 4 2) 1)

boki drugiego i trzeciego w punktach

(3 5 1 4 6 2, 14) = (14, 23), (5 1 3 6 2 4, 63) = (63, 45)
(5 3 1 6 4 2, 25) = (25, 61) 2)

boki trzeciego i pierwszego w punktach

(1 3 5 6 2 4, 14) = (14, 56) (1 5 3 6 4 2, 63) = (63, 21)
(3 1 5 2 6 4, 25) = (25, 43). 3)

Otóż punkty 2) leżą jak łatwo poznajemy na promieniu Pascala 1 6 3 2 5 4, punkty 3) na promieniu Pascala 1 4 3 6 5 2.

Jeżeli zaś odpowiedne boki dwóch trójkątów przecinają się w trzech punktach leżących na tej samej prostej, natenczas linie łączące odpowiedne wierzchołki tych trójkątów przechodzą przez jeden i ten sam punkt. Boki trójkąta drugiego i trzeciego przecinają się w punktach leżących na promieniu Pascala 1 6 3 2 5 4, zatem linie łączące odpowiednie wierzchołki tych trójkątów t. j. promienie Pascala

1 3 5 2 6 4, 3 5 1 4 2 6, 5 1 3 6 4 2

przecinają się w jednym punkcie, który otrzymaliśmy opuszczając z piętnastu linii boki sześciokąta 1 2 3 4 5 6; dlatego nazwiemy ten punkt odpowiadającym temu sześciokątowi albo raczej jego promieniowi Pascala. Ponieważ zaś z każdym sześciokątem to samo uczynić można, przeto istnieje takich punktów 60 a przez każdy z nich przechodzą trzy linie Pascala, albo inaczej: Promienie Pascala przecinają się 60 razy po trzy w 60 punktach.

Są to jak rozpoznajemy punkta Kirkmanna. Wracając do powyższego dowodu nadmieniamy, że ponieważ owe trzy trójkąty wpisane są w trzy linie 1 3 5 2 6 4, 3 5 1 4 2 6, 5 1 3 6 4 2 przechodzące przez jeden i ten sam punkt, przeto punkty 1) 2) 3) muszą leżeć na trzech liniach, przechodzących także przez jeden punkt. Otóż punkty 2) leżą, jak się pokazało, na linii 1 6 3 2 5 4 punkty 3) na linii 1 4 3 6 5 2. Dwie te linie, jak z symbolów ich widać, przecinają się w punkcie Steinera a, przez ten punkt musi więc przechodzić i linia, na której leżą punkty 1). Te punkty są jednak punktami Kirkmanna odpowiadającymi liniom Pascala przechodzącym przez punkt Steinera a' to jest liniom 1 6 3 4 5 2. 1 4 3 2 5 6, 1 2 3 6 5 4.

W punkcie bowiem Kirkmanna odpowiadającym pierwszej linii przecinają się linie 1 3 5 6 2 4, 3 5 1 4 6 2, 5 1 3 2 4 6 które wyznaczają, jak widzimy, pierwszy z punktów 1), w punkcie odpowiednym drugiej linii przecinają się linie 1 5 3 6 4 2, 5 3 1 2 6 4, 3 1 5 4 2 6, które dają drugi punkt 1), wreszcie w punkcie odpowiednym trzeciej linii przecinają się 3 1 5 2 6 4 1 5 3 4 2 6, 5 3 1 6 4 2, które wyznaczają trzeci punkt 1).

Jeżeli więc wyznaczymy trzy punkty Kirkmanna odpowiadające trzem liniom przechodzącym przez ten sam punkt Steinera natenczas te trzy punkty leżą na tej samej prostej, która przechodzi przez punkt Steinera odpowiedny pierwszemu.

Ponieważ o każdym z 20 punktów Steinera to samo dowieśćby można, przeto takich linii mamy dwadzieścia. Są to linie Cayleya.

W jednym z poprzednich paragrafów wykazano, że punkty Kirkmanna leżą 60 razy po trzy na sześćdziesięciu promieniach Pascala. Aby to udowodnić weźmy na uwagę linie Pascala 1 3 5 2 6 4, 3 5 1 4 2 6, 5 1 3 6 4 2, które jak wiemy przecinają się w punkcie Kirkmanna odpowiednym linii 1 2 3 4 5 6 i wyznaczmy dla każdej z tych linii odpowiedny punkt Kirkmanna.

Punkt odpowiedny pierwszej wyznaczają linie

1 5 6 3 4 2, 5 6 1 2 3 4, 6 1 5 4 2 3.

Punkt odpowiedny drugiej wyznaczają linie

3 1 2 5 6 4, 1 2 3 4 5 6, 2 3 1 6 4 5.

Punkt odpowiedny trzeciej wyznaczają linie

5 3 4 1 2 6, 3 4 5 6 1 2, 4 5 3 6 2 1.

Jak widzimy linie drugiej kolumny są identyczne mianowicie są one linią 1 2 3 4 5 6.

Otrzymaliśmy więc: Trzy punkty Kirkmanna odpowiednie trzem liniom Pascala, przecinającym się w czwartym punkcie Kirkmanna, leżą na linii Pascala odpowiedniej temu czwartemu punktowi.

Jeżeli jeszcze uwzględnimy iż, jak w poprzednich paragrafach udowodniono, linie Cayleya przecinają się po cztery w piętnastu punktach Salmona, i rezultaty do których doszliśmy w krótkości zbierzemy, to widzimy, iż w figurze zupełnego sześciokąta jest

60 linii Pascala	i 60 punktów Kirkmanna
Linie Pascala przecinają się 60razy po trzy w 60 punktach Kirkmanna.	Punkty Kirkmanna leżą 60 razy po trzy na 60 liniach Pascala.
Jest 20 punktów Steinera	i 20 linii Cayleya,
Przez każdy punkt Steinera przechodzą trzy linie Pascala i jedna linia Cayleya.	Na każdej linii Cayleya leżą trzy punkty Kirkmanna i jeden punkt Steinera.
Jest 15 linii Plückera	i 15 punktów Salmona.
Linie Plückera przecinają się po trzy w 20 punktach Steinera tak, że na każdej z nich leżą cztery punkty Steinera.	Punkta Salmona leżą po trzy na 20 liniach Cayleya tak, że przez każdy z nich przechodzą cztery linie Cayleya.

§. 20.

Twierdzenia Pascala i Brianchona rozwiązują w najprostszy sposób najważniejsze zagadnienia konstruktywne, tyczące się krzywych drugiego stopnia, albowiem zagadnienie konstruktywne trzeba uważać jako rozwiązane w najprostszy sposób wtenczas, gdy jest rozwiązane zapomocą linealu.

Zanim jednak przystąpimy do tych zagadnień, uwzględnijmy szczególne przypadki, dla których twierdzenia te także są ważne. Będziemy zawsze punkt przecięcia się boków 12 i 45 naznaczali przez III, punkt przecięcia się boków 23 i 56 przez IV, punkt przecięcia się boków 34 i 61 przez V.

Otóż jeżeli z pomiędzy sześciu punktów 1, 2, 3, 4, 5, 6, danych na C_2, dwa n. p. 1 i 2 staną się sąsiednimi, przez co bok 12 jako łączący dwa sąsiednie punkty przejdzie w styczną w punkcie 1, natenczas sześciokąt przemieni się w pięciokąt. Ale twierdzenie Pascala nie przestaje istnieć, jeżeli tylko pięciokąt będziemy uważać jako sześciokąt o jednym nieskończenie małym boku 12, który jak się powiedziało jest styczną w punkcie 1. Jeżeli jeszcze i punkty 4 i 5 staną się sąsiednimi, a więc bok 45 styczną w 4, natenczas otrzymamy czworokąt wpisany w C_2, który jednak możemy uważać jako sześciokąt o dwóch nieskończenie małych bokach 12 i 45, które tu są stycznymi w punktach 1 i 4. W każdym czworokącie rozróżniamy trzy pary boków przeciwległych. Jeżeli wierzchołki czworokąta tak jak one w kierunku posuwającej się skazówki zegarka po sobie następują naznaczymy przez A, B, C, D natenczas przeciwległymi bokami są AB i DC, AC i DB, AD i CB. Punkty O_1, O_2, O_3, w których się przeciwległe boki przecinają, wyznaczają tak zwany trójkąt przekątny czworokąta.

Niech więc będzie czworokąt A B C D wpisany w C_2. Naznaczmy jego wierzchołki przez 1, 4, 3, 6, natenczas przeciwległe jego boki 16 i 34 jakoteż 13 i 64 przecinają się w punktach O_3 i O_2 leżących na boku O_3 O_2 trójkąta przekątnego przeciwległego temu wierzchołkowi O_1, przez który trzecia para boków przeciwległych czworokąta przechodzi. Jeżeli teraz będziemy uważać czworokąt jako sześciokąt o nadzwyczaj małych bokach 12 i 45, które jak się powiedziało są stycznymi w 1 i 4, natenczas punkt O_2, jako punkt przecięcia się boków przeciwległych 23 i 56 sześciokąta, będzie punktem IV, punkt O_3, jako punkt przecięcia się boków przeciwległych 61 i 34 sześciokąta. będzie punktem V. Bok O_3 O_2 trójkąta przekątnego będzie więc linią Pascala tego sześciokąta i na nim musi się przeciąć trzecia para boków przeciwległych t. j. styczne w 1 i 4. Wynika więc z tego twierdzenie:

Styczne w dwóch wierzchołkach czworokąta wpisanego w C_2, przecinają się na boku przekątnym, przeciwległym temu wierzchołkowi przekątnemu, który leży naboku czworokąta, poprowadzonym przez owe wierzchołki czworokąta, w których styczne zostały wykreślone.

Na podstawie tego styczne w 3 i 6 przetną się także na boku O_3 O_2, styczne w 4 i 3 jako też w 1 i 6 na boku O_1 O_2 a styczne w 4 i 6 jako też w 1 i 3 na boku O_1 O_3. Cztery te styczne w punktach 1, 4, 3, 6 tworzą czworobok opisany na C_2. Naznaczmy je przez I, IV, III, VI. Przecinają się one w sześciu punktach, które stanowią trzy pary przeciwległych wierzchołków czworoboku mianowicie: punkta (I IV) i (III VI) jedną, (IV III) i (I VI) drugą a (IV VI) i (I III) trzecią parę. Proste łączące wierzchołki przeciwległe stanowią trójbok przekątny. W czworoboku naszym trójbok przekątny jest właśnie trójkątem O_1 O_2 O_3. Otrzymaliśmy więc twierdzenie:

Jeżeli w C_2 wpiszemy czworokąt i w wierzchołkach jego wykreślimy styczne, natenczas utworzą one czworobok na C_2 opisany, którego trójbok przekątny jest zarazem trójkątem przekątnym czworokąta.

Wreszcie może nastąpić i ten przypadek, że z tych 6 punktów danych na C_2 trzy razy po dwa staną się sąsiedními mianowicie 1 i 2, 3 i 4, 5 i 6. Otrzymamy teraz trójkąt wpisany w C_2, który jednak możemy uważać jako sześciokąt o trzech bokach nieskończenie małych 12, 34, 56, które tu są stycznymi w punktach 1, 3, 5. Przecięcie stycznej w 1, jako boku 12 sześciokąta, z bokiem 45 daje punkt III, przecięcie stycznej w 5 jako boku 56 sześciokąta, z bokiem 23 daje punkt IV, wreszcie styczna w 3, jako bok 34 sześciokąta, przecina bok 61 w V. Punkta III, IV, V leżą na tej samej prostej.

Jeżeli jednak przypatrzymy się, cośmy uczynili, natenczas widzimy, żeśmy boki trójkąta przecięli stycznymi wykreślonymi w przeciwległych tym bokom wierzchołkach trójkąta 135. Otrzymujemy więc znane twierdzenie:

Jeżeli boki trójkąta wpisanego w C_2 przetniemy stycznymi w przeciwległych tym bokom wierzchołkach wykreślonymi, natenczas trzy punkta przecięć leżą na linii prostej.

Podobne przypadki mogą zajść i przy sześcioboku Brianchona, przy którym będziemy zawsze oznaczać linią łączącą punkt (I II) i (IV V) przez 3, linią łącząca punkt (II III) i (V VI) przez 4, linią łączącą punkt (III IV) i (VI I) przez 5 a punkt Brianchona przez $\mathfrak{Z}$.

Tu mogą dwie styczne n. p. I i II stać się sąsiednimi. Punkt przecięcia się t. j. punkt (I II) będzie punktem styczności stycznej I. Oprócz tego może jeszcze styczna V stać się sąsiednią stycznej IV, w takim razie punkt (IV V) będzie punktem styczności stycznej IV. Otrzymujemy teraz czworobok opisany na C_2, który jednak możemy uważać jako sześciobok specyalny Brianchona. Stosując twierdzenie Brianchona do niego, doszlibyśmy do twierdzenia odwrotnego temu, które otrzymaliśmy o czworokącie wpisanym. Wreszcie może zajść i ten przypadek, że z sześciu stycznych trzy razy po dwie staną się sąsiednimi n. p. I i II, III i IV, V i VI. W takim razie otrzymamy trójkąt na C_2 opisany. Uważając go jako szczególny przypadek sześcioboku opisanego, możemy zastosować twierdzenie Brianchona. Linie 3, 4, 5 będą tu liniami łączącymi punkta styczności boków trójkąta z przeciwległymi tym bokom wierzchołkami. Ponieważ linie 3, 4, 5, przecinają się w punkcie $\mathfrak{Z}$ przeto wynika z tego twierdzenie:

Linie łączące punkty styczności boków trójkąta opisanego na C_2 z przeciwległymi tym bokom wierzchołkami przecinają się w jednym punkcie.

Przystąpmy teraz do rozwiązania zagadnień konstruktywnych. Te, które można rozwiązać na podstawie twierdzenia Pascala, są następujące

Krzywa drugiego stopnia dana jest przez pięć punktów:

I. Znaleść dowolną liczbę innych punktów krzywej.

II. W którymkolwiek z danych punktów wykreślić styczną do krzywej.

III. Znaleść drugi punkt przecięcia się krzywej z prostą poprowadzoną przez jeden z danych pięciu punktów.

IV. Znaleść oba punkta przecięcia się krzywej z jakąkolwiek prostą G.

ad I. Niech będzie dana krzywa C_2 przez 5 punktów 1, 2, 3, 4, 5. Aby znaleść jaki inny punkt, uważajmy go za punkt 6. Jeżeli poprowadzimy linie (12) i (45) natenczas otrzymamy punkt III. Przez ten punkt muszą przechodzić linie Pascala wszystkich tych sześciokątów, które mają jako pięć wierzchołków pięć danych punktów. Jeżeli więc przez III poprowadzimy jaką kolwiek linię π natenczas uważając ją za linią Pascala, wyznaczymy jeden z tych sześciokątów a więc i szósty jego nieznany wierzchołek, a więc nowy punkt krzywej. Linia bowiem (23) przecina π w punkcie IV, a linia 34 w punkcie V. Przez IV musi przechodzić i linia 56 a przez V linia 16. Łącząc więc IV z 5 a V z 1 otrzymamy dwie linie a i b, które się przecinają w szukanym punkcie 6.

Zagadnienie to może mieć kilka szczególnych przypadków

a) Jeden z danych punktów jest nieskończenie odległy.

W tym razie musi być podana prosta p, która przez niego przechodzi to jest prosta, która ów punkt ma jako punkt nieskończenie odległy. Jest to przypadek, gdy hiperbola dana jest przez cztery punkty i kierunek jednej niemaltycznej. Kierunek ten niech wskazuje prosta p, jej nieskończenie odległy punkt, a więc jeden z nieskończenie odległych punktów hiperboli niech będzie 2∞, inne cztery punkty hiperboli 1, 3, 4, 5. Linia 12∞ jest tu równoległa do p, poprowadzona przez punkt 1, linia 45 przecina ją w III. Przez III ciągniemy prostą π. linia 32∞ jest równoległa do p, poprowadzona przez 3, przecina ona π w punkcie IV. Linia 34 przecina π w punkcie V. Ciągnąc linie a i b wyznaczamy nowy punkt 6 hiperboli.

b) Z danych pięciu punktów są dwa nieskończenie odległe. Jest to przypadek, gdy hiperbola dana jest przez trzy punkty i kierunki obu niemaltycznych. Kierunki obu niemaltycznych niech będą dane przez proste p_1 i p_2, których nieskończenie odległe punkty niech będą 2∞ i 4∞, inne trzy punkty niech będą 1, 3, 5. Punkty te muszą tak leżeć, aby pomiędzy trzema liniami, które je łączą, nie było żadnej równoległej do p_1 lub p_2 gdyż, gdyby to nastąpiło, natenczas ta linia przecinałaby hiperbolę w trzech punktach, co być nie może, jeżeli to ma być rzeczywiście hiperbola Ciągniemy więc teraz linię $1 2\infty$, prowadząc przez 1 równoległą do p_2; ta przecina linię $4\infty 5$, która jest równoległą do p_1, poprowadzoną przez 5, w punkcie III. Kreślimy następnie jakąkolwiek prostą π. Równoległa do p_2 pociągnięta przez 3 wyznacza na niej punkt IV, a równoległa przez 3 do p_1. punkt V. Linie a i b wyznaczają nowy punkt hiperboli.

c) Ponieważ styczna łączy dwa punkty sąsiednie krzywej, przeto styczna z danym punktem styczności równoważną jest dwom punktom, krzywa jest więc dokładnie wyznaczona przez cztery punkty i styczną w jednym z nich.

Aby i w tym razie wynaleść inne punkty krzywej, uważajmy styczną jako linią, łączącą punkt 1 z sąsiednim punktem 2, trzy inne punkty niech będą 3, 4, 5. Punkt III otrzymamy jako punkt przecięcia się linii 45 ze styczną. Przez III ciągniemy jakąkolwiek prostą π. Linie 23 i 34, z których pierwsza jest linią łączącą punkt 3 z punktem styczności przecinają prostą π w punktach IV i V. Linie a i b, które tu są IV 5 i V 1 przecinają się w nowym punkcie 6 krzywej

Na szczególną uwagę zasługuje tu przypadek, gdy parabola dana jest przez trzy punkty i kierunek osi. Oś bowiem przechodzi przez nieskończenie odległy punkt paraboli, w którym ją dotyka linia nieskończenie odległa. Kierunek osi niech wskazuje linia p. Ta, jak się rzekło, przechodzi przez punkt styczności linii nieskończenie odległej. Nieskończenie odległy punkt linii p będzie więc 1∞ 2∞, trzy inne punkty niech będą 3, 4, 5. Punkt III jest teraz nieskończenie odległy punkt linii 54, linia π będzie więc jakakolwiek prosta równoległa do 45. Linia $2\infty 3$ będzie równoległą do p pociągniętą przez 3 i przetnie π w IV, prosta zaś 34 przecina π w V.

Linia a przetnie linią b, która tu jest równoległą do p pociągniętą przez V w nowym punkcie 6.

d) Według powyższego krzywa jest dokładnie wyznaczona przez trzy punkty i styczne w dwóch z nich

W tym razie uważajmy jednę ze stycznych jako łączącą punkty sąsiednie 1 i 2 drugą jako łączącą punkty sąsiednie 4 i 5. Punkt przecięcia się stycznych jest III. Pociągnąwszy teraz przez III jakąkolwiek prostą π a następnie linie 23 i 34 otrzymamy na π punkta IV i V. Proste a i b wyznaczą nowy punkt 6.

Jako specyalny przypadek tego zasługuje na uwagę kreślenie hiperboli, gdy są dane obydwie niemaltyczne i jeden punkt. Niemałtyczne są bowiem stycznymi w nieskończenie odległych punktach hiperboli. Punkt III będzie teraz punkt przecięcia się niemaltycznych. Przez III prowadzimy jakąkolwiek prostą π. Linia 23 łączy punkt 3 z nieskończenie odległym punktem niemaltycznej l_1, będzie to więc linia równoległa do l_1 pociągnięta przez 3, tak samo linia 34∞ będzie równoległą do l_2, pociągniętą przez 3. Linie te wyznaczają na π punkta IV i V. Linia a będzie linią równoległą do l_2 a linia b równoległą do l_1, te linie przecinają się w punkcie 6.

ad II W którymkolwiek z danych pięciu punktów wyznaczających krzywę C_2 n. p. w punkcie 1 wykreślić styczną.

Styczną uważamy jako linią łączącą punkt 1 z punktem sąsiednim 6. Linia 12 przecina linią 45 w III, 23 przecina 56 t. j. 51 w punkcie IV, na linii (III IV) muszą się przecinać 34 i 61. Pociągnijmy 34 a otrzymamy punkt V, zatem V 1 musi być żądaną styczną.

Na podstawie tego możemy znaleść niemaltyczną hiperboli, która daną jest przez cztery punkty i kierunek niemaltycznej. Niech bowiem będzie ten kierunek wskazany przez linią l; nieskończenie odległy punkt linii l uważamy więc jako 1∞ 6∞, inne cztery punkty niech będą 2, 3, 4, 5. Otóż linia $1\infty 2$, która jest równoległą do 1, pociągniętą przez 2, przecina linią 45 w punkcie III. Linia 23 przecina 56∞, która jest równoległą do 1, pociągniętą przez 5, w punkcie IV; na prostej III IV przecina się linia 34 z linią $1\infty\ 6\infty$ to jest z niemaltyczną w punkcie V. Linia do 1 równoległa przez V pociągnięta jest więc jedną z niemaltycznych.

Wkrótce poznamy sposób znalezienia drugiej niemaltycznej.

ad III. Znaleść drugi punkt przecięcia się krzywej z prostą G poprowadzoną przez jeden z pięciu punktów.

Linię G uważamy jako linię 16. Punkt III i V otrzymamy przez przecięcie się linii 12 i 54 i linii 34 G. Linia 23 przecina (III V) w punkcie IV, przez który przechodzi i 56, a więc linia 5 IV przetnie linią G w żądanym punkcie 6.

Na podstawie tego możemy, gdy hiperbola dana jest przez cztery punkty i kierunek jednej z niemaltycznych wyszukać i kierunek drugiej niemaltycznej. Pytamy się tu bowiem, w którym drugim punkcie przecina linia nieskończenie odległa hiperbolę. Kierunek jednej niemaltycznej niech będzie dany linią a. Punkt 1 jest więc tu punktem 1∞ i zarazem punktem nieskończenie odległym linii a.

Linia $1\infty 2$ równoległa do a pociągnięta przez 2, i linia 45 dają punkt V. Punkt V jest więc nieskończenie odległym punktem linii 34 zatem linia III $V\infty$ będzie równoległa do 34 poprowadzona przez III; na tej linii leży punkt IV, który otrzymamy ciągnąc linią 23. Przez punkt IV przechodzi i linia 56∞, zatem linia 5 IV wskaże nam kierunek drugiej niemaltycznej.

ad IV. Wyznaczyć oba punkta przecięcia się krzywej danej przez 5 punktów, z jakąkolwiek prostą G.

Aby to zagadnienie rozwiązać, uważajmy dwa z tych punktów n. p. 1 i 2 jako wierzchołki dwóch projektywnych pęków, przez których przecięcie powstaje krzywa. Trzy inne punkty dają trzy pary odpowiednych promieni a, a′, b, b′ i c, c′, przez co projektywność jest wyznaczona. Pęki te wyznaczają na prostej G dwa podziały punktów A, B, C . . . i A′, B′, C′, które są także projektywne albowiem jest $(A\,B\,C\,X) = (a\,b\,c\,x) = (a'\,b'\,c'\,x') = (A'\,B'\,C'\,X')$. Podziały na G mają dwa punkta podwójne E i F, które są właśnie punktami przecięcia się krzywej z linią G. Aby te punkta wynaleść, połączmy podziały A, B, C, X i A′ B′ C′ X′ z jakimkolwiek punktem S promieniami $\alpha, \beta, \gamma, \xi$ . . $\alpha', \beta', \gamma', \xi'$. Przez to otrzymamy w S dwa pęki projektywne, które będą miały dwa podwójne promienie ε i φ przecinające G w punktach E i F. Jeżeli więc znajdziemy promienie ε i φ to wynajdziemy przez to punkty E i F. Zagadnienie jest więc zredukowane do wynalezienia podwójnych promieni dwóch projektywnych pęków o wspólnym wierzchołku. Pęki te dane tu są przez trzy pary odpowiednych promieni $\alpha\ \alpha', \beta\ \beta', \gamma\ \gamma'$. Przetnijmy te pęki jakąkolwiek krzywą drugiego stopnia najlepiej kołem przechodzącym przez S a otrzymamy na obwodzie koła znowu dwa podziały punktów projektywne, które mają jakeśmy to poprzednio wykazali, także dwa punkty podwójne. Oczywiście że punktami podwójnymi są te punkty, w których przecinają koło promienie podwójne ε i φ. Jeżeli więc znajdziemy punkta podwójne podziałów na kole to znajdziemy przez to i promienie ε i φ. Podziały na kole dane są przez trzy pary odpowiednych punktów. Naznaczmy bowiem punkta przecięcia promieni α, γ, β i α', γ', β' z kołem kolejno przez 1, 3, 5, . . 4, 6, 2 to odpowiedne punkta są 1 4, 3 6 i 5 2. Z poprzedniego wiemy, że punktami podwójnymi podziałów na kole są te punkty, w których linia Pascala sześcioboku 1 2 3 4 5 6 koło przecina. To rozwiązuje zagadnienie. Ostatnie dwa zagadnienia rozwiązują i następujące: Znaleść środek i osi główne elipsy względnie hiperboli, danej przez pięć punktów.

Pociągnąwszy bowiem n. p. przez 1 i 5 dwie równoległe proste G_1 i G_2 możemy oznaczyć drugie punkty, w których one przecinają krzywą. Otrzymamy więc dwie równoległe cięciwy, które wyznaczą średnicę krzywej o sprzężonym kierunku.

Prowadząc przez 1 i 5 równoległe do tej średnicy możemy w podobny, jak pierwej, sposób znaleść średnicę sprzężoną. Punkt przecięcia się średnic jest środkiem krzywej. Jeżeli są jednak dane dwie sprzężone średnice, natenczas możemy wyszukać osi główne a więc i ogniska.

§. 21.

Zagadnienia konstruktywne, które na podstawie twierdzenia Brianchona rozwiązać można są następujące:

Krzywa dana jest przez 5 stycznych.

I. Nakreślić dowolną liczbę innych stycznych.

II. Znaleść punkt styczności jednej z danych pięciu stycznych

III. Z punktu obranego na jednej z danych stycznych pociągnąć drugą styczną.

IV. Z punktu obranego na płaszczyźnie pociągnąć obie styczne.

ad I. Z danych pięciu stycznych, które naznaczamy przez I, II, III, IV, V nakreślić inne styczne. Punkty (I II) i (IV V) wyznaczają linią 3; na tej linii muszą leżeć punkty Brianchona wszystkich tych sześcioboków, które mają pięć danych stycznych jako boki. Obrawszy więc na 3 jakikolwiek punkt β, oznaczamy przez to jeden z tych sześcioboków a więc i jego szósty bok VI. Przez punkt β bowiem przechodzi linia 4, łącząca punkta (II III) i (V VI), linia 4 przecina więc styczną V w punkcie A, który jest właśnie (V VI), a więc przez który VI przechodzić musi. Przez punkt β przechodzi i linia 5 łącząca (III IV) z punktem (VI I) zatem linia 5 przecina styczną I w punkcie B, który jest właśnie (VI I), a więc przez który styczna VI przechodzić musi zatem linia A B jest styczną VI.

Zagadnienie to może mieć kilka szczególnych przypadków.

a) Jedna z danych stycznych może być nieskończenie odległą.

Jest to przypadek, gdy parabola dana jest przez cztery styczne. Piątą styczną, to jest linią nieskończenie odległą uważamy jako V∞. Rysujemy naprzód linią 3, ciągnąc przez (I II) równoległą do IV, gdyż punkt (IV V∞) jest teraz nieskończenie odległym punktem stycznej IV. Na 3 obieramy punkt β. Jeżeli β połączymy z (II III), otrzymamy linią 4, na której leży punkt (V∞ VI) A; ten więc jest teraz nieskończenie odległym punktem linii 4. Linia VI idzie zatem przez ten punkt, więc jest równoległą do 4. Jeżeli jeszcze połączymy (III IV) z punktem β linią 5, natenczas otrzymamy na I punkt B przez który VI także przechodzi. Równoległa do 4 pociągnięta przez B jest więc styczną VI.

b) Ponieważ każdy punkt krzywej jest punktem przecięcia się dwóch po sobie następujących stycznych, przeto każda styczna i punkt jej styczności znaczą tyle, co dwie styczne. Krzywa jest więc dokładnie wyznaczona przez cztery styczne i punkt styczności jednej z nich.

Styczną, której punkt styczności jest dany, naznaczmy przez I, a punkt styczności przez (I II). Łącząc ten punkt z punktem (IV V), otrzymujemy linią 3. Na 3 obieramy β. Jeżeli β połączymy z punktem (II III) a więc tu z punktem (I III), otrzymamy 4, która przecina V w punkcie A; łącząc zaś β z punktem (III IV), otrzymujemy linią 5 przecinającą I w punkcie B; linia AB jest żądaną styczną VI.

Tu należy przypadek, gdy hiperbola dana jest przez trzy styczne i jedną niemaltyczną, ta ostatnia bowiem jest styczną w swym nieskończenie odległym punkcie. Niemaltyczną uważamy jako I, a punkt jej nieskończenie odległy jako (I II)∞. Punkt ten łączymy z punktem (IV V) prostą 3, która jest więc linią równoległą do niemaltycznej pociągniętą przez (IV V). Na 3 obieramy β i łączymy go z punktem (II III), a więc tu z punktem (I III) prostą 4, która przecina V w punkcie A; prowadzimy również linią 5, która przecina I w punkcie B; prosta AB jest nową styczną VI.

c) Według powyższego krzywa będzie dokładnie wyznaczona przez trzy styczne i punkta styczności dwóch z nich. Jednę styczną, której punkt styczności dany, naznaczamy przez I a punkt styczności przez (I II); styczną drugą, której punkt styczności dany, naznaczamy przez IV a punkt jej styczności przez (IV V). Prosta 3 łączy obydwa dane punkta styczności. Na 3 obieramy β i łączymy go z punktem (II III) linią 4, która przetnie V w punkcie A; łączymy go następnie z punktem (III IV) linią 5, która przetnie I w punkcie B. Linia AB jest styczną VI.

Tu należy przypadek, gdy hiperbola dana jest przez jednę styczną i obie niemaltyczne. Jedną z tych ostatnich uważamy jako zlewające się styczne I i II a więc punkt jej nieskończenie odległy jako (I II)∞; drugą niemaltyczną uważamy jako zlewające się styczne IV i V a więc jej punkt nieskończenie odległy jako (IV V)∞. Prosta 3 jest teraz linią nieskończenie odległą. Na niej obieramy punkt β. Trzeba więc narysować linią p, której nieskończenie odległym punktem jest β. Punkt (II III) łączymy linią 4 z punktem $\beta\infty$ prowadząc przez (II III) równoległą do prostej p; ta przecina styczną V w punkcie A. Następnie łączymy (III IV) z punktem $\beta\infty$ prowadząc przez (III IV) równoległą do p; ta przetnie I w punkcie B; linia AB jest styczną VI.

ad II. Znaleść punkt styczności jednej z danych pięciu stycznych n. p. stycznej I.

W tym celu uważamy tę styczną jako zlewające się styczne I i VI. Łączymy punkty (I II) i (IV V) linią 3, następnie punkty (II III) i (V VI) t. j. (II III) i (V I) linią 4. Linie 3 i 4 wyznaczają punkt β. Łącząc punkt β z punktem (III IV), otrzymamy linią 5, która przejdzie przez (IV I) t. j przez punkt styczności stycznej I.

ad III. Z punktu P obranego na jednej z danych pięciu stycznych pociągnąć drugą styczną. Obrany punkt uważamy jako (I VI). Kreślimy linie 3 i 5, te wyznaczają punkt β. Łącząc punkt β z punktem (II III), otrzymamy linią 5, która na V wyznaczy punkt Q. Punkt Q jest punktem (V VI) a więc drugim punktem stycznej VI. Linia PQ jest więc drugą żądaną styczną.

Na podstawie dwóch powyższych zagadnień możemy wyznaczyć oś i styczną w wierzchołku paraboli, danej przez cztery styczne. Piątą styczną to jest linią nieskończenie odległą, uważamy jako zlewające się styczne I∞ VI∞. Punkt (I II) jest teraz nieskończenie odległym punktem stycznej II, linia 3 będzie więc linią równoległą do II, pociągniętą przez punkt (IV V). Punkt (V VI) jest nieskończenie odległym punktem stycznej V, zatem linia 4 będzie równoległą do V pociągniętą przez punkt (II III). Połączywszy β z punktem (III IV) otrzymamy linią 5, która przejdzie przez punkt (VI∞ I∞), Linia 5 wskazuje więc punkt, w którym linia nieskończenie odległa dotyka paraboli, a więc wskazuje kierunek osi paraboli.

Jeżeli wykreślimy w którymkolwiek punkcie linii 5 prostopadłą do niej p, natenczas wskaże ona nam kierunek stycznej w wierzchołku paraboli. Nieskończenie odległy punkt P∞ tej prostopadłej jest więc punktem z którego pociągnięte są do paraboli dwie styczne. Jedna z nich jest linia nieskończenie odległa drugą styczna w wierzchołku paraboli.

Aby ją według III znaleść, musimy w dotychczasowej figurze zmienić o tyle numerowanie, że szukaną styczną uważamy jako VI a więc punkt P∞ jako (I∞ VI). Linia 3 jest już poprowadzona, kreślimy jeszcze linią 5, która będzie linią równoległą, do p oprowadzoną przez (III IV). Linie 3 i 5 wyznaczą punkt β'. pPołączywszy β' z punktem (II III), otrzymamy linią 4, która na V wyznaczy punkt Q to jest (V VI). Linia równoległa do p poprowadzona przez Q jest styczną w wierzchołku paraboli.

Znalazłszy tę styczną, możemy teraz wyszukać w znany sposób jej punkt styczności; przez ten punkt zaś przechodzi oś główna, której kierunek jest już także znany.

ad IV. Z obranego na płaszczyznie punktu P pociągnąć obie styczne krzywej, wyznaczonej przez pięć stycznych.

Uważajmy w tym celu styczne I i II jako osi dwóch podziałów projektywnych, które na nich wyznaczają inne styczne krzywej. Projektywność dana tu jest przez trzy pary odpowiednych punktów a a', b b', c c', w których styczne III, IV, V przecinają styczne I i II.

Jeżeli podziały na I i II połączymy z punktem P promieniami, otrzymamy dwa pęki projektywne o wspólnym wierzchołku P, których projektywność jest wyznaczona trzema parami odpowiednych promieni A A', B B', C C', przechodzących przez punkty a a', b b', c c'. Ażeby jakiś promień E był styczną, musi łączyć odpowiedne punkty e e' podziałów na I i II, musi się więc zlewać z odpowiednym mu promieniem E' a więc musi być promieniem podwójnym pęków P. Jak się zaś wyszukuje podwójne promienie takich pęków, pokazano w jednym z poprzednich zagadnień.

Część ta opracowana jest na podstawie następujących dzieł i rozpraw:

1) Analytische Geometrie der Kegelschnitte von George Salomon.

2) Hesse's Vorlesungen a. d. analytischen Geometrie des Kreises und der geraden Linie.

Rozprawy Plückera, Hessego i Cayleya umieszczone w „Crelle's Journal“ tom 5, 24, 41, 62, 68.

WIADOMOŚCI SZKOLNE.

Wiadomości szkolne.

I. Skład grona nauczycieli przy końcu roku szkolnego 1893.

A. Nauczyciele przedmiotów obowiązkowych:

1. *Aleksander Borkowski*, dyrektor gimnazyum, zastępca przewodniczącego Rady szkolnej okręgowej, członek rady miejskiej i rady powiatowej, uczył języka greckiego w kl. V. i VII. 9 godzin tygodniowo.
2. *Julian Lizak*, profesor, uczył matematyki w kl. IIa., IIb., IV, V, VI, propedeutyki filozoficznej w VII i VIII., — razem 20 godz. tygodniowo.
3. *Ks. Symeon Cetnarski*, profesor, uczył religii obrz. rzym. kat. w kl. Iab., IIab., — VIII. razem 16 godzin tygodn.
4. *Włodzimierz Pasławski*, profesor, gospodarz klasy IIa., zawiadowca czytelni ruskiej dla młodzieży, uczył języka łacińskiego w kl. IIa., ruskiego w kl IV., V., VI., VII. i VIII., razem 18 godzin tygodniowo.
5. *Antoni Pado*, profesor, gospodarz klasy VI.. uczył jęz. łacińskiego w kl. IIb., VI i VII., polskiego w IIb., razem 22 godzin tygodn.
6. *Franciszek Zych*, profesor, członek rady miejskiej, uczył geografii w kl. Ia, geografii i historyi w kl. IIa., V., VI., VII. i VIII., razem 20 godzin tygod.; także historyi krajowej jako przedmiotu nadobowiązkowego w kl. VII. przez 2 godz. tygodniowo.
7. *Józef Przybylski*, profesor, gospodarz kl. III., zawiadowca gabinetu przyrodniczego, uczył historyi naturalnej w kl. Ia, Ib., IIa., IIb., III., V. i VI., języka polskiego i matematyki w kl. III., razem 20 godzin tygodniowo.
8. *Roman Moskwa*, nauczyciel, gospodarz klasy VII., zawiadowca gabinetu fizykalnego, uczył matematyki w kl. Ia., Ib., VII. i VIII., fizyki w kl. IV., VII. i VIII., razem 20 godzin tygod.
9. *Ks. Ambroży Polański*, nauczyciel religii dla uczniów obrz. gr. kat., uczył religii w kl. Iab., IIab., III. — VIII., razem 16 godzin tygod.
10. *Józef Staromiejski*, nauczyciel, gospodarz klasy VIII., zawiadowca czytelni polskiej dla młodzieży i wypożyczalni

dla ubogich uczniów, uczył języka łacińskiego i greckiego w kl. VIII. i polskiego w kl. VI., VII. i VIII., razem 19 godzin tygod.

11. *Adolf Arendt*, nauczyciel, zawiadowca zbiorów dla nauki rysunków, uczył rysunków odręcznych w kl. Ia., Ib., IIa., IIb., III., IV., — razem 24 godzin tygodn.; oprócz tego geometryi wykreślnej jako przedmiotu nadobowiązkowego przez 2 godziny tygodn.
12. *Jan Biela*, nauczyciel, gospodarz kł. V., uczył języka łacińskiego w kl. V., greckiego w kl. VI., polskiego w kl. Ib., IV. i V., — razem 20 godzin tygodn.
13. *Witold Barewicz*, dr. filozofii, nauczyciel, uczył języka greckiego w kl. IV., polskiego w IIa., niemieckiego w kl. IIa. III. i IV., — razem 20 godzin tygodn.
14. *Kazimierz Grünberg*, egzam. zastępca nauczyciela, gospodarz klasy IIb, uczył języka niemieckiego w IIb, geografii w Ib., geogr. i historyi w kl. IIb., III. i IV razem 19 godz. tyg.; oprócz tego historyi kraju rodzinnego jako przedmiotu nadobowiązkowego w kl. III. i IV. przez 2 godziny tygodn.
15. *Piotr Rzepnijski*, zastępca nauczyciela, uczył języka łacińskiego w kl. Ib., III. i IV., greckiego w kl. III., — razem 25 godzin tygodn.; prócz tego kaligrafii w niższem gimnazyum po 2 godziny tygodn.
16. *Piotr Christof*, egz. zastępca nauczyciela, zawiadowca niemieckiej czytelni dla młodzieży, uczył języka niemieckiego w kl. V., VI., VII. i VIII., razem 16 godzin tygodniowo.
17. *Józef Mazur*, zastępca nauczyciela, gospodarz kl. Ia., uczył języka łacińskiego i polskiego w kl. Ia., — razem 11 godzin tygodniowo.
18. *Andrzej Szachnowicz*, zastępca nauczyciela, gospodarz klasy Ib., uczył języka ruskiego w kl. Iab., IIab. i III., niemieckiego w kl Ia. i Ib., — razem 18 godzin tygodn.

B. Nauczyciele przedmiotów nadobowiązkowych:

1. *Maurycy Klugmann*, uczył języka francuskiego w 3 oddziałach przez 6 godzin tygodniowo.
2. *Bazyli Stojałowski*, nauczyciel szkoły ludowej, uczył gimnastyki w 2 odziałach przez 6 godzin tyg.
3. *Włodzimierz Buczacki*, nauczyciel szkoly ludowej, uczył śpiewu w 4 oddziałach przez 4 godziny tygodniowo.

Zmiany w gronie nauczycieli
w ciągu roku szkolnego 1893.

1. Reskryptem z d. 27. maja 1892. l. 11130. nadał JExc. P. Minister W. i O. nauczycielowi *Emilowi Bernhardtowi* posadę nauczycielską w c. k. wyższej szkole realnej w Sta-

nisławowie, a zamianował zastępcę nauczyciela c. k. państwowej szkoły przemysłowej we Lwowie *Adolfa Arendta* rzeczywistym nauczycielem w c. k. gimnazyum w Drohobyczu.

2. Reskryptem z d. 3. czerwca 1892. l. 11356. nadał JExc. P. Minister W. i O. nauczycielowi religii rz. kat. księdzu d-rowi *Bronisławowi Karakulskiemu* posadę nauczyciela religii rz. kat. w c. k. gimnazyum w Rzeszowie, a profesorowi religii rz. kat. w c. k gimnazyum w Jaśle ks. *Symeonowi Cetnarskiemu* takąż posadę w c. k. gimnazyum w Drohobyczu.

3. Reskryptem z d. 24 czerwca 1892. l. 13907. nadał JExc. P. Minister W. i O. profesorowi *Stanisławowi Bednarskiemu* posadę nauczycielską w c. k. gimnazyum trzeciem w Krakowie, profesorowi *Zygmuntowi Kunstmannowi* posadę nauczycielską w c. k. niższem gimnazyum piątem we Lwowie, przeniósł profesora d-ra *Tomasza Gawendę* do c. k. gimnazyum w Kołomyi, a profesora c. k. gimnazyum w Kołomyi *Euzebiusza Szajdzickiego* do c. k. gimnazyum w Drohobyczu, zamianował zastępcę nauczyciela *Aleksandra Frączkiewicza* rzeczywistym nauczycielem c. k. gimnazyum w Jarosławiu, zastępcę nauczyciela c. k. gimnazyum trzeciego w Krakowie *Jana Bielę* i zastępcę nauczyciela c. k. gimnazyum Franciszka Józefa we Lwowie *Witolda Barewicza* rzeczywistymi nauczycielami c. k. gimnazyum w Drohobyczu.

4. Reskryptem z d. 25. lipca 1892. l. 15605. przeniosła Wysoka Rada szk. kr. zastępcę nauczyciela c. k. gimnazyum czwartego we Lwowie *Józefa Mazura* do c. k. gimnazyum w Drohobyczu.

5. Reskryptem z d. 23. sierpnia 1892. l. 18802. pozostawił JExc. P. Minister W. i O. profesora c. k. gimnazyum w Kołomyi *Euzebiusza Szajdzickiego*, przeniesionego do tutejszego zakładu, na dotychczasowem miejscu służbowem na razie na przeciąg roku szkolnego 1892/3.

6. Reskryptem z d. 3. września 1892. l. 15325. zamianowała Wysoka Rada szk. kr. kandydata stanu nauczycielskiego *Andrzeja Szachnowicza* zastępcą nauczyciela w tutejszem c. k. gimnazyum.

7. Reskryptem z d. 15. stycznia 1893. l 629. zezwolił JExc. P. Minister W. i O., aby zastępcy nauczyciela *Józefowi Mazurowi* zniżono na przeciąg drugiego półrocza liczbę obowiązkowych godzin do dziesięciu. Skutkiem tego objął w drugiem półroczu naukę języka polskiego w kl. Ib. nauczyciel Jan Biela, a naukę tegoż przedmiotu w kl. IIa. nauczyciel Witold Barewicz.

8. Od dnia 26. lutego 1893. przestał pełnić obowiązki nauczycielskie profesor *Karol Kobierski*, złożony ciężką chorobą, której uległ d. 3. kwietnia 1893. Z tego powodu objął z dniem 27. lutego naukę języka łacińskiego w kl. Ib., tu-

dzież kaligrafii w niższem gimnazyum zastępca nauczyciela Piotr Rzepnijski, naukę języka łacińskiego w kl. VII. profesor Antoni Pado, a języka greckiego w tejże klasie dyrektor Aleksander Borkowski.

II. Plan nauki.

Nauka odbywała się według planu naukowego z roku 1884, uzupełnionego rozporządzeniem JExc. Pana Ministra wyznań i oświaty z dnia 30. września 1891 do l. 1786 z tą różnicą, że języka niemieckiego uczono w I. klasie 6, w II. 5 godzin, a od III. — VIII. po 4 godziny tygodniowo i że nauka rysunków odręcznych była jako w c. k. gimnazyum realnem w 4 niższych klasach obowiązkową. Tej mianowicie nauki udzielano według nowych planów i instrukcyi, wydanych rozporządzeniem JExc. Pana Ministra wyznań i oświaty z d. 17. czerwca 1891 do l. 9193. Nadto zastosowano się przy nauce geografii i historyi, matematyki, fizyki i historyi naturalnej w niższem gimnazyum do rozporządzenia JExc. Pana Ministra wyznań i oświaty z dnia 24. maja 1892. l. 11372.

Poniżej podaje się wykaz lektury łacińskiej, greckiej i niemieckiej, przerobionej w wyższych klasach. Lektura polska i ruska postępowała według przepisanych wypisów.

Lektura łacińska.

III. kl.	Korn. Nepos: Aristides, Cimon, Epaminondas, Pelopidas, Miltiades, Themistocles, Alcibiades, Hannibal.
IV. kl.	Caesar de bell. Gall. I. II. III. — Ovid. Metam. I. 1. 2. 3.
V. kl.	Liv. I. c. 1 — 50. XXII. c. 1 — 50. — Ovid. Metam. I. 89 — 162. 313. — 415. VI. 146 — 312. VIII. 183 — 235. 618 — 720. X. 1 — 63. 72 — 77. Fasti II. 83 — 118. 193 — 246.
VI. kl.	Sall. Catil. — Cic. in Cat. I. — Verg. Aen. II. Ecl I. V. Georg. 136 — 176. 458 — 540.
VII. kl.	Cic. pro leg. Man, de imp. Cn. Pom., pro Arch. poeta. Verg Aen. II. IX.
VIII. kl.	Hor. Carm. I. 1. 2. 3. 6. 12. 14. 17. 22. 31. 34. 37. II. 2. 12. 13. 15. III. 1. 2. 3. 4. 5. 13. 18. 22. 23. 25. 30. IV. 2. 3. 6. 8. 9. Sat. I. IX. Epist. I 11 — Tac. Germ., Ann. I.

Lektura grecka.

V. kl.[1]	Xenoph. Anab. I. 1. 2. 3. 5. 6. 7. 8. 9. Cyr. I. 2. — Hom. Il. I.
VI. kl.	Hom. Il. III. VI. XVIII. XXIV do w. 265. — Herod.

VII. c. 1—50. 140—144. 202—238. — Xenoph. Memor. wybór Apol. c. 1—8.
VII. kl. Dem. Olyn. I. II. — Hom. Odys. V. VI. VII.
VIII. kl. Plat. Apol., Crit. — Sophoc. Antig.

Lektura niemiecka.

VII. kl. Hermann und Dorothea, Egmont, Götz, Goethes Balladen, Jungfrau von Orleans, Maria Stuart.
VIII. kl. Don Carlos, J. Caesar, Maria Stuart. Jungfrau von Orleans, Wallenstein, Auswahl aus Schillers Balladen, Braut von Messina, Wilhelm Tell.

Nauka religii mojżeszowej.

Nauki tego przedmiotu udzielano w I. półroczu w każdej klasie po jednej godzinie tygodniowo. W 2. półroczu dla braku nauczyciela nauka się nie odbywała.

I kl. a) Religia: Cel i wartość moralna nauki religii objawionej; 7 głównych artykułów wiary; powinności wynikające z nauki o artykułach wiary.
b) Historya biblijna: Dobrodziejstwa i łaski Boga wyświadczone Izraelitom przez Mojżesza.
c) Tłumaczenie: Jozue rozdz. 24.

II. kl. a) Religia: Poznanie i rozszerzanie woli Boga; o patryarchach; obietnica uczyniona patryarchom; biblia, słowo Boże.
b) Historya biblijna: Skutki rozpadku Palestyny na dwa udzielne państwa; królowie państwa Izrael, prorok Elioh i Eliza.
c) Tłumaczenie: Samuel a, rozdz. 24. i 26.

III. kl. a) Religia: Podział i znaczenie świąt w ogólności; święta historyczne i sobota w szczególności.
b) Historya biblijna: Prorok Ezechiel i Maleachi; powrót żydów do Palestyny; Samarytanie i żydzi.
c) Tłumaczenie: król. a rozdz. 8 i 12.

IV. kl. a) Religia: Cel i główna treść służby bożej; forma służby bożej w IV. okresie; treść modlitw i forma służby bożej, okres I. i II.
b) Historya biblijna: Podział prawa religijnego; cel i moralna wartość tych praw; Synedryum, najwyższa instancya dla spraw religijnych; zakres działania tej instytucyi pod zależnością Greków i Rzymian.
c) Tłumaczenie; Król. b. rozdz. 4, 5.

V. kl. Religia i hist: Pogląd ogólny na stan żydów od Mojżesza. Powody, cel i skutki zburzenia świątyni I. z porównaniem proroctwa Izajasza i Jeremijasza; cel założenia świątyni II. Ezdrasz prezes Synedryum; wpływ kultury greckiej na żydów.
b) Tłumaczenie; Psalm. 8. 19. 21.

VI. kl. a) Religia i hist.: Filon i Apion: Gamaliel prezes Synedryum. Stan żydów za cesarzów Trojana i Hadryana; rabin Akiba, jego prawa.
b) Tłumaczenie: Przypowieści Salomona rozd. I. i II.
VII. kl. a) Religia i hist.: Żydzi i szkoły w państwie Partów; talmud, jego treść i wartość religijna i naukowa; karaici i sabanici.
b) Tłumaczenie: Jeremiasz rozdz. 5. 15.
VIII kl. a) Religia i hist.: Żydzi w Europie; ich szkoły talmud. w XII. wieku; dążność tych szkół; Maimuniści i talmudziści.
b) Tłumaczenie: Jezajasz rozdz. 1. 11.

Przedmioty nadobowiązkowej nauki.

Historya kraju rodzinnego. Naukę tę wykładano w klasie III., IV. i VII. według planu poleconego przez Wysokie Władze szkolne.

Geometrya wykreślna. Nauka odbywała się raz na tydzień po 2 godziny na podstawie podręcznika i atlasu dra Łazarskiego według planu poleconego przez Wys. Władze.

Kaligrafia w 2 oddziałach przez 2 godz. tyg. Ćwiczenia w piśmie łacińskiem i gotyckiem z ciągłem uwzględnieniem prawidłowego sposobu siedzenia i kierowania ręką w czasie pisania.

Język francuski w 3 oddziałach po 2 godziny tygodn. — W I. oddziale uczono wymawiania wyrazów, dalej form prawidłowych imion i czasowników. Na każdą lekcyę zadania domowe, co miesiąc dwa szkolne. — W II. oddziale uczono nieforemności wszystkich części mowy, znaczenia i używania czasów i trybu łącznego, jakoteż galicyzmów. Zadania jak w I. oddziale. — W III. oddziale uczono składni rządu, użycia trybu bezokolicznego i imiesłowów; prowadzono konwersacyę na podstawie lektury. Zadania jak w I. oddziale. — Używano w I. i II. oddziale gramatyki Ciechomskiego; w III. nadto czytano 3. ks. Telemaka.

Gimnastyka w 2 oddziałach przez 6. godz. tyg. I. Odddział Ćwiczenia wolne w postawie, postawy, ćwiczenia ramion, tułowia, nóg, kombinacye powyższych ćwiczeń; łączenia ćwiczeń wolnych, ruchy podwójne, potrójne. Ćwiczenia wolne postępowe: Postawy, łączenie ćwiczeń wolnych z ćwiczeniami postępowemi. Musztra. Ćwiczenia jednostek, uszykowanie, wyjaśnienie rozkazów, rozstęp; ćwiczenia na miejscu: postawa, zwroty głowy, obroty ciała, chód i bieg w miejscu. II. Oddział. Musztra. Ćwiczenia rzędu; rząd czelny, boczny, skośny, obroty jednostek, dwójek; pochody, biegi, zmiany pochodów; ćwiczenia plutonu, dwurząd obrócony, skośny, dwuszereg, czwórki; ćwiczenia oddziału: szyk obrócony, dwuszereg, czwórki, kolumna, zmiany ustawień. Ćwiczenia na przyrządach, a to na koniu, kozle, poręczkach, drabinach, drążku, kółkach i żerdzi.

Spiew w 4 oddziałach po godzinie tygodniowo. Dwie godziny tygodniowo przeznaczono na naukę teoryi, a dwie na naukę śpiewu choralnego. Naukę teoryi podzielono na dwa oddziały. — W niższym uczono: o głosie, o systemie tonalnym, o piśmie muzycznem, o kluczach, o przenośnikach muzycznych, o stopniach i odległościach, o trybach, tonacyach, skalach dur i mol, o wartości dźwięków, o pauzach, rozmaitych ułatwieniach w pisowni nut, o pojedyńczym i podwójnym punkcie, o mierzeniu taktu. Ćwiczenia w trafianu pojedyńczych tonów, sekund, tercyi i kwart na jeden głos i na dwa głosy.

W oddz. wyższym uczono: o skalach i tworzeniu takowych, o pokrewieństwie tonacyi; o mierzeniu taktu, o takcie pojedyńczym parzystym, złożonym parzystym i nieparzystym, o synkopach i przedtakcie, o fermacie i innych przerwach w reguralności tempa, o przednutkach i międzynutkach, o grupecie, trylu, o akordach, gamie, o fałszywym ruchu głosów i rozwiązywaniu akordów. Ćwiczenia w trafianiu kwart, kwint, sekst i septym na jeden i na dwa głosy; ćwiczenia w śpiewie.

Naukę śpiewu choralnego podzielono na dwa oddziały. W jednym uczono śpiewu kościelnego, a w drugim cerkiewnego.

III. Tematy do wypracowań piśmiennych

a) w języku polskim.

W V. klasie:

1) Lato. Obrazek z natury. (dom.)

2) Zgon Grażyny. Według poem. A. Mickiewicza. (szkol.)

3) Chata wiejska. Na podstawie dyspozycyi. (dom.)

4) Pogrzeb u pogańskich Litwinów. Podług Grażyny A. Mickiewicza. (szkol.)

5) Walka Horacyuszów z Kuracyuszami. Na podstawie Liwiusza. (dom.)

6) Koniec roky szkolnego. Według poem. Syrokomli p. t. Szkolne czasy Jana Dyboroga. (szkol.)

7) Kłótnia w zamku Horeszków. Na podstawie Pana Tadeusza A. Mickiewicza. (dom.)

8) Śmierć ostatniego z Horeszków. Według poem. A. Mickiewicza p. t. Pan Tadeusz. (szkol.)

9) Panowanie Tarquiniusów. Podług Liwiusa. (dom.).

10) Streścić satyrę J. Krasickiego p. t. Pijaństwo. (szkol.)

11) Kwiecień. Opis. Na podstawie dyspozycyi. (dom.)

12) Pierwszy występ poety. Na podstawie J. I. Kraszewskiego p. t. Pierwsze kroki. (szkol.)
13) Burza. Na podstawie dyspozycyi. (dom.)
14) Bitwa pode Lwowem w r. 1675. Według Karola Szajnochy. (szkol.)

Jan Biela.

W VI. klasie:

1) Rzeka a życie ludzkie. Porównanie. (dom.)
2) Jakiemi zaletami młody człowiek wedle Reja odznaczać się winien? (szkol.)
3) „Z młodu hamuj koła". Wyjaśnić na podstawie czyt. ust. Reja. (dom.)
4) Ranek a wieczór. Porównanie. (dom.)
5) Przeciw jakim wadom społeczeństwa polskiego występuje J. Kochanowski w swym „Satyrze?" (szkol.)
6) Niewdzięczność była nieraz zapłatą wielkich ludzi. Uzasadnić przykładami z hist. starożytnej. (dom.)
7) Dyspozycya XIX. trenu J. Kochanowskiego. (szkol.)
8) Maryusz a Sulla. Porównanie. (dom.)
9) Przyczyny rozwoju literatury w wieku XVI. (szkol.)
10) Igrzyska starożytne a turnieje średniowieczne. (dom.)
11) Wyjaśnić i uzasadnić zdanie Andrz. Maks. Fredry: „Prawdy a żartu używaj jak soli". (dom.)
12) Skarga a Starowolski jako pisarze polityczni. (szkol.)
13) Wyjaśnić i uzasadnić zdanie A. M. Fredry: „Zły do urazy bierze przestrogę, dobry do poprawy". (dom.)
14) Porownać pracę ucznia z pracą rolnika w czasie zasiewu i żniwa. (szkol.)

Józef Staromiejski.

W VII. klasie:

1) Zdać sprawę z satyry Naruszewicza p. t. „Chudy literat". (szkol.)
2) Wyjaśnić i uzasadnić przysłowie A. M. Fredry: „Kwap się zwolna". (dom.)
3) Kołłątaj i Staszic. Porównanie. (szkol.)
4) Skreślić obraz społeczeństwa polskiego w czasie czteroletniego sejmu. Na podstawie lektury szkolnej. (dom.)
5) Wady i śmieszności poezyi klasycznej i romantycznej. Na podstawie „Listów" Morawskiego (szk.)
6) Rozwinąć i uzasadnić przysłowie: „Z jakim kto przystaje, takim się staje". (dom.)
7) Halban. Charakterystyka. (szk.)
8) Obraz pustyni w Farysie. (dom.)

9) Rozwinąć i objaśnić zdanie Brodzińskiego: „Nie patrz, czy skończysz, ciągle rób, Ciebie, nie dzieło, czeka grób“. (dom.)
10) Scena w domu Miecznika. Na podstawie I. pieśni „Maryi“.

Józef Staromiejski.

W VIII klasie:

1) Charakterystyka Konrada w poem. A. Mickiewicza p. t. „Konrad Wallenrod“. (dom.)
2) Myśl główna II. cz. „Dziadów“ Mickiewicza. (szkol).
3) Czas to pieniądz. (dom.)
4) Książka dobry i zły towarzysz. Rozprawka. (dom.)
5) Skreślić obraz Marka w kom. Fredry: „Nikt mnie nie zna“. (szk.)
6) Przedstawić stosunek Horacego do Mecenasa. (szk.)
7) Wyjaśnić i uzasadnić zdanie Cycerona: „Nescire, quid ante, quam natus sis, acciderit, id est semper esse puerum“. (szk).
8) Ἄνθρωπος ὢν τοῦτ' ἴσθι καὶ μέμνησ' ἀεί.

Józef Staromiejski.

b) w języku ruskim

W V. klasie.

1) Образъ сѣльского житя въ осени. (dom)
2) Перевести и пояснити уступъ зъ второго договору Руси зъ Греками „Мы отъ рода руского“ до „въ весь вѣкъ въ будущій“. (szk.)
3) Пожитокъ зъ лѣсу. (dom.)
4) Смерть Ромуля. (пôсля Лівія). (szk.)
5) Описъ народныхъ звычаѣвъ на Рождество Христове. (dom.)
6) Описъ мѣста Дрогобича. (dom).
7) Велика княгиня Ольга. (пôсля Нестора) (szk.)
8) Весна; описъ. (dom.)
9) Чимъ провинила Ніоба и яка кара ю постигла? (szk.)
10) Чому Греки закладали кольоніѣ и яке ихъ було значѣнє? (dom.)
11) Битва пôдъ Канами (пôсля Лівія) (szk.)

W VI. klasie.

1) Приятель и облесникъ. Порôвнанє. (dom.)
2) Напады Татаръ на Русь въ 13. вѣцѣ. (пôсля Галицко-вол. лѣтописи) (szk.)
3) Якû наслѣдки мали вôйны пуніцкіи для Римлянъ? (dom).
4) Змѣстъ третои книги Иліяды Гомера. (szk.)

5) Приємности и неприємности поры зимовои. (dom.)

6) Заслуги монастырѣвъ въ середныхъ вѣкахъ. (dom.)

7) Подати основну гадку и перебѣгъ мыслей козацкои думы „Про бурю на чорному мори“. (szk.)

8) Дерево огородове — образъ житя людского. (dom.)

9) Описъ народныхъ звычаѣвъ на великодни̂ свята (пôсля науки о пѣсняхъ обрядовыхъ). (szk.)

10) Жите въ мѣстѣ а жите на селѣ въ лѣтѣ. (dom.)

11) Свѣтъ посмертный въ выображеню нашого простолюдина (на основѣ казокъ народныхъ). (szk.)

W VII. klasie.

1) Значѣнє пословицѣ: „Безъ муки нема науки“. (dom.

2) Подати змѣстъ и тенденцію драмы И. Котляревского „Наталка Полтавка“. (szk.)

3) Якій вплывъ на цивілізацію здѣлало вôдкрытє Америки? (dom.)

4) Характеристика Наума Дрота въ повѣсти Гр. Кв. Основяненька „Маруся“. (szk.)

5) О скôлько вплывае мѣсце мешканя на занятє и успособленє чоловѣка? (dom.)

6) О скôлько языкъ есть найпожиточнѣйшимъ и найшкôдливѣйшимъ членомъ людского тѣла? (dom.)

7) Пояснити и порôвнати алеґоричнѣ поемы Л. Шашкевича „Веснѣвка“ и Я. Головацкого „Весна“. (szk.)

8) Розвинути мысли высказанѣ въ поемѣ М. Шашкевича „Нещастный“ и выказати, о скôлько они суть правдивѣ. (szk.)

9) Пояснити значѣнє пословицѣ „Ей козаче небораче, куй желѣзо, доки горяче. (dom.)

10) Наслѣдки битвы пôдъ Полтавою 1709. (dom.)

11) Характеристика головныхъ особъ Продана и Федора въ повѣсти Устіяновича „Месть верховинця“. (szk.)

W VIII. klasie.

1) Значѣнє рѣкъ въ розвою культуры народôвъ. (dom.)

2) Розвôй штукъ красныхъ въ новѣйшихъ часахъ. (szk.)

3) Значѣнє слôвъ Тараса Шевченка „И чужому научайтесь — И свого не цурайтесь — Бо хто матѣръ забувае — Того Богъ карае. (dom.)

4) Характеристика головныхъ особъ (Институтки и Устины) въ оповѣданю М. Вовчка „Институтка“. (szk.)

5) Якѣ користи дае намъ наука исторіѣ всесвѣтнои? (dom.)

6) Значѣнє Дунаю для австрійско-угорскои монархіѣ. (dom.)

7) Слѣды Гомеровои Одисеѣ (VI кн.) въ дѣлѣ Кулѣша „Орися“. (szk.)

8) Чимъ вôдзначають ся повѣсти Гр. Кв. Основяненька вôдъ повѣстей Марка Вовчка? (szk.)

9) (Maturalne) Олѣмпійскіи игры и всесвѣтнѣ выставы; ихъ значѣне для науки и штуки, промыслу и торговлѣ.

Włodzimierz Pasławski.

c) w języku niemieckim.

W V. klasie.

1) Androklus und sein Löwe. Freie Inhaltsangabe des gelesenen Lesestückes. (dom.)

2) Ueber die Dankbarkeit. Erklärung des Gelesenen. (szk.)

3) Die Verfassung Aegyptens. Inhaltsangabe des Gelesenen. (dom.)

4) Ein Herbstmorgen. Schilderung. (szk.)

5) Was glaubten die alten Aegypter vom Menschen und seiner Seele? a. G. d. L. (dom.)

6) Die Bürgschaft. Eine Nacherz. a. G. d. L. (szk.)

7) Ursachen und Umfang der griechischen Colonisation. (dom.)

8) Cyrus am Hofe des Astyages. Nacherz. a. G. d. L. (dom.)

9) Ein Nachmittag auf dem Eisplatze. (szk.)

10. Welthandel und Seemacht der Phoenizier. Nacherz. a. G. d. L. (dom.)

11) Die Kraniche des Ibykus. Inhaltsangabe. (szk.)

12) Eine Nacht auf der Alm. (Nach dem Lesestücke „Des Stadtkindes Bergfahrt“.) (dom.)

13) Das Leben der Pflanzen. (szk.)

14) Vaters Heimkehr. Eine Nacherz. a. G. d. L (dom.)

W VI. klasie.

1) Alter und Ursprung der Poesie. Gedankengang des gelesenen Lesestückes. (dom.)

2) Die gastliche Aufnahme Telemach's bei Menelaos. Auf Grund der Lectüre. (szk.)

3) Menelaos zwingt den Proteus zum Weissagen. a. G. d. L. (dom.)

4) Des Arminius Unterredung mit seinem Bruder Flavius. a. G. d. L. (szk.)

5) Albion und seine Bewohner nach der Beschreibung des Pytheas von Massalia. (dom.)

6) Romeias erzählt Praxedis die Vergangenheit Wiborads. (Indir. Rede. a. G. d. L.) (szk.)

7) Warum verfiel das römische Kaiserreich? (dom.)

8) Eine Nacherzählung über das Sprichwort: „Vor fremdem Gut bewahr die Hände, Sonst nimmts einmal ein schlimmes Ende“. (dom.)

9) Gottfrieds von Bouillon Rede vor den versammelten Fürsten. (Nach Tassos „Befr. Jerus). (szk.)

10) Der Gedankengang in Hamerlings Gedicht „Einsam“ (dom.)

11) Wie Kudrun ihre Erlöser kennen lernt. a. G. d. L. (szk.)

12) Warum ist Europa den übrigen Erdtheilen überlegen? (dom)

13) Der Kampf mit dem Drachen. (Erzählung des jungen Ritters vor dem Ordensmeister.) (szk.)

14) Eine Erzählung über das Sprichwort: „Wer im Sommer nicht will schneiden, Mag im Winter Hunger leiden“. (dom.)

W VII. klasie.

1) Cid's Stellung zum Herrscherhause in Kastilien nach Herders „Cid“ darzustellen. (dom.)

2) Der Pfarrer und der Apotheker in „Hermann und Dorothea“. Eine vergleichende Charakteristik. (szk.)

3) „In den Ocean schifft mit tausend Masten der Jüngling, Still auf gerettetem Boot treibt in den Hafen der Greis“. (dom.)

4) Welches Bild von den niederländischen Zuständen gewinnen wir aus Goethes Egmont? (szk.)

5) Tages Arbeit, abends Gäste, Saure Wochen, frohe Feste. (dom.)

6) Wie verwertet Goethe die französische Revolution und ihre Ereignisse in „Hermann und Dorothea“? (dom.)

7) „In deiner Brust sind deines Schicksals Sterne“. (szk.)

8) Trau, schau wem! Abh. (dom.)

9) Graf Dunois und Karl VII. Eine Charakteristik. (szk.)

10) „So gewiss
Sie morgen wiederkehrt in ihrer Klarheit,
So unausbleiblich kommt der Tag der Wahrheit. (dom.)

W VIII. klasie.

1) Die Macht des Gewissens in der Schillerschen Ballade „Die Kraniche des Ibykus“ zu begründen. (dom.)

2) Composition und Bedeutung des Gedichts „Das eleusische Fest“. (szk.)

3) Wie offenbart sich die Freundschaft zwischen Don Carlos und Marquis Posa? (Referat.) (dom.)

4) Maria Stuart und Elisabeth. Eine vergleichende Charakteristik. (szk.)

5) In welchen Puncten vergleicht sich die Regierung Karls IV. in Böhmen mit der Kasimirs d. Gr. und Ludwigs d. Gr.? (dom.)

6) Was thaten die Habsburger zur Vergrösserung ihrer Hausmacht? (dom.)

7) Woran knüpft Schiller die kulturhistorischen Schilderungen in seinem „Spaziergang“? (szk.)

8) Nihil est ab omni parte beatum. Eine Abhandlung. (szk.)

9) Ueber den Nutzen des Studiums der Geschichte. (szk.)

10) War Lykurgs Gesetzgebung dem Zwecke gemäss, welchen Gesetzgeber im Auge haben sollen? Matur.-Thema.

Piotr Christof.

d) Do egzaminu dojrzałości.

1) Z języka łacińskiego: a) Przełożyć na język polski z Wergiliusa Aeneidy V. 779 — 815. od słów „At Venus interea“ do słów „Unum pro multis dabitur caput.“ — b) Przełożyć na język łaciński „Starość nie odrywa od zajęć publicznych“, rzecz ułożoną na podstawie 6. rozdziału Cicer. de senectute.

2. Z języka greckiego: Przełożyć na język polski z Xenofonta Cyrup. III. 3, 29—34. od słów „Τῇ δ' ὑστεραίᾳ“ do słów „πυρὰ πολλὰ πρὸ τῶν φυλακῶν καύσαντες ἐκοιμήθησαν“.

3. Z języka polskiego: Przyczyny rozkwitu literatury w wieku XVI.

4. Z języka ruskiego: Олімпійскі игры и всесвѣтні выставы; ихъ значѣне для науки и штуки, промыслу и торговлѣ.

5. Z języka niemieckiego: War Lykurgs Gesetzgebung dem Zwecke gemäss, welchen Gesetzgeber im Auge haben sollen?

6. Z matematyki: a) Rozwiązać przynależne do siebie zrównania:

$$2^x + 3^y = 19, \quad 2^{2x} + 3^{2y} = 265;$$

b) Ktoś chce przez 16 lat na początku każdego roku płacić bankowi premię 196 złr., aby po upływie dalszych 14 lat mógł pobierać na początku każdego roku rentę roczną przez lat 18. Jakaż jest ta renta, jeżeli procent wynosi 4·5%?

c) Trójkąt obraca się naokoło boku c, któremu przyległe są kąty α i β; obliczyć promień kuli, której powierzchnia równa się powierzchni bryły przez obrót trójkąta powstałej. Po wyprowadzeniu ogólnego, logarytmicznie obliczalnego wzoru podstawić $c = 6$ dm, $\alpha = 72^0$, $\beta = 60^0$.

IV. Wykaz książek,

których używać się będzie w roku szk. 1894.

Religia. W I. klasie Katechizm Schustera tłómaczony dla uczniów obrz. łac. przez ks. Zielińskiego; dla uczniów obrz. gr. kat. Христіяньско-католицкій катехизмъ przez ks. Torońskiego. W II. kl.: Dzieje starego zakonu ks. Dąbrowskiego i Исторія библ. ст. зав. ks Torońskiego ч. I. W III. klasie: Dzieje nowego zakonu ks. Dąbrowskiego i Исторія библійна нов. зав. ks. Torońskiege ч. II. W IV. klasie: Liturgika ks. Władysława Jachimowskiego i Литургика ks. Torońskiego. W V. klasie: Introdukcya do pisma św. ks Władysława Jachimowskiego i Apologetyka ks. Torońskiego. W VI. klasie: Nauka wiary w szczególności, ks. Władysława Jachimowskiego i Вѣроученіе частне Пелеша. W VII. klasie: Etyka katolicka ks. Soleckiego i Учебникъ христ. кат. етики — после Др. Ваплера переложивъ Б. Пюрко. W VIII. klasie: Historya kościelna ks. Jachimowskiego i Исторія церковна Wapplera w opracowaniu ruskiem przez Stefanowicza.

J ę z y k ł a c i ń s k i. A) Gramatyka; w I. i II. kl. dr. Z. Samolewicza Zwięzła gramatyka jęz. łacińskiego; w III. IV. i V. kl. gramatyka jęz. łac. tegoż autora, opracowana przez T. Sołtysika; w VI — VIII. kl. dr. Samolewicza gramatyka większa. B) Ćwiczenia: w I. kl Przykłady łacińskie na I. klasę Samolewicza-Sołtysika: w II. kl. dr. Z. Samolewicza; w III. i IV. kl. Próchnickiego. C) Autorowie: w kl. III. Żywoty Corn. Neposa wyd. Kłaka; kl. IV Caesar de bello Gallico wyd. Bednarskiego i Ovidius wyd. Skupniewicza; w V. kl. Livius wyd. Majchrowicza i Ovidius wyd. Skupniewicza; w VI. kl. Sallust. Jugurtha wyd. Sołtysika, Vergilius wyd. Eichlera i Cicero in Catil wyd. Sołtysika; w VII. kl. Vergilius wyd. Eichlera i Cicero pe imp. Cn. Pomp., in Verrem IV., Laelius wyd. Sołtysika; w VII. kl. Horatius wyd. Sasa i Tacitus Germania i Annales Müllera.

J ę z y k g r e c k i. A) Gramatyka: w III. i IV. kl. Fiderera, w V. VI. i VII. kl. Hartla-Ćwiklińskiego, w VIII. Curtiusa-Samolewicza: B) Ćwiczenia w III. IV. kl. Schenkla-Parylaka. C) Autorowie: w V. kl. Chrestomatya z Xenofonta Fiderera. Homera Iliada wyd. Sołtysika: w VI. kl. Xenof. Fiderera, Homera Iliada wyd. Sołtysika, Herodot wyd. Holdera; w VII. kl. Demostenes wyd. Wotkego, Homera Odyssea Paulego; w VIII. Plato Apologia wyd. Lewickiego, Sofokles Antygona wyd. Majchrowicza.

J ę z y k p o l s k i. A) Gramatyka w całem gimnazyum A. Małeckiego wyd. 8. (lub 7). B. Wypisy: w I. kl. Próchnickiego i Wójcika, Lwów 1890.; w II. kl. Wypisy na kl. II. wyd. 5. Lwów 1884; w III. kl. Wypisy na kl. III. wyd. 5. Lwów 1889.; w IV kl. Wypisy na kl. IV. wyd. 2. Lwów 1888.; w V. kl. Wypisy Fr. Próchnickiego Lwów 1888.; w VI. kl. i VII. 1. półr. Wypisy Tarnowskiego i Wójcika Cz. I.; w VII. 2 półr. i VIII. Wypisy Tarnowskiego i Próchnickiego.

J ę z y k r u s k i. A) Gramatyka Ogonowskiego; B) Wypisy w I. kl. Łuczakowskiego, w II. kl. Romańczuka Czytanka część II. wydanie 2.; w III. i IV. kl. czytanki Partyckiego; w VI kl. Chrestomatya Ogonowskiego i Czytanka Barwińskiego tom I.; w VII. kl. Czytanka Barwińskiego tom II.: w VIII. kl. Czytanka Barwińskiego tom III.

J ę z y k n i e m. W kl. I — IV. Ćwiczenia D-ra Germana i D-ra Petelenza; w kl. V. VI. i VII. wypisy Petelenza i Wernera;

w kl. VIII, wypisy Harwota II. tom. — Nadto w kl. III. i IV. Gramatyka Petelenza. Obok wypisów czytać się będzie w całości: w kl. VII. Minna v. Barnhelm, Nathan der Weise, Hermann und Dorothea, Götz von Berlichingen i Maria Stuart, w kl. VIII. Iphigenie auf Tauris, Wilhelm Tell, Ueber naive und sentim. Dichtung, Macbeth — w wydaniu Graesera.

Geografia i Historya. W I. kl. geografia Benoniego i Tatomira wyd. 5 (lub. 4.); w kl. II. geografia Baranowskiego i Dziedzickiego wyd. 5. (lub 4.); historya powszechna Semkowicza część I.; w III kl. geografia jak w kl. II., historya Weltera-Sawczyńskiego część II. wyd. 5.; w kl. IV. Weltera-Sawczyńskiego Dzieje nowożytne, wyd. 5. Geografia monarchii austr. węg. D-ra Benoniego-Majerskiego; w kl. V. Zakrzewskiego Historya powszechna cz. I.; w kl. VI. Zakrzewskiego Historya powszechna Cz. I. i Gindelego Dzieje średniowieczne; w kl. VII. Gindelego Dzieje nowożytne, Lewickiego Zarys dziejów Polski i krajów ruskich; w kl. VIII. Hannaka-Lenicka Historya i statystyka monarchii austryacko-węgierskiej, Lewickiego Zarys dziejów Polski.

Matematyka. W I.—IV. kl. Arytmetyka Dr. Wł. Zajączkowskiego; w I. II. geometrya Mocnika w przekładzie G. Maryniaka część I. wyd 6; w III. kl. i IV. geometrya Mocnika w przekładzie G. Maryniaka, część II. wyd. 3. i 4; w całem wyższem gimnazyum geometrya Mocnika w przekładzie Staneckiego, w V. i VI. kl. algebra Baranieckiego, w VII. Dziwińskiego, w kl. VIII. Mocnika-Bodyńskiego. — Logarytmy w kl. VI. VII. i VIII. Adama.

Historya naturalna. W I. i II. kl. Zoologia Nowickiego, botanika Rostafińskiego; w III. mineralogia Łomnickiego, w V. kl. botanika Rostafińskiego; mineralogia Łomnickiego; w VI. kl. zoologia dla klas wyższych dr. Petelenza.

Fizyka. W III. IV. i VIII kl. Soleskiego, w VII. kl. Kaweckiego i Tomaszewskiego; Chemia Tomaszewskiego (w kl. VII.).

Propedeutyka filozofii. W VII. kl. Logika Kozłowskiego; w VIII. klasie psychologia Dr. Crügera w przekładzie Sawczyńskiego.

V. Zbiory naukowe.

1. Do biblioteki nauczycielskiej przybyły w r. szk. 1893 następujące ważniejsze dzieła:

a) przez kupno: Muzeum r. 1893., Przewodnik bibliograficzny r. 1893., Przewodnik hygijeniczny r. 1893., Warszawska Biblioteka r. 1893., Zeitschrift für das Gymnasialwesen r. 1893., Geografische Mittheilungen r. 1893., Geogr. Rundschau r. 1893., Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik r. 1893., Учитель r. 1893., Oesterreich in Wort u. Bild (ciąg dalszy). Левицкій Бібліографія (ciąg dalszy), Frick Lehrproben und Lehrgänge (ciąg dalszy), Müllers Alterthumswissenschaften (ciąg dalszy), Teka konserwatorska; Hölzel, Geographische Charakterbilder, Serie I—III.; Die Hauptformen der Erdoberfläche, für den ersten geographischen Unterricht; Spruner-Bretschneider, Historischer Wandatlas, cztery mapy; **Барвѣньскій, Исторична Библіотека**, t. XI - XIV.; Wildermann, Jahrbuch der Naturwissenschaften, Jahrgg. 1889/90, 1891/2; Belehrung über Cholera und Choleramassnahmen.

b) z darowizny: Bieżące wydawnictwa Akademii Umiejętności w Krakowie; Przegląd polski; Hoene-Wroński, Reforma absolutna wiedzy ludzkiej; Próchnicki-Wójcik, Wypisy polskie dla klasy I.; Rotter, Jak przedstawiają się dziś uzupełniające szkoły przemysłowe w kraju?; Bauch, Rudolphus Agricola iunior; Katologi międzynarodowej wystawy dla muzyki i teatru w Wiedniu; Soleski, Zarys chemii; Rocznik Kółka naukowego tarnopolskiego za rok 1892.

2. Do biblioteki dla młodzieży przybyły następujące dzieła:

a) przez kupno: Sienkiewicz, Potop; Biblioteka dla młodzieży t. 7—9.; Berlicz Sas, Dwie babki; Łoziński, Skarb watażki; Dr. Antoni J. S. IV. t. 1—2; Cooper, Ostatni Mohikanin; Tarnowski, Komedye Fredry; Чайченка творы t. I.; Чайченка Оповѣданя t. II.; Нечуй, Навіжена; Нечуй, Надъ чорним морем; Просвѣта, Веняминъ Франклинъ; Вôдкрытє Америки; Пригоды Донъ-Кішота; Донъ Жуанъ; Финляндія и Сагара; Гузаръ, Илюстрований житя святыхъ; Lippert, Deutsche Sittengeschichte, Bd. 68, 69.; Klaar Geschichte des modernen Dramas; Stifter, Studien, Bunte Steine, Erzählungen.

b) z darowizny: Misye katolickie 1893.; Graeser, Julius Caesar (10 egzempl., dar uczniów VIII. klasy); Freytag, Hermann und Dorothea, Wilhelm Tell, Jungfrau von Orleans, Prinz Friedrich von Hornburg, Die Hermannsschlacht (dar nakładcy); Graeser, Die hamburgische Dramaturgie, Goethes Gedichte (dar uczniów).

3. Do biblioteki dla ubogich uczniów zakupiono książek szkolnych za 56 złr. 20 ct. a. w.

4. Do gabinetu fizykalnego zakupiono:

Równia pochyła według Weinholda: Gazometer z blachy cynkowej; Lampka bezpieczeństwa Davyego; Połączone rurki włoskowate; Skrzypce żelazne o 8 tonach; Kaleidoskop; Zasłona do projekcyi; Jonledâ przyrząd do okazania, iż prąd wytwarza ciepło; Dwa wielkie głośne telefony Siemensa: Zupełny przyrząd według Beetca do powtórzenia doświadczenia Wolty; Przyrząd Strouhala do chemicznego czyszczenia rtęci.

5. Do gabinetu historyi naturalnej zakupiono następujące preparaty przemian: Melolonthe vulgaris; Apis mellifica, Musca domestica, Locusta viridissima, Ranatra linearis, Tinea granella

6. Do zbiorów dla nauki rysunków zakupiono: Herdtle, Vorlegeblätter, zum Studium des Flachornamentes des ital. Renaissance; Stork, Kunstgewerbliche Vorlegeblätter

VI. Funduszy na zakupienie zbiorów naukowych.

1) Datki 349 uczniów na zbiory naukowe . .	349 zł.	—	ct.
2) Taksy wstępne od 75 uczniów . . .	157 „	50	„
3) Taksy za duplikaty świadectw szkolnych .	8 „	—	„
razem .	514 zł.	50	ct.

VII. Fundusze na wsparcie ubogich uczniów.

1. Odsetki z fundacyi ś. p. Rozalii Jachniewiczówny, wynoszącej w nominalnej wartości kwotę 400 zł. m. k., a przeznaczonej na zakupno książek szkolnych dla ubogich uczniów, wyniosły . . . . . . 2 zł. 36. ct.

Uwaga. Jedna obligacya indemn galic. wschod. w nominalnej wartości 350 zł., została wylosowana, a odsetki od listopada 1891. r. dotąd niepobrane.

2 Na wsparcie ubogich uczniów bez różnicy wyznania religijnego wpłynęły na ręce dyrekcyi w r. szk. 1893. następujące datki:

Od Wgo Pana Natana Apfla	2 zł.	—	ct.
„ „ „ Juliusza Ungera . .	4 „	—	„
„ Towarzystwa Oszczędności w Drohobyczu	45 „	—	„
razem .	51 zł.	—	ct.

Wymienionym Dobrodziejom składa Dyrekcya w imieniu młodzieży szkolnej najgorętsze podziękowanie.

3. Z datków, wrzucanych do puszki przez profesorów i uczniów po egzortach i po lekcyach religii mojżeszowej, wpłynęło .	25 zł.	97 1/2	ct.
4. Pozostało z roku szk. 1892. . . .	51 „	61 1/2	„
Kwoty pod 1—4 wyszczególnione wynoszą razem .	181 zł.	95	ct.

Z tego użyto na zakupno książek szkolnych do księgozbioru ubogiej młodzieży	56 złr. 20 ct.
na uzupełnienie opłaty szkolnej i zadomogi dla 14 uczniów	52 „ — „
razem .	108 złr. 20 ct.
Zostaje zatem na rok następny . .	73 złr. 75 ct.

5. Stypendya wynosiły w całym roku szkolnym ogólną kwotę 1(54 złr. 50 ct., a pobierało je 7 uczniów, mianowicie:

Krajczyk Bazyli z kl. III. z fundacyi im. Kossaka 31 złr. 50 ct.

Łopuszański Jan z III. kl. z funduszu nadwyżek karnych 109 złr.

Kobryn Piotr z kl. IIIa z fundacyi Rostockiego 370 złr.

Przybyłowicz Przemysław z kl IV. z fundacyi Głowińskiego 157 złr. 50 ct.

Jachno Jakób z VII. kl. z fundacyi im. Kossaka 45 złr. 50 ct.

Gottlieb Szaja z VIII. kl. z fundacyi Drohobyckiej Imienia Najjaśniejszego Cesarza Franciszka Józefa I 150 złr.

Towarnicki Bazyli z VIII. kl. z fundacyi Dr. Jana Towarnickiego 200 złr.

6. Od roku 1881 istnieje w Drohobyczu stowarzyszenie „Бурса св. Іоана Крестителя въ Дрогобичи“, którego celem jest wspieranie ubogiej młodzieży ruskiej.

7. Dnia 21. grudnia 1891. r. zawiązało się towarzystwo „Bursy dla młodzieży polskiej imienia Adama Mickiewicza pod wezwaniem św. Stanisława Kostki“. Towarzystwo to, jak i powyżej wspomniane ma zamiar po uzyskaniu dostatecznego funduszu wybudować dom, w którymby ubodzy uczniowie mogli pod nadzorem prefekta oddawać się nauce wolni od niebezpieczeństw, zagrażających ich cnocie. Towarzystwo chociaż jest dopiero w zawiązku, wspierało już ubogą młodzież polską doraźnymi datkami.

8. Towarzystwo „Żydowska kuchnia ludowa w Drohobyczu“ ofiarowało ubogim uczniom bez różnicy wyznania religijnego bezpłatne objady, składające się z rosołu, mięsa i chleba, a to w własnych lokalnościach i w osobnych dla uczniów wyznaczonych godzinach. Z tej, z największą uprzejmością ofiarowanej pomocy korzystało w zimowych miesiącach ubiegłego roku szk. 4 uczniów, a mianowicie 2 chrześcian i 2 izraelitów. Dyrekcya składa na tem miejscu Wydziałowi Towarzystwa najszczersze podziękowanie za pomoc.

VIII. Statystyka uczniów.

	W klasie Ia	Ib	II	IIIa	IIIb	IV	V	VI	VII	VIII	Razem
I. Frekwencya w ogólności.											
1. Przy końcu roku szk. 1892 było	44	35	45[1]	28	26	37	31	26	21	13	306[2]
	Ia	**Ib**	**IIa**	**IIb**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**	
2. Publicznych uczniów na początku roku szkol. 1893. było	39	39	45	34	40	41	32	29	25	18	345
3. Przyjęto w ciągu 1. półr. 1893.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4. Między nimi było:											
a) z innych zakładów α) z promocyą	29	34	1	3	1	1	1	—	1	—	71
β) repetentów	—	—	—	—	—	—	1	2	—	—	3
b) z tutejszego zakładu α) z promocyą	—		34	26	29	37	23	24	23	16	212
β) repetentów	10	5	10	5	13	3	7	3	1	2	59
5. Ustąpiło w ciągu 1. półrocza 1893.	8	4	1	2	4	3	2	—	—	—	24
6. Pozostało przy końcu 1 półrocza	32	35	44	32	39	38	30	29	25	18	322
7. Przyjęto w ciągu 2. półrocza	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—	2
8. Ustąpiło w ciągu 2. półrocza	7	5	3	1	6	7	2	3	1	—	35
9. Pozostało przy końcu 2. półrocza	25	30	41	31	33	31	30	26	24	18	289
10. Prywatnych uczniów było w I. półroczu 1892.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11. w II półroczu	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
II. Frekwencya przy końcu II. pół											
1. Według miejsca pobytu rodziców.											
a. z Drohobycza było uczniów	13	19	26	23	22	24	15	14	18	10	148
b z Drohobyckiego powiatu	9	7	13	7	5	7	10	8	3	4	73
c. z Samborskiego „	—	—	—	-	—	—	—	1	—	—	1
d. z Stryjskiego „	—	—	—	-	—	—	1	1	—	—	2
e. z innych powiatów	3	4	2	1	6	—	4	2	3	4	29
2. Według miejsca urodzenia uczniów.											
z Drohobycza i Drohobyckiego powiatu	18	20	33	19	15	22	18	15	18	11	189
z innych powiatów Galicyi	7	10	8	11	18	9	11	10	6	7	97
z Morawii Krainy, Styryi	—	—	—	1	—	—	1	1	—	—	3
3. Według wyznania religijnego uczniów.											
Rzymsko-katolickiego wyznania	10	16	9	11	9	12	10	9	9	6	101
Grecko-katolickiego	6	2	14	8	11	8	7	9	5	6	76
Ewangelików	—	—	—	2	—	—	1	1	—	1	5
Innych akatolików	—	1	1	—	—	—	—	—	—	—	2
Mojżeszowego wyznania	9	11	17	10	13	11	12	7	10	5	105
4. Według języka ojczystego.											
Polski język za ojczysty uznało	19	28	27	21	22	23	20	17	19	12	208
Ruski język „ „ „	6	2	14	8	11	8	7	9	5	6	76
Niemiecki „ „ „		—	—	2	—	—	3	-	—	—	5
5. Według wieku uczniów.											
11 lat miało	4	6	—	—	—	—	-	—	—	—	10
12 „	5	16	11	6	—	—	—	—	—	—	38
13 „ „	7	6	7	9	6	—	—	—	—	—	35
14 „ „	8	1	11	8	6	6	—		—	—	40
15 „ „	1	1	8	4	12	5	5	—	—	—	36

	Ia	Ib	IIa	IIb	III	IV	V	VI	VII	VIII	Razem
	W klasie										
16 lat miało	—	—	3	4	7	4	7	4	1	—	30
17 „ „	—	—	1	—	2	11	6	4	4	1	29
18 „ „	—	—	—	—	—	4	6	4	2	3	19
19 „ „	—	—	—	—	—	1	5	5	8	5	24
20 „ „	-		—	—	—	—	1	4	4	3	12
21 „ „	—	—	—	—	—	—	—	2	4	3	9
22 „ „	—	—	—	—	—	—		2	—	1	3
23 „ „	—	—	—	—	—	—	—	1	—	2	3
24 „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1
Razem .	25	30	41	31	33	31	30	26	24	18	289

b. Frekwencya przy końcu 2. półr. na przedmioty względnie obowiązkowe i nadobowiązkowe:

	Ia	Ib	IIa	IIb	III	IV	V	VI	VII	VIII	Razem
a. na naukę języka ruskiego	10	5	15	10	11	14	7	9	6	6	93
b. „ „ historyi kraju rodzinnego	-	—	—	—	33	31	—	—	24	—	88
c. „ „ języka francuskiego . . .	—		3	6	6	9	5	1	1	—	31
d. „ „ geometryi wykreślnej . .		—	—		—	—	4	7	—	—	11
e. „ „ kaligrafii	15	21	15	9	13	11	-	—	—	—	84
f. „ „ gimnastyki	17	19	22	15	14	14	8	6	10	6	132
g. „ „ śpiewu	8	13	12	4	8	7	8	7	7	6	80

III. Klasyfikacya.

a. Odnośnie do r. szk. 1892.

	Ia	Ib	II	IIIa	IIIb	IV	V	VI	VII	VIII	
do poprawczego egzaminu przeznaczono	9	2	7	4	4	6	6	5	6	2	51
zdało poprawczy egzamin	9	2	7	2	4	6	6	5	6	1	48
nie zdało poprawczego egzaminu . . .	—		—	2	—	—		—	—	1	3

b. Ostateczny zatem wynik klasyfikacyi za 2. półrocze r. szk. 1892.

	Ia	Ib	II	IIIa	IIIb	IV	V	VI	VII	VIII	
celujący stopień otrzymało	3	3	4	4	3	4		1	1	1	24
pierwszy „ „	33	26	25_1	18	16	27	26	23	18	11	223,
drugi „ „	3	3	5	2	4	2	4	2	2	1	28
trzeci „ „	5	3	11	4	2	4	1	—	—	—	30
Razem .	44	30	45_1	28	25	37	31	26	21	13	305_2

c. Z końcem roku szk. 1893.

	Ia	Ib	IIa	IIb	III	IV	V	VI	VII	VIII	
celujący stopień otrzymało . . .	3	1	1	3	-	4	3		—	1	16
pierwszy „ „ . . .	18	14	22	17	1[illegible]	11	15	16	17	14	153
drugi „ „ . . .	2	6	7	4	11	7	1	2	5	1	46
trzeci „ „	6	5	4	4	4	2	6	3	—	1	35
do poprawczego egzaminu przeznaczono	1	4	7	3	4	7	5	5	2	1	39
Razem .	25	30	41	31	33	31	30	26	24	18	289

IV. Opłata szkolna.

	Ia	Ib	IIa	IIb	III	IV	V	VI	VII	VIII	
1. Płaciło całą opłatę w 1. półroczu	19	24	18	11	22	14	19	7	9	6	149
„ „ „ „ 2. „ . .	20	16	15	12	23	16	16	10	15	12	155
2. Uwolnionych od całej opłaty w 1. pół.	13	11	26	21	17	24	11	22	16	12	173
„ „ „ „ „ 2. „	5	14	26	19	10	15	14	16	9	6	134

	W klasie										Razem
	Ia.	Ib.	IIa	IIb.	III.	IV.	V.	VI.	VII	VIII	
3. Opłata szkolna wynosiła w 1. półr. .	285·	360·	270·	165·	330·	210·	285·	105.	135·	90·	2235·
„ 2.	300·	240·	225	130·	345·	240.	240·	150·	2 5·	100·	2325·
Razem	585.	600·	405·	345·	675·	450·	525·	255·	360·	270·	4560·
4. Taksy wstępne wynosiły	71 4	69·3	—	24·	2 1	—	8·4	4·2	2·1	—	159·
5. Datki na zbiore naukowe	41	39·	45.	34·	43·	41·	34·	29·	25·	18·	349·6
6. Taksy na wydane duplikaty	—	—		—	—	—	—	—	—	—	8·

Co do stanu rodziców było między uczniami przy końcu II. półrocza.

synów księży grecko-katol.	16
„ adwokatów	4
„ lekarzy	2
„ urzędników publicznych	28
„ urzędników prywatnych	7
„ właścicieli i dzierżawców większych posiadłości .	8
„ właścicieli realności	6
„ kapitalistów, przemysłowców i kupców . . .	76
„ nauczycieli szkół ludowych	10
„ nauczycieli gimnazyalnych	1
„ rzemieślników	28
„ włościan i rolników	31
„ sług publicznych i prywatnych	26
„ zarobników	22
sierót	24
Razem	289

IX. Ważniejsze rozporządzenia.

1. Rozporządzeniem z d. 6. kwietnia 1893. l. 139. poleciło Wysokie Prezydyum c. k. Rady szkolnej krajowej przypomnieć uczniom szkół średnich zakaz należenia do jakichkolwiek Towarzystw.

2. Rozporządzeniem z d. 17. lipca 1893. l. 374. poleciło Wysokie Prezydyum c. k. Rady szkolnej krajowej żądać od wszystkich uczniów, wstępujących do zakładu, z wyjątkiem tych, u których niewątpliwie sprawdzić można, że przebyli ospę rodzinną, wiarygodnego dowodu, iż w czasie późniejszym od 1. stycznia 1891. roku byli szczepieni lub rewakcyonowani. Wszyscy uczniowie, którzy takiego dowodu nie złożą, winni w przeciągu miesiąca bież. roku poddać się rewakcynacyi i przedłożyć Dyrekcyi świadectwo tej rewakcynacyi. Uczniom, którzyby się do tego polecenia nie zastosowali, należy 1. października wzbronić wstępu do szkoły.

X. Kronika zakładu.

Wpisy uczniów do zakładu odbyły się 29. 30. i 31. sierpnia 1892. Egzamina wstępne do I. klasy odbyły się przed feryami 15. i 16. lipca, po feryach 1. i 2. września. W pierwszym terminie zdawało egzamin 42, w drugim 44, razem 86 uczniów. Reprobowano 23.

W dniach 1. i 2. września odbyły się także egzamina poprawcze.

D. 3. września 1892. odprawiono uroczyste nabożeństwo w kościele parafialnym, wspólne dla młodzieży katolickiej obu obrządków.

W d. 4. października, jako w dniu Imienin Najj. Pana, i w d. 19. listopada, jako w dniu Imienin Najj. Pani, brała młodzież wraz z gronem nauczycielskiem udział w uroczystych nabożeństwach, odprawionych w kościele i w cerkwi na intencyę Najjaśniejszych Państwa. Również brała młodzież gimnazyalna udział w nabożeństwie żałobnem d. 4. maja za duszę ś. p. Cesarzowej Maryi Anny i d. 27. czerwca 1893. za duszę ś. p. Cesarza Ferdynanda I.

D. 17. grudnia 1892. urządziła młodzież gimnazyalna za zezwoleniem dyrekcyi wieczorek muzykalno-deklamacyjny ku uczczeniu pamięci Adama Mickiewicza w miejskiej sali gimnastycznej, którą Świetna Zwierzchność gminna z wszelką gotowością bezinteresownie odstąpiła na ten cel, za co też niechaj na tem miejscu będzie jej wyrażone w imieniu zakładu gorące podziękowanie.

Dnia 10. kwietnia 1893. zmarł po długiej i ciężkiej chorobie profesor Karol Kobierski, mąż niestrudzonej pracy, sumienny i gorliwy nauczyciel, szczery przyjaciel młodzieży, a w gronie nauczycieli serdeczny i powszechnie szanowany i wielbiony kolega. Pogrzeb odbył się przy tłumnym udziale publiczności d. 12. kwietnia. Dnia 18. kwietnia odbyło się za staraniem grona nauczycielskiego żałobne nabożeństwo za spokój jego duszy w tutejszym kościele parafialnym. W nabożeństwie uczestniczyła także młodzież gimnazyalna.

Dnia 15. czerwca po południu urządzono wspólną wycieczkę wszystkiej młodzieży w towarzystwie grona nauczycielskiego do pobliskiego lasku, gdzie kilka godzin przepędzono na odpowiednich wiekowi zabawach. Następnego dnia była młodzież wolna od lekcyi przedpołudniowych.

O ile pogoda pozwalała, odbywali uczniowie także poszczególnych klas w towarzystwie nauczycieli wycieczki za miasto częścią w celach naukowych częścią dla przyjemności.

Od 15. do 23. maja włącznie odbywał się piśmienny, a od 26. do 28. czerwca włącznie ustny egzamin dojrzałości pod przewodnictwem Dyrektora c. k. gimnazyum przemyskiego W-go

Pana Stanisława Piątkiewicza. Dnia 29. czerwca po nabożeństwie nastąpiło rozdanie świadectw abituryentom.

W ciągu roku szkolnego przystępowała młodzież katolicka trzy razy do spowiedzi i komunii św.

Rok szkolny zakończono 15. lipca 1893. dziękczynnem nabożeństwem w cerkwi parafialnej i rozdaniem świadectw szkolnych

XI. Klasyfikacya uczniów
za drugie półrocze 1893.

(Nazwiska uczniów celujących odznaczone grubszymi czcionkami).

Klasa Ia.

Alexandrowicz Efroim
Badecki Franciszek
Badecki Jakób
Bleiberg Hersz
Byczyński Zygmunt
Czapelski Włodzimierz
Klinghoffer Fajwel
Komarnicki Włodzimierz
Kutschera Alexander
Olexin Bazyli
Palmrich Jan
Resport Abraham
Smoła Aleksander
Szajna Piotr
Tiegermann Liepe
Zienkiewicz Stanisław
Stopień drugi otrzymało 2
Stopień trzeci „ 6
Do poprawczego egzaminu przeznaczono 1

Klasa Ib.

Antler Mojżesz
Cieśliński Zdzisław
Diehl Józef
Huczyński Ignacy
Kilarski Jan
Kowalczuk Julian
Kreppel Szymon
Kuhmerker Izrael
L' Etanche Stanisław
Łańcucki Stanisław
Nipl Józef
Przysłup Feliks
Rosenfeld Jakób
Tomaszewski Tadeusz
Wachlarz Stanisław
Stopień drugi otrzymało 6
Stopień trzeci „ 5
Do poprawczego egzaminu przeznaczono 4

Klasa IIa.

Bardach Mojżesz
Bromowicz Stanisław
Gartenberg Izak
Gelehrter Władysław
Grodzki Czesław
Harasym Michał
Hoffmann Hersch
Hrycaj Jan
Koestlich Roman
Kunaniec Stefan
Lindenbaum Izrael
Lindscheid Jan
Łańcucki Erazm
Marków Józef
Mendelsohn Mojżesz
Nikolak Michał
Pomeranz Salamon
Puszkar Mikołaj
Reich Leopold
Sawczyn Antoni
Schäftler Samuel
Zeimer Chaim
Zeimer Szaje
Stopień drugi otrzymało 7
Stopień trzeci „ 4
Do poprawczego egzaminu przeznaczono 7

Klasa IIb.

Apfel Jerzy
Busek Artur
Dąbrowski Władysław
Dorociński Eugeniusz
Gottlieb Men
Klober Bronisław
Kobryn Włodzimierz
Klugmann Izydor
Kusznir Mikołaj
Lazarów Jan
Łukasiewicz Augustyn
Mühlrad Eliasz

Platz Gustaw
Ringel Michał
Stojałowski Włodzimierz
Szych Ignacy
Telichowski Roman
Twerdochleb Meliton
Wolański Józef
Żebrowski Mieczysław
Stopień drugi otrzymało 4
Stopień trzeci „ 4
Do doprawczego egzaminu przeznaczono 3

Klasa III.

Apfel Natan
Backenroth Abraham
Czapelski Józef
Dub Konstanty
Freilich Abraham
Gasser Eisig
Hryniewiecki Eugeniusz
Janicki Franciszek
Kiedacz Mikołaj
Krajczyk Bazyli
Pichowicz Michał
Róg Stanisław
Róg Władysław
Thürhaus Leon
Stopień drugi otrzymało . . . 11
Stopień trzeci „ 4
Do poprawczego egzaminu przeznaczono 4

Klasa IV.

Berkowicz Michał
Czerwiński Michał
Garbowski Mikołaj
Gottlieb Hersch
Herschdörfer Jonasz
Klinghoffer Markus
Kuziów Grzegorz
Lill Antoni
Mielnik Stanisław
Pichowicz Jan
Przybyłowicz Przemysław
Unger Stanisław
Wiśniewski Maryan
Wolski Władysław
Wołoszyn Michał
Stopień drugi otrzymało 7
Stopień trzeci „ . . . 2
Do poprawczego egzaminu przeznaczono 7

Klasa V.

Bickel Leizor
Busek Egon
Erdheim Pinkas
Friedberg Henryk
Januszke Felix
Jarecki Kazimierz
Kreisberg Izak
Langrock Bernard
Malewski Michał
Pawlin Jan
Schorr Ignacy
Schreier Leizor
Segal Arnold
Szymański Stanisław
Szczepański Władysław
Terlecki Michał
Zintel Rudolf
Stopień drugi otrzymał 1
Stopień trzeci otrzymało 6
Do poprawczego egzaminu przeznaczono 5

Klasa VI.

Cymbrykiewicz Józef
Feniak Michał
Kontes Dawid
Korolewicz Michał
Kotowicz Adam
Kozaniewicz Maryan
Lewiński Grzegorz
Lieberman Pinkas
Łukaszewicz Modest
Męciński Modest
Ornstein Abraham
Rappaport Majer
Stauffer Henryk
Stria Bolesław
Świątnicki Maxymilian
Wiesenberg Leizor
Stopień drugi otrzymało 2
Stopień trzeci „ 3
Do poprawczego egzaminu przeznaczono 5

Klasa VII

Arnold Chaim
Bernfeld Natan
Boelke Emil
Eisenstein Hercel
Erdheim Jakób
Friedberg Julian
Gułła Antoni
Jachno Jakób
Kleinberg Süsche
Kutschera Franciszek
Lachowicz Jan
Liss Mordche
Łopuszański Julian
Rappaport Juliusz
Switalski Roman
Tyszkowski Stanisław

Wolski Zygmunt
Stopień drugi otrzymało 4
Do poprawczego egzaminu przeznaczono 2

Klasa VIII.

Gottlieb Szaje
Hutowicz Dymitr
Kleinberg Abel
Kozak Karol
Krwawicz Michał
Lizak Władysław
Łobos Wiktor
Niemców Adolf
Popiel Michał
Rosenberg Dawid
Rosenwiesen Salomon
Rudawski Miron
Schwarz Jan
Stauffer Adolf
Waluch Jan
Stopień drugi otrzymał 1
Stopień trzeci „ 1
Do poprawczego egzaminu przeznaczono 1

Wynik egzaminu dojrzałości:

Zgłosiło się do egzaminu uczniów publicznych 14
Eksternista 1

Wszyscy zdawali egzamin po raz pierwszy z wyjątkiem jednego ucznia publicznego, który przystępował do egzaminu po raz wtóry.

Uznano za

a) dojrzałych . . . . 10 b) niedojrzałych z poprawką . . 2
c) niedojrzałych i reprobowano na rok 3, mianowicie dwóch uczniów publicznych i jednego eksternistę.

Świadectwo dojrzałości otrzymali:

Gottlieb Szaje
Hutowicz Dymitr
Kleinberg Abel
Kozak Karol
Lizak Władysław
Rosenwiesen Salomon
Rudawski Miron
Schwarz Jan
Stauffer Adolf
Waluch Jan

Do rodziców i opiekunów.

Wpisy uczniów do gimnazyum na r. szk. 1893/4 odbędą się d. 29. 30 i 31. sierpnia 1893. Późniejsze zgłoszenia do zapisu mogą być uwzględnione tylko w wyjątkowych wypadkach.

Uczniowie zgłaszać się mają osobiście w towarzystwie ojca, matki lub opiekuna, przyczem mają przedłożyć świadectwo szkolne z ostatniego półrocza i wypełnioną kartę wpisową.

Uczniowie nowo wstępujący mają przedłożyć:

a) metrykę chrztu lub urodzenia, bez której żaden uczeń do zakładu przyjęty nie będzie;

b) świadectwo szkolne tego zakładu, w którym dotychczas pobierali naukę, z potwierdzeniem Dyrekcyi, że można ich przyjąć do innego zakładu. Przy wpisie zapłacić mają taksę wstępną 2 złr. 10 ct.

Każdy uczeń bez wyjątku ma złożyć 1 złr. na zbiory naukowe.

Opłata szkolna, która na jedno półrocze wynosi 15 złr., ma być złożona najdalej do 15. października.

Uczniowie klasy I. mogą już w 1. półroczu uzyskać uwolnienie od opłaty szkolnej, jeżeli uczynią zadość przepisom wydanym przez Wys. Ministerstwo W. i O. d. 6 maja 1890 l. 8836. Prożbę o uwolnienie winni wnieść do 8 dni po rozpoczęciu roku szkolnego.

Ponieważ nie może być rzeczą obojętną ani dla zakładu ani dla rodziców, u kogo uczniowie mają mieszkać, przeto zechcą rodzice i opiekunowie co do mieszkania synów lub pupilów porozumieć się poprzednio z Dyrekcyą.

Podobnie zechcą rodzice i opiekunowie w własnym interesie porozumiewać się z Dyrekcyą co do wyboru domowych nauczycieli czyli korepetytorów.

Rodzice i opiekunowie zechcą przy wpisie oświadczyć Dyrekcyi, czy sobie życzą, aby ich synowie lub pupile pobierali naukę w przedmiotach nadobowiązkowych. Kto naukę tę rozpocznie, nie wolno mu przerywać bez zezwolenia Dyrekcyi.

Częste porozumiewanie się szkoły z rodzicami, opiekunami i nadzorem domowym jest rzeczą nader pożądaną. Co drugą niedzielę więc od godziny 10—11 znajdować się będą dyrektor i profesorowie w kancelaryi gimnazyalnej dla udzielania rodzicom opiekunom i nadzorom domowym wiadomości o postępie w naukach i prowadzeniu się uczniów.

Egzamina wstępne do klasy I. odbywają się w dwóch terminach, t. j. przed feryami 15. i 16., a w razie potrzeby także 17. lipca i po feryach d. 1. i 2., a w razie potrzeby także 3. września. Wybór jednego z tych terminów pozostawia się rodzicom. W każdym z tych terminów rozstrzyga się o przyjęciu lub nieprzyjęciu ucznia do klasy I. stanowczo, a powtórzenie egzaminu wstępnego ani w tym samym ani w innym zakładzie nie jest dozwolone.

Egzamina wstępne do klas II—VIII., tudzież egzamina poprawcze odbywać się będą w części piśmiennej d. 31. sierpnia, w ustnej zaś d 1 i 2. września.

Nabożeństwo wstępne odbędzie się d. 3. września, poczem d. 4. września rozpocznie się prawidłowa nauka szkolna.

Aleksander Borkowski,
dyrektor.

До родичів и опікунів.

Записи учеників до ґімназиї на р. шк. 1893 4 відбудуть ся в днях 29. 30. і 31. серпня 1893. Пізнійші зголошеня до запису можна буде увзглядити хиба виїмково.

Ученики мають зголошувати ся особисто з вітцем, матерію або опікуном, виказати ся сьвідоцтвом шкільним з остатнього півроку і віддати як слїд виповнену картку вписову.

Ті, що вперве вступають до сеї ґімназиї, мають виказати ся:

а) метрикою хрещеня чи то родин,

б) сьвідоцтвом тої школи, де доси побирали науку, з потвердженем Дирекциї, що можна їх приняти до вищої школи. При записї мають зложити 2 зр. 10 кр. вписового.

Кождий ученик без ріжницї має зложити 1 зр. на прибори наукові.

Оплата шкільна виносить піврічно 15 зр. і має бути зложена за 1. півріс найдальше до 15. жовтня.

Ученики 1. кляси можуть вже в 1. півроцї узискати увільнене від вплати шкільної, коли вдоволять вимогам розпорядженя Вис. Мініст. з д. 6. мая 1890. Ч. 8836. Прозьбу о увільнене треба подати до 8 днів по записах.

Так для школи як і для родичів не може бути рівнодушно, у кого ученик має мешкати; длятого зволять родичі і опікуни що до мешканя синів чи вихованків попеpід порадити ся зъ Дирекциею.

Такъ само схотять родичі і опікуни для власного добра завсїгди радити ся Дирекциї, коли ходить о вибір домового учителя.

Родичі і опікуни зволять при записї заявити Дирекциї, якої науки надобовязкової желають собі для своїх синів чи вихованків. Хто таку науку з волї родичів розпічне, тому не вільно перервати її без дозволу Дирекциї.

Частї зносини школи з родичами, опікунами і надзором домовим суть для обопільного добра дуже пожадані. На те-ж що другої недїлї від години 10- 11. збирають ся в канцеляриї ґімназияльний директор і професори, щоби родичів, опікунів і надзори домові повідомляти о успіхах в науцї і о поведеню учеників.

Іспити вступні до 1. кляси відбувають ся в двох речинцях: раз перед вакациями 15. і 16., а в разї потреби ще й 17. липня, другий раз по вакациях 1. і 2., а в разї потреби ще й 3. вересня. Вибір одного з тих речинців лишає ся родичам; однако в кождім з них рішає ся о принятю ученика до 1. кляси так, що повторене іспиту на сей рік не дозволене анї в тій самій анї в иншій школї.

Іспити вступні до кляс II—VIII., також іспити поправчі будуть відбувати ся в части письменній дня 31. серпня, а в части устній д. 1. і 2. вересня.

Служба Божа з візванем св. Духа відправить ся д. 3. вересня, а 4. вересня розпічне ся правильна наука шкільна.

Александер Борковский,
директор.