SPRAWOZDANIE

DYREKCYI

C. K. WYŻSZEGO GIMNAZYUM REALNEGO

IMIENIA FRANCISZKA JÓZEFA

w Drohobyczu

za rok szkolny

1892.

LWÓW 1892.

NAKŁADEM FUNDUSZU NAUKOWEGO.

Z drukarni Towarzystwa imienia Szewczenki
pod zarządem K. Bednarskiego.

O sześciokącie Pascala i sześcioboku Brianchona. (Ueber das Pascal'sche Sechseck und das Brianchon'sche Sechsseit.) Napisał Roman Moskwa.

Wiadomości szkolne, przez dyrektora.

O sześciokącie Pascala i sześcioboku Brianchona.

§. 1.

Niech x_1, x_2, x_3 oznaczają odległości punkta P od boków $O_2 O_3$, $O_3 O_1$, $O_1 O_2$ trójkąta $O_1 O_2 O_3$, a u_1, u_2, u_3 odległości promienia p od wierzchołków O_1, O_2, O_3 tego samego trójkąta; jeżeli ilości x i u spełniają zrównanie

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \qquad 1)$$

natenczas, jak wiadomo, punkt P leży na promieniu p. Jeżeli w zrównaniu 1) współrzędne x są ilościami stałymi a współrzędne u ilościami zmiennymi, natenczas zrównanie 1) jest zrównaniem punktu P, jako osłony wszystkich tych promieni, których współrzędne spełniają zrównanie 1); w tym razie lewą stronę tego zrównania będziemy oznaczać literą U. Jeżeli zaś współrzędne u są ilościami stałymi a współrzędne x zmiennymi, natenczas zrównanie 1) jest zrównaniem promienia p, jako miejsca geometrycznego wszystkich tych punktów, których współrzędne spełniają zrównanie 1): w tym razie lewą stronę zrównania 1) naznaczymy przez X.

Wszystkie punkta leżące na promieniu p. tworzą tak zwany podział punktów, promień p nazywa się osią podziału; wszystkie promienie przechodzące przez ten sam punkt P tworzą pęk promieni, punkt P nazywa się wierzchołkiem pęku.

Geometrya podziału i pęku spoczywa na prawie jednakowych podstawach; przytoczę niektóre twierdzenia, jakkolwiek powszechnie znane, ale stanowiące podstawę niniejszej rozprawki.

a) Jeżeli na osi p obierzemy dwa punkty P_1 i P_2 jako punkty główne, natenczas położenie każdego innego punktu P na osi jest dokładnie wyznaczone stosunkiem odcinków $\frac{P_1 P}{P_2 P}$ a jeżeli zrównania punktów P_1 i P_2 są $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, natenczas zrównanie punktu P jest $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 = 0$ albo $U_1 + \lambda U_2 = 0$, gdzie współczynnik λ jest proporcyonalny stosunkowi $\frac{P_1 P}{P_2 P}$

Jeżeli na osi p obierzemy cztery punkty A. B, C, D, natenczas stosunek $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ zwie się funkcyą anharmoniczną czterech punktów i oznacza się symbolem (ABCD). Ponieważ poprzednik i następnik tego stosunku są stosunkami odcinkowymi punktów C i D ze względu na punkty A i B, przeto jeżeli zrównania punktów A, B, C, D są $U_1 = 0$ $U_2 = 0$ $U_1 + \lambda U_2 = 0$ $U_1 + \mu U_2 = 0$, natenczas $(ABCD) = \frac{\lambda}{\mu}$.

Jeżeli zaś zrównania punktów A, B, C, D są dane w kształcie $U_1 + \lambda U_2 = 0$ $U_1 + \mu U_2 = 0$ $U_1 + \nu U_2 = 0$ $U_1 + \rho U_2 = 0$, natenczas chcąc obliczyć (ABCD), połóżmy $U_1 + \lambda U_2 \equiv A$ $U_1 + \mu U_2 \equiv B$ (gdzie znak $\equiv$ jest znakiem identyczności). Wyznaczywszy z tych zrównań U_1 i U_2 przez A i B otrzymamy jako zrównania punktów A, B, C, D.

$$A = 0 \quad B = 0 \quad A + \frac{\nu - \lambda}{\mu - \nu} B = 0, \quad A + \frac{\rho - \lambda}{\mu - \rho} B = 0$$

skąd $(ABCD) = \frac{\lambda - \nu}{\mu - \nu} : \frac{\lambda - \rho}{\mu - \rho}$

Podobnie ma się rzecz z pękiem. Jeżeli w pęku obierzemy dwa promienie p_1 i p_2 jako promienie główne, natenczas położenie każdego innego promienia p należącego do pęku jest dokładnie oznaczone stosunkiem $\frac{\sin (p_1\, p)}{\sin (p_2\, p)}$, a jeżeli zrównania promieni p_1 i p_2 są $X_1 = 0$ $X_2 = 0$, natenczas zrównanie promienia p da się przedstawić w kształcie $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = 0$ albo $X_1 + \lambda X_2 = 0$ gdzie λ jest proporcyonalne stosunkowi $\frac{\sin (p_1\, p)}{\sin (p_2\, p)}$

Jeżeli w pęku obierzemy cztery promienie a, b, c, d, to stosunek $\frac{\sin (a\, c)}{\sin (b\, c)} : \frac{\sin (a\, d)}{\sin (b\, d)}$ zwie się funkcyą anharmoniczną czterech promieni i naznacza się symbolem (a b c d).

Jeżeli zrównania tych promieni są $X_1 = 0$ $X_2 = 0$ $X_1 + \lambda X_2 = 0$ $X_1 + \mu X_2 = 0$ to $(a\ b\ c\ d) = \frac{\lambda}{\mu}$; jeżeli zaś zrównania tych promieni są $X_1 + \lambda X_2 = 0$, $X_1 + \mu X_2 = 0$, $X_1 + \nu X_2 = 0$, $X_1 + \rho X_2 = 0$, natenczas $(a\ b\ c\ d) = \frac{\lambda - \nu}{\mu - \nu} : \frac{\lambda - \rho}{\mu - \rho}$

b) Łącząc wszystkie punkty podziału na osi p z punktem P, leżącym zewnątrz osi, promieniami, otrzymamy pęk promieni z wierzchołkiem P. Jeżeli obierzemy którekolwiek cztery punkty A, B, C, D i przechodzące przez nie promienie a, b, c, d natenczas, jak wiadomo, (ABCD) = (abcd).

Z tego wynikają następujące wnioski:

Jeżeli poprowadzimy jakikolwiek inny promień p', który pęk a, b, c, d przecina w punktach A'. B', C', D' natenczas (ABCD) = (A' B' C' D') albowiem obie te ilości są równe (abcd). Dwa punkty G i G' podziałów p i p', leżące na tym samym promieniu g, nazywają się punktami odpowiednymi, podziały p i p' perspektywnymi a punkt P centrum perspektywności.

Jeżeli punkty podziału A, B C, D, połączymy z innym jeszcze punktem P' promieniami a' b' c' d' natenczas (abcd) = (a' b' c' d'). Dwa promienie g i g' pęków P i P', które przechodzą przez punkt G podziału p nazywają się promieniami odpowiednymi pęki P i P' pękami perspektywnymi, a oś p osią perspektywności.

Własności utworów perspektywnych są następujące

podziałów	pęków
1) Funkcya anharmoniczna którychkolwiek czterech punktów jednego podziału równą jest funkcyi anharmonicznej czterech odpowiednych punktów drugiego podziału.	Funkcya anharmoniczna którychkolwiek czterech promieni jednego pęku równa jest funkcyi anharmonicznej czterech odpowiednych promieni drugiego pęku.
2) Każdemu punktowi jednego podziału odpowiada tylko jeden punkt drugiego podziału i na odwrót.	Każdemu promieniowi jednego pęku odpowiada tylko jeden promień drugiego pęku i na odwrót.
3) Promienie łączące punkta odpowiedne przechodzą wszystkie przez jeden i ten sam punkt.	Punkty, w których się przecinają odpowiedne promienie leżą na jednej i tej samej prostej.
4) Wspólny punkt obu podziałów odpowiada sobie samemu.	Wspólny promień obu pęków odpowiada sobie samemu.

Własności te nie są jedne od drugich niezawisłe. Tak n. p. z własności 1) wynika, jak niebawem udowodnimy, własność 2) i na odwrót, a z własności 3) wynika własność 4). Oprócz tego pierwsze dwie własności posiadają, jak to zaraz zobaczymy, nietylko utwory perspektywne. Własność 1) lub 2) jest wprawdzie koniecznym warunkiem perspektywności, ale nie wystarczającym; musi się do niej dołączyć 3) lub 4) aby można wnosić na perspektywność.

c) Jeżeli z dwóch perspektywnych utworów, czy to podziałów czy pęków jeden lub obydwa zmienią swe położenie tak, że żadne dwa odpowiedne elementa nie padną na siebie, natenczas własności 3) i 4) przestaną istnieć, ale własności 1) i 2) pozostaną nienaruszone. Dwa takie utwory nazywają się projektywne i są dokładnie wyznaczone przez trzy pary odpowiednych elementów.

Niech będą bowiem a_1, a_2, a_3 trzy elementy jednego utworu, podziału lub pęku, λ_1, λ_2, λ_3 ich stosunki odcinkowe, względnie stosunki wstaw ze względu na dwa elementy n. p. e i f, i a'_1, a'_2, a'_3 trzy odpowiedne im elementy drugiego utworu, λ'_1, λ'_2, λ'_3 ich stosunki odcinkowe, względnie stosunki wstaw ze względu na elementy p', q', które w ogóle nie odpowiadają elementom e i f. Zapomocą tych sześciu ilości λ_1 . . λ'_1 . . możemy do każdego elementu x, którego położenie w utworze dane jest przez λ, wyszukać odpowiedne x' przez wynalezienie λ' i na odwrót. Musi być bowiem

$(x\, a_1\, a_2\, a_3) = (x'\, a'_1\, a'_2\, a'_3)$ a więc według poprzedniego

$$\frac{\lambda-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} : \frac{\lambda-\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_3} = \frac{\lambda'-\lambda'_2}{\lambda'_1-\lambda'_2} : \frac{\lambda'-\lambda'_3}{\lambda'_1-\lambda'_3}$$

Z tego zrównania możemy dla każdego λ danego wyszukać odpowiedne λ', to znaczy: możemy utwory uzupełnić. Wykonawszy naznaczone działania i naznaczywszy współczynniki ilości λ i λ' przez a, b, c, d, otrzymamy $a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0$ 2)

Ze zrównania tego wynika

$$\lambda' = \frac{b\lambda + d}{a\lambda + c} \quad \text{lub} \quad \lambda = \frac{c\lambda' + d}{a\lambda' + b}$$

z czego widzimy, że pewnemu elementowi jednego utworu odpowiada zawsze jeden ale tylko jeden element drugiego utworu, że więc z własności 1) wypływa własność 2). Gdybyśmy zaś w wyraz $\frac{\lambda'-\lambda'_2}{\lambda'_1-\lambda'_2} : \frac{\lambda'-\lambda'_3}{\lambda'_1-\lambda'_3}$ wstawili zamiast λ', λ'_1, λ'_2, λ'_3 ich wartości $\frac{b\lambda+d}{a\lambda+c}$, $\frac{b\lambda_1+d}{a\lambda_1+c}$, $\frac{b\lambda_2+d}{a\lambda_2+c}$, $\frac{b\lambda_3+d}{a\lambda_3+c}$, natenczas otrzymalibyśmy $\frac{\lambda-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} : \frac{\lambda-\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_3}$, co oznacza:

Jeżeli dwa utwory stoją ze sobą w związku wyrażonym przez 2) t. j. że pewnemu elementowi jednego utworu odpowiada zawsze jeden ale tylko jeden drugiego utworu, natenczas funkcya anharmoniczna którychkolwiek czterech elementów jednego utworu równa się funkcyi anharmonicznej odpowiednych czterech elementów drugiego utworu.

d) Często trafia się, że dwa projektywne podziały leżą na tej samej osi p, albo że dwa projektywne pęki mają ten sam wierzchołek P. W takim razie każdy punkt osi p a względnie każdy promień pęku P można uważać jako należący do jednego lub drugiego utworu. W tym wypadku można się zapytać, czy istnieją takie elementa, które ze swoimi odpowiednymi się zlewają. Aby na to pytanie odpowiedzieć, odnieśmy stosunki odcinkowe punktów obydwóch podziałów do tych samych dwóch punktów wspólnej osi p. Jeżeli teraz punkt jednego podziału ma zlać się z odpowiednym punktem drugiego podziału, natenczas dla tych punktów musi być $\lambda = \lambda'$ a zrównanie 2) zamienia się na $a\lambda^2 + (b + c)\,\lambda + d = 0$, z którego wyszukamy λ dla tych elementów, które się ze swymi odpowiednymi zlewają. Ponieważ zrównanie to ze względu na λ jest zrównaniem drugiego stopnia, przeto otrzymamy dwie wartości dla λ, to znaczy:

Dwa podziały projektywne na jednej osi mają zawsze dwie pary punktów odpowiednych zlewających się ze sobą. Te punkta nazywają się punktami podwójnymi.

Tak samo otrzymujemy: Dwa pęki z tym samym wierzchołkiem mają zawsze dwie pary promieni odpowiednych zlewających się ze sobą. Promienie te zowią się promieniami podwójnymi.

Naturalnie elementy podwójne są albo obydwa rzeczywiste, albo zlewają się ze sobą, albo obydwa są urojone według tego czy

$$(b + c)^2 - {}^4) \, ad \gtreqless 0.$$

e) Widzieliśmy, że promienie odpowiedne dwóch pęków perspektywnych przecinają się na linii prostej, a promienie łączące odpowiedne punkty dwóch podziałów perspektywnych przechodzą przez jeden punkt, innymi słowy: utworem powstałym przez przecięcie się pęków perspektywnych jest linia pierwszego stopnia a utworem podziałów perspektywnych linia pierwszej klasy.

Możemy się więc zapytać jakie jest miejsce geometryczne punktów przecięcia odpowiednych promieni dwóch projektywnych pęków, jakoteż jaka jest osłona linii łączących punkty odpowiedne dwóch projektywnych podziałów.

Niech więc będą dwa projektywne pęki P i P'.

Punkty przecięcia się odpowiednych promieni leżą na krzywej, której stopień oznaczyć chcemy. Musimy w tym celu oznaczyć, w ilu punktach przecina ją jakikolwiek promień g. Promień ten przecina promienie a, b, c, d... pęku P w punktach A, B, C, D... odpowiedne zaś promienie a', b', c', d'... pęku P' w punktach A', B'. C', D'... Otrzymamy więc na g dwa podziały A, B, C... i A', B', C'. Podziały te są projektywne, albowiem (ABCD) = (abcd) = (a' b' c' d') = (A' B' C' D'). Aby zaś jakiś punkt promienia g był punktem krzywej, muszą się w nim przecinać dwa odpowiedne promienie x i x'. W tym razie jednak punkty odpowiedne x i x' podziałów na g muszą paść na siebie i utworzyć punkt podwójny. Każdy więc punkt przecięcia się promienia g z krzywą jest punktem podwójnym podziałów na g i odwrotnie. Ponieważ zaś dwa podziały projektywne mają zawsze dwa ale tylko dwa punkty podwójne, przeto jakikolwiek promień g przecina krzywę w dwóch punktach. Krzywa ta jest więc krzywą drugiego stopnia. Przechodzi ona także przez punkt P i P'. Jeżeli bowiem wspólny promień (PP') będziemy uważać jako promień s należący do P, to odpowiedny mu promień s' pęku P' przecina go w punkcie P' zatem P' jest punktem krzywej. Jeżeli zaś promień wspólny (PP') będziemy uważać jako promień s' pęku P', to odpowiedny mu promień s pęku P przecina go w punkcie P, zatem P jest także punktem krzywej.

Niech będą teraz dwa projektywne podziały p i p'. Promienie łączące odpowiedne punkty tych podziałów osłaniają krzywą, której klasę oznaczyć chcemy. Musimy więc oznaczyć, ile stycznych do niej poprowadzić można z jakiegokolwiek punktu G. Połączmy punkt G z punktami A, B, C... podziału p promieniami a, b, c... a z odpowiednymi im punktami A', B', C'... podziału p', promieniami a', b', c'... Otrzymamy tym sposobem w G dwa pęki projektywne a, b, c... i a' b' c'... ponieważ (abcd) = (ABCD) = (A' B' C' D') = (a' b' c' d'). Aby jakiś promień wychodzący z G był styczną krzywej, musi łączyć dwa odpowiedne punkty X i X'. W tym razie jednak promienie odpowiedne x i x' pęków w G muszą paść na siebie i utworzyć promień podwójny. Każdy więc promień wyprowadzony z G, który jest styczną do krzywej, jest promieniem podwójnym pęków G i odwrotnie. Ponieważ zaś dwa takie pęki mają zawsze dwa ale tylko dwa promienie podwójne, przeto z jakiegokolwiek punktu G można poprowadzić zawsze dwie styczne do krzywej, z czego wynika, iż krzywa jest krzywą drugiej klasy. Dotyka ona także osi p i p'. Jeżeli bowiem wspólny punkt (p p') będziemy uważać jako punkt S należący do p, natenczas odpowiedny mu punkt S' podziału p' połączony jest z nim promieniem p', zatem p' jest styczną krzywej. Jeżeli zaś wspólny punkt będziemy uważać jako punkt T' należący do p', natenczas odpowiedny mu punkt T podziału p połączony jest z nim promieniem p, który dlatego także jest styczną krzywej. Rezultaty otrzymane są następujące:

Punkty przecięć odpowiednych promieni dwóch projektywnych pęków leżą na krzywej stopnia drugiego, linie, łączące odpowiedne punkty dwóch projektywnych podziałów, osłaniają krzywę drugiej klasy.

Że każda krzywa drugiego stopnia jest krzywą drugiej klasy i odwrotnie, jest powszechnie znanem.

f) Promienie $p_1, p_2 \ldots p_n$, których zrównania są $X_1 = 0$ $X_2 = 0 \ldots X_n = 0$ przechodzą wszystkie przez ten sam punkt, jeżeli istnieje $n-2$ identycznych zrównań

$$K_1^{(1)} X_1 + K_2^{(1)} X_2 + \ldots + K_n^{(1)} X_n = 0$$
$$K_1^{(2)} X_1 + K_2^{(2)} X_2 + \ldots + K_n^{(2)} X_n = 0$$
$$\vdots$$
$$K_1^{(n-2)} X_1 + K_2^{(n-2)} X^2 + \ldots K_n^{(n-2)} X_n = 0$$

Ze zrównań tych bowiem możemy $n-2$ funkcyj n. p. X_1, $X_2 \ldots X_{n-2}$ wyznaczyć każdą w kształcie $\lambda X_{n-1} + \mu X_n$ n. p. $X_1 = \lambda_1 X_{n-1} + \mu_1 X_n$, z czego według a) wynika, iż promień p_1 przechodzi przez punkt przecięcia promieni p_n i p_{n-1}.

Podobne twierdzenie istnieje dla n punktów, leżących na tym samym promieniu.

g) Jeżeli $X_1 = 0$ $X_2 = 0$ $X_3 = 0$ są zrównania trzech promieni p_1, p_2, p_3, nie przecinających się w tym samym punkcie, natenczas zrównanie $X = 0$ każdego innego promienia p da się przedstawić w kształcie

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0$$

Jeżeli bowiem

$$X_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \qquad X_2 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3$$
$$X_3 = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 \qquad X = a_1 x_4 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

natenczas

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = (\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \beta_1 + \lambda_3 \gamma_1) x_1 + (\lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \beta_2 + \lambda_3 \gamma_2) x_2 + (\lambda_1 \alpha_3 + \lambda_2 \beta_3 + \lambda_3 \gamma_3) x_3$$

Oznaczywszy więc ze zrównań

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \beta_1 + \lambda_3 \gamma_1 = a_1, \quad \lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \beta_2 + \lambda_3 \gamma_2 = a_2,$$
$$\lambda_1 \alpha_3 + \lambda_2 \beta_3 + \lambda_3 \gamma_3 = a_3$$

współczynniki $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ otrzymamy

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = X$$

z czego wynika, że zrównanie $X = 0$ promienia p można przedstawić w kształcie $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0$

W ten sam sposób udowodni się: Jeżeli $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ $U_3 = 0$ są zrównania trzech punktów P_1, P_2, P_3 nie leżących na tym samym promieniu, natenczas zrównanie $U = 0$ każdego innego punktu P da się przedstawić w kształcie

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0.$$

§. 2.

Niech $X_1, X_2, \ldots X_7$ przedstawiają jednorodne, linearne, od siebie niezawisłe funkcye współrzędnych x_1, x_2, x_3.

Jeżeli w systemie

$$\left\| \begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 \end{matrix} \right\| \qquad 1$$

z którychkolwiek trzech kolumn utworzymy wyznacznik i położymy równy zero, otrzymamy zrównanie promienia, a ponieważ z 7 elementów można utworzyć 35 trójek, przeto otrzymamy 35 promieni. Naznaczny promień otrzymamy przez skombinowanie kolumn p, q, r symbolicznie przez [p q r] Każde cztery promienie takie jak [p q r], [q r s], [r s p], [s p q] przechodzą przez ten sam punkt, albowiem

$$\alpha_p [qrs] - \alpha_q [prs] + \alpha_r [pqs] - \alpha_s [pqr] = \begin{vmatrix} \alpha_p & \alpha_q & \alpha_r & \alpha_s \\ X_p & X_q & X_r & X_s \\ \alpha_p & \alpha_q & \alpha_r & \alpha_s \\ \beta_p & \beta_q & \beta_r & \beta_s \end{vmatrix} = 0$$

$$\beta_p [qrs] - \beta_q [prs] + \beta_r [pqs] - \beta_s [pqr] = 0$$

co według §. 1. f) dowodzi, że te cztery promienie przechodzą przez ten sam punkt. Punkt ten możemy oznaczyć symbolicznie przez (pqrs).

Na każdym z 35 promieni leżą cztery takie punkty n. p. na linii [123] leżą punkty

(1234)	w którym się przecinają promienie	[123], [234], [341], [412]
(1235)	„ „ „	[123], [235], [351], [512]
(1236)	„ „ „	[123], [236], [361], [612]
(1237)	„ „ „	[123], [237], [371], [712]

Takich punktów, licząc na każdym promieniu po cztery, mamy 35 . 4 = 140, ale ponieważ przez każdy z nich przechodzą cztery promienie, przeto każdy z nich cztery razy został policzony; wszystkich więc różnych punktów jest 140 : 4 = 35. Mamy więc 35 promieni i 35 punktów, na każdym promieniu leżą cztery punkty i przez każdy punkt przechodzą cztery promienie. Do podobnej figury doszlibyśmy, wyszedłszy od współrzędnych u_1, u_2, u_3. Jeżeli bowiem U_1, U_2 . . U_7 oznaczają jednorodne, linearne, od siebie niezawisłe funkcye współrzędnych u_1, u_2, u_3 natenczas otrzymamy, łącząc w systemie

$$\left\| \begin{matrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 \end{matrix} \right\| \qquad \text{II}$$

co trzy kolumny w wyznacznik, i położywszy ten wyznacznik równy zero, zrównania 35 punktów, które leżą po cztery na 35 promieniach tak, iż przez każdy z nich przechodzą cztery z owych 35 promieni.

§. 3.

Jak widzimy figura systemu I. i figura systemu II. posiadają te same własności. Nasuwa się więc samo przez się pytanie, pod jakimi warunkami obie figury zupełnie się nakryją.

Niech więc będzie dany system I. Udowodniliśmy, że jeżeli między funkcyami X_1 X_2 . . X_n istnieje n—2 zrównań kształtu
$$k_1 X_1 + k_2 X_2 + \ldots k_n X_n = 0, \qquad 1)$$
natenczas promienie, których zrównania są $X_1 = 0$ $X_2 = 0$ . . $X_n = 0$ przechodzą wszystkie przez ten sam punkt. Ponieważ w systemie I funkcye X są od siebie niezawisłe, to znaczy, że nie ma między nimi trzech takich, któreby spełniały zrównanie kształtu $\lambda_p X_p + \lambda_r X_r + \lambda_s X_s = 0$, więc istnieją tylko n—3, a więc w naszym przypadku gdzie n = 7 tylko 4 zrównania kształtu 1). Lecz i ta liczba się zmniejszy, jeżeli współczynniki funkcyj X będą musiały spełniać oprócz tego jeszcze inne warunki. Możemy mianowicie udowodnić, że istnieją tylko dwa zrównania kształtu 1), które niech będą
$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots a_7 X_7 = 0 \qquad 2)$$
$$b_1 X_1 + b_2 X_2 + \ldots b_7 X_7 = 0 \qquad 3)$$
jeżeli współczynniki a i b mają wypełniać jeszcze zrównania
$$a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \ldots + a_7 \alpha_7 = 0 \qquad 4)$$
$$a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 + \ldots + a_7 \beta_7 = 0 \qquad 5)$$
$$b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + \ldots + b_7 \alpha_7 = 0 \qquad 6)$$
$$b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 + \ldots + b_7 \beta_7 = 0 \qquad 7)$$
Ze zrównań bowiem 4) i 5) możemy n. p. a_6 i a_7 wyznaczyć przez pięć innych mianowicie będzie
$$a_6 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 + \lambda_5 a_5$$
$$a_7 = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 + \mu_4 a_4 + \mu_5 a_5$$

gdzie $\lambda_r = - \dfrac{\begin{vmatrix} \alpha_r & \alpha_7 \\ \beta_r & \beta_7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_6 & \alpha_7 \\ \beta_6 & \beta_7 \end{vmatrix}}$ $\mu_r = \dfrac{\begin{vmatrix} \alpha_r & \alpha_6 \\ \beta_r & \beta_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_6 & \alpha_7 \\ \beta_6 & \beta_7 \end{vmatrix}}$

Wstawiając za a_6 i a_7 otrzymane wartości w zrównanie 2), otrzymamy $a_1 (X_1 + \lambda_1 X_6 + \mu_1 X_7) + a_2 (X_2 + \lambda_2 X_6 + \mu_2 X_7) + \ldots + a_5 (X_5 + \lambda_5 X_6 + \mu_5 X_7) = 0$ 8)

Postępując tak samo ze zrównaniami 6) 7) i 3) otrzymamy $b_1 (X_1 + \lambda_1 X_6 + \mu_1 X_7) + b_2 (X_2 + \lambda_2 X_6 + \mu_2 X_7) + \ldots + b_5 (X_5 + \lambda_5 X_6 + \mu_5 X_7) = 0$ 9)

Przypuśćmy teraz, że istniałoby jeszcze trzecie zrównanie kształtu 1) $c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_7 X_7 \equiv 0$,
którego współczynniki wypełniają zrównania

$c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \ldots + c_7 \alpha_7 = 0$
$c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2 + \ldots + c_7 \beta_7 = 0$

natenczas otrzymalibyśmy jeszcze zrównanie
$c_1 (X_1 + \lambda_1 X_6 + \mu_1 X_7) + \ldots + c_5 (X_5 + \lambda_5 X_6 + \mu_5 X_7) \equiv 0$ 10)

Ale w takim razie ze zrównań 8, 9, 10 według §. 1 f) wynika, że promienie których zrównania są

$X_1 + \lambda_1 X_6 + \mu_1 X_7 = 0$
$X_2 + \lambda_2 X_6 + \mu_2 X_7 = 0$
.
.
$X_5 + \lambda_5 X_6 + \mu_5 X_7 = 0$

przecinają się wszystkie w jednym punkcie, co być nie może, gdyż to są promienie [167], [267], [367], [467], [567], albowiem n. p.

$$X_1 + \lambda_1 X_6 + \mu_1 X_7 = X_1 - \frac{(\alpha_1 \beta_7 - \alpha_7 \beta_1)}{(\alpha_6 \beta_7 - \alpha_6 \beta_7)} X_6 + \frac{(\alpha_1 \beta_6 - \alpha_6 \beta_1)}{(\alpha_6 \beta_7 - \alpha_8 \beta_6)} X_7,$$

w którym kształcie da się przedstawić lewa strona zrównania promienia [167]. Istnieją więc tylko dwa zrównania 2) i 3).

Dobierzmy teraz współczynniki funkcyj U tak, ażeby były spełnione zrównania

$$U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 + U_4 X_4 + U_5 X_5 + U_6 X_6 + U_7 X_7 \equiv \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 \qquad 11)$$
$$\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3 + \alpha_4 U_4 + \alpha_5 U_5 + \alpha_6 U_6 + \alpha_7 U_7 \equiv 0 \qquad 12)$$
$$\beta_1 U_1 + \beta_2 U_2 + \beta_3 U_3 + \beta_4 U_4 + \beta_5 U_5 + \beta_6 U_6 + \beta_7 U_7 \equiv 0 \qquad 13)$$

Zachodzi jednak pytanie, czy współczynniki te, których jest 21 dadzą się tak dobrać, ażeby trzy ostatnie zrównania były spełnione. Otóż pierwsze z tych zrównań rozpada się na 9 innych. Można go bowiem napisać w kształcie

$$A_{11} u_1 x_1 + A_{12} u_1 x_2 + A_{13} u_1 x_3 + A_{21} u_2 x_1 + A_{22} u_2 x_2 + A_{23} u_2 x_3 + A_{31} u_3 x_1 + A_{32} u_3 x_2 + A_{33} u_3 x_3 \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3,$$

gdzie liczby A są jednorodnymi, linearnymi funkcyami oznaczyć się mających współczynników funkcyj U. Ażeby zaś to zrównanie istnieć mogło, musi być

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = 1$$
$$A_{12} = A_{13} = A_{21} = A_{31} = A_{32} = 0$$

co daje 9 zrównań.

Każde zaś ze zrównań 12) i 13) rozpada się na trzy zrównania. Mamy więc 15 zrównań na oznaczenie 21 niewiadomych. Można więc zrównaniom tym zadość uczynić w najrozmaitszy sposób.

§. 4.

Łatwo teraz można udowodnić że systemy I. i II. §. 2 dają figury identyczne, jeżeli spełnione będą zrównania 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13 poprzedzającego paragrafu. Szukajmy bowiem zrównania punktu n. p. (12 34). W nim przecinają się promienie [123], [234], [341], [412] których zrównania są:

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} X_2 & X_3 & X_4 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} X_3 & X_4 & X_1 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_4 & \beta_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} X_4 & X_1 & X_2 \\ \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_4 & \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad 1)$$

Z którychkolwiek dwóch tych zrównań moglibyśmy obliczyć współrzędne x_1, x_2, x_3 punktu (1 2 3 4), albo raczej ich stosunek. Wstawiwszy te wartości w funkcye X_1, X_2, X_3, X_4 otrzymalibyśmy dla tych funkcyi pewne wartości, które zrównania 1) musiałyby spełniać. Z kształtów jednak tych zrównań możemy naprzód odgadnąć kształt, w jakim wartości te musiałyby się dać przedstawić. Te kształty są

$$X_1 = \mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \beta_1, \; X_2 = \mu_1 \alpha_2 + \mu_2 \beta_2, \; X_3 = \mu_1 \alpha_3 + \mu_2 \beta_3,$$
$$X_4 = \mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \beta_4. \qquad 2)$$

Wstawiwszy bowiem te wartości w którekolwiek ze zrównań 1) n. p. w pierwsze, otrzymamy

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \beta_1 & \mu_1 \alpha_2 + \mu_1 \beta_2 & \mu_1 \alpha_3 + \mu_2 \beta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \mu_1 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} + \mu_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

co rzeczywiście równa się zeru, gdyż oba wyznaczniki mają dwa wiersze identyczne.

Z tych wartości funkcyj X_1, X_2, X_3, X_4 możemy z pomocą zrównań 2, 3, 4, 5, 6, 7, poprzedzającego paragrafu obliczyć wartości funkcyj X_5, X_6, X_7, które one przybierają, jeżeli w nie wstawimy współrzędne punkta (1 2 3 4). Wstawiając bowiem wartości 2) w zrównania 2) i 3) poprzedzającego paragrafu, otrzymamy:

$$\mu_1 (a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 + a_4 \alpha_4) + \mu_2 (a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 +$$
$$+ a_3 \beta_3 + a_4 \beta_4) + a_5 X_5 + a_6 X_6 + a_7 X_7 = 0$$
$$\mu_1 (b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + b_3 \alpha_3 + b_4 \alpha_4) + \mu_2 (b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 +$$
$$+ b_3 \beta_3 + b_4 \beta_4) + b_5 X_5 + 6_6 X_6 + b_7 X_7 = 0,$$

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = 1$$
$$A_{12} = A_{13} = A_{21} = A_{31} = A_{32} = 0$$
co daje 9 zrównań.

Każde zaś ze zrównań 12) i 13) rozpada się na trzy zrównania. Mamy więc 15 zrównań na oznaczenie 21 niewiadomych. Można więc zrównaniom tym zadość uczynić w najrozmaitszy sposób.

§. 4.

Łatwo teraz można udowodnić że systemy I. i II. §. 2 dają figury identyczne, jeżeli spełnione będą zrównania 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13 poprzedzającego paragrafu. Szukajmy bowiem zrównania punktu n. p. (12 34). W nim przecinają się promienie [123], [234], [341], [412] których zrównania są:

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} X_2 & X_3 & X_4 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} X_3 & X_4 & X_1 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_4 & \beta_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} X_4 & X_1 & X_2 \\ \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_4 & \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad 1)$$

Z którychkolwiek dwóch tych zrównań moglibyśmy obliczyć współrzędne x_1, x_2, x_3 punktu (1 2 3 4), albo raczej ich stosunek. Wstawiwszy te wartości w funkcye X_1, X_2, X_3, X_4 otrzymalibyśmy dla tych funkcyi pewne wartości, które zrównania 1) musiałyby spełniać. Z kształtów jednak tych zrównań możemy naprzód odgadnąć kształt, w jakim wartości te musiałyby się dać przedstawić. Te kształty są

$$X_1 = \mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \beta_1, \; X_2 = \mu_1 \alpha_2 + \mu_2 \beta_2, \; X_3 = \mu_1 \alpha_3 + \mu_2 \beta_3,$$
$$X_4 = \mu_1 \alpha_4 + \mu_2 \beta_4. \qquad 2)$$

Wstawiwszy bowiem te wartości w którekolwiek ze zrównań 1) n. p. w pierwsze, otrzymamy

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \beta_1 & \mu_1 \alpha_2 + \mu_2 \beta_2 & \mu_1 \alpha_3 + \mu_2 \beta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} =$$
$$= \mu_1 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} + \mu_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

co rzeczywiście równa się zeru, gdyż oba wyznaczniki mają dwa wiersze identyczne.

Z tych wartości funkcyj X_1, X_2, X_3, X_4 możemy z pomocą zrównań 2, 3, 4, 5, 6, 7, poprzedzającego paragrafu obliczyć wartości funkcyj X_5, X_6, X_7, które one przybierają, jeżeli w nie wstawimy współrzędne punkta (1 2 3 4). Wstawiając bowiem wartości 2) w zrównania 2) i 3) poprzedzającego paragrafu, otrzymamy:

$$\mu_1 (a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 + a_4 \alpha_4) + \mu_2 (a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 +$$
$$+ a_3 \beta_3 + a_4 \beta_4) + a_5 X_5 + a_6 X_6 + a_7 X_7 = 0$$
$$\mu_1 (b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + b_3 \alpha_3 + b_4 \alpha_4) + \mu_2 (b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 +$$
$$+ b_3 \beta_3 + b_4 \beta_4) + b_5 X_5 + 6_6 X_6 + b_7 X_7 = 0,$$

Według §. 1. f) dochodzimy do tego zrównania, wychodząc od trzech promieni tworzących trójkąt, których zrównania są $X_p = 0$ $X_q = 0$ $X_r = 0$.

Zrównania owych 35 promieni otrzymaliśmy więc wychodząc od siedmiu promieni $X_1 = 0 \, . \, . \, X_7 = 0$; z promieni tych utworzyliśmy 35 trójkątów, a każdy z tych trójkątów wyznaczył nam jeden z 35 promieni.

Jeżeli teraz przyjmiemy owych 35 promieni jako naprzód dane, natenczas oczywistą jest rzeczą, iż 35 trójkątów, utworzonych z siedmiu innych promieni, wyświadczy nam tę samą usługę, co trójkąty utworzone z siedmiu promieni $X_1 = 0 \, . \, . \, X_7 = 0$, to znaczy, że zrównania 35 promieni, które przyjmujemy jako dane, dadzą się wyrazić przez lewe strony zrównań nowych siedmiu promieni. Otóż łatwo się przekonać możemy, iż te same promienie, które nam dał system I. §. 2, otrzymamy, jeżeli z siedmiu prostych, których lewe strony zrównań mają kształt

$$\begin{array}{lll} & X_k + \alpha_k \varphi_1 (x_1 \; x_2 \; x_3) + \beta_k \varphi_2 (x_1 \; x_2 \; x_3) & \\ \text{i że współczynników} & \alpha_k + \lambda \beta_k & 1) \\ \text{i} & \beta_k & \end{array}$$

utworzymy system na sposób systemu I. §. 2. Indeks k oznacza tu jednę z liczb 1, 2 . . 7, $\varphi_1 (x_1 \; x_2 \; x_3)$, $\varphi_2 (x_1 \; x_2 \; x_3)$ są dowolne jednorodne linearne funkcye współrzędnych x_1, x_2, x_3, funkcya X_k jakoteż liczby α_k i β_k są liczbami systemu I. §. 2, λ zaś jest dowolnym współczynnikiem.

Ułożywszy bowiem te ilości na wzór systemu I. §. 2 i kombinując co trzy kolumny w wyznacznik, otrzymamy pomiędzy 35 możliwymi wyznacznikami, wyznacznik n. p.

$$\begin{vmatrix} X_1 + \alpha_1 \varphi_1 + \beta_1 \varphi_2 & X_2 + \alpha_2 \varphi_1 + \beta_2 \varphi_2 & X_3 + \alpha_3 \varphi_1 + \beta_3 \varphi_2 \\ \alpha_1 + \lambda \beta_1 & \alpha_2 + \lambda \beta_2 & \alpha_3 + \lambda \beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \quad 2)$$

który jak łatwo się przekonać można równa się wyznacznikowi

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Jeżeli więc wyznacznik 2 położymy równy zero, natenczas otrzymamy zrównanie promienia [123]. Z systemu 1 tego paragrafu otrzymujemy więc zrównania tych samych 35 promieni, co z systemu 1 §. 2.

Z podobnych przyczyn otrzymamy zrównania tych samych 35 punktów, które daje system II §. 2, jeżeli w owym systemie w miejsce U_k napiszemy

$$\begin{array}{lll} U_k & U_k + a_k \Psi_1 (u_1 \; u_2 \; u_3) + b_k \Psi_2 (u_1 \; u_2 \; u_3) & \\ a_k & a_k + \nu b_k & 3) \end{array}$$

gdzie Ψ_1, Ψ_2 są jednorodne, linearne funkcye współrzędnych u_1, u_2, u_3, ν dowolny współczynnik, a ilości U, a, b ilościami systemu II §. 2.

Naturalną jest rzeczą, że jeżeli figury wynikające z systemów 1 i 2 §. 2 są identyczne, co wtenczas będzie, jeżeli ilości

$X, U, \alpha, \beta, a, b$ spełniają zrównania 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13 paragrafu 3, natenczas i figury wynikające z systemu 1 i 3 tego paragrafu muszą być identyczne. I rzeczywiście tak jest; albowiem jeżeli ilości $X, U, \alpha, \beta, a, b$ spełniają owe zrównania, natenczas spełniają je i ilości $X + \alpha\,\varphi_1 + \beta\,\varphi_2$ $U + a\,\psi_1 + b\,\psi_2$ $\alpha + \lambda\,\beta$, $a + \nu\,b$, $\beta\,b$, o czem łatwo przekonać się można. W nowych systemach 1 i 3 mamy jednak 6 dowolnych ilości $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, \lambda, \nu$, za pomocą których możemy systemy te nieco uprościć. Jeżeli bowiem te ilości obierzemy tak, żeby było

$$X_7 + \alpha_7\,\varphi_1 + \beta_7\,\varphi_2 = 0$$
$$U_7 + a_7\,\psi_1 + b_7\,\psi_2 = 0$$
$$\alpha_7 + \lambda\,\beta_7 = 0$$
$$a_7 + \nu\,\beta_7 = 0$$

i jeżeli dla krótkości położymy

$$X_k + \alpha_k\,\varphi_1 + \beta_k\,\varphi_2 = y_k$$
$$U_k + a_k\,\psi_1 + b_k\,\psi_2 = \gamma_k$$
$$\alpha_k + \lambda\,\beta_k = \delta_k$$
$$a_k + \nu\,b_k = d_k$$

natenczas systemy 1 i 3 przedstawią się w kształcie

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & 0 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \delta_6 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 \end{vmatrix} \qquad 4)$$

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 & \gamma_6 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_5 & b_5 & b_6 & b_7 \end{vmatrix} \qquad 5)$$

System 4) da nam te same promienie co system I §. 2 system 5) te same punkta co system II §. 2.

Łącząc jednak co trzy kolumny w systemie 4 otrzymamy naprzód $\frac{6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3} = 20$ promieni, które nam da system

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \delta_6 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \end{vmatrix} \qquad 6)$$

i $\frac{6\,.\,5}{1\,.\,2} = 15$ promieni przez skombinowanie co dwóch pierwszych z sześciu kolumn systemu 4 z siódmą.

Te same jednak promienie otrzymamy przez skombinowanie co dwóch kolumn systemu

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \delta_6 \end{vmatrix} \qquad 7)$$

gdyż n. p. zrównanie

$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ \delta_1 & \delta_2 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_7 \end{vmatrix} = 0$, albo po rozwinięciu wyznacznika zrównanie

$\beta_7 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{vmatrix} = 0$ przedstawia ten sam promień, co zrównanie $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{vmatrix} = 0$, które otrzymujemy z pierwszych dwóch kolumn systemu 7. Promienie systemu 6) przecinają się po cztery w jednym punkcie tak n. p. promienie [123], [234], [341], [412] w punkcie (1234).

Na każdym z nich leżą trzy takie punkty n p. na [123] punkty (1234), (1235), (1236). Punktów tych jest więc $\frac{20 \cdot 3}{4} = 15$.

Promienie te nazywają się promieniami Calaya, a punkty punktami Salmona.

Promienie systemu 7 przecinają się co trzy w jednym punkcie n. p. promienie [12], [23], [31] w punkcie (123) albowiem $\delta_3 [12] + \delta_1 [23] + \delta_2 [31] = 0$.

Na każdym z tych promieni leżą cztery takie punkty n. p. na prostej [12] punkty (123), (124), (125) (126).

Punktów tych jest więc $\frac{15 \cdot 4}{3} = 20$

Promienie systemu 7 nazywają się promieniami Plückera, a 20 owych punktów punktami Steinera.

Każda linia Calaya przechodzi przez jeden punkt Steinera. Wynikałoby to już z tego, że cała figura wynikająca z systemów 6 i 7 i figura wynikająca z systemu 1 §. 2 są identyczne, a więc na każdym z 35 promieni muszą leżeć 4 punkty a przez każdy z 35 punktów muszą przechodzić cztery promienie. Jakoż rzeczywiście n. p. promień Calaya [123] przechodzi przez punkt Steinera (123). W punkcie tym bowiem przecinają się linie Plückera [12], [23], [31] a

$$[123] - \beta_1 [23] - \beta_2 [31] - \beta_3 [12] = 0$$

$$\delta_1 [23] + \delta_2 [31] + \delta_3 [12] = 0$$

Figury systemów 6 i 7 pokazują pewną odwrotność a mianowicie

w figurze 6 jest	w figurze 7 jest
20 promieni Calaya	20 punktów Steinera
15 punktów Salmona	15 promieni Plückera
W każdym punkcie Salmona przecinają się 4 promienie Calaya.	Na każdym promieniu Plückera leżą cztery punkta Steinera.
Na każdym promieniu Calaya leżą trzy punkta Salmona i jeden punkt Steinera.	Przez każdy punkt Steinera przechodzą trzy promienie Plückera i jeden promień Calaya.

Podobnie jak system 4) rozpada się i system 5) na dwa systemy mianowicie

$$\left\| \begin{array}{cccccc} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 & \nu_5 & \nu_6 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \end{array} \right\| \qquad 8)$$

i na system

$$\left\| \begin{array}{cccccc} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 & \nu_5 & \nu_6 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{array} \right\| \qquad 9)$$

System 8 daje zrównania 15 punktów. Trzy punkty jak: (12), (23), (31) leżą na tym samym promieniu, albowiem

$$d_3\,(12) + d_1\,(23) + d_2\,(31) = 0$$

Promień ten naznaczymy stosownie przez [123]. Przez każdy z tych 15 punktów przechodzą cztery takie promienie n. p. przez punkt (12), promienie [123], [124], [125], [126]. Promieni takich mamy więc $\frac{15 \cdot 4}{3} = 20$

System 9) daje zrównania 20 punktów, które co cztery leżą na tym samym promieniu n. p. punkty (123), (234), (341) (412) albowiem

$$d_1\,(234) - d_2\,(134) + d_3\,(124) - d_4\,(123) \equiv 0$$
$$b_1\,(234) - b_2\,(134) + b_3\,(124) - b_4\,(123) \equiv 0$$

Promień ten możemy naznaczyć przez [1234]. Przez każdy z 20 punktów przechodzą trzy promienie n. p. przez punkt (123) promienie [1234], [1235], [1236]; tych promieni jest więc $\frac{20 \cdot 3}{4} = 15$

Jak widzimy skład figury wynikającej z 8) jest taki sam, jak skład figury wynikającej z 6) a skład figury wynikającej z 9) taki sam, jak figury wynikającej z 7).

Figury te będą identyczne, jeżeli funkcye y, v i ilości β, δ, b, d wypełniają nieraz już wspomniane zrównania §. 3, które ponieważ $y_7 \equiv 0$ $v_7 \equiv 0$ $\delta_7 = 0$ $d_7 = 0$ przybierają kształty

$$y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3 + y_4 v_4 + y_5 v_5 + y_6 v_6 \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 \qquad 10)$$
$$y_1\,d_1 + y_2\,d_2 + y_3\,d_3 + y_4\,d_4 + y_5\,d_5 + y_6\,d_6 \equiv 0 \qquad 11)$$
$$y_1\,b_1 + y_2\,b_2 + y_3\,b_3 + y_4\,b_4 + y_5\,b_5 + y_6\,b_6 \equiv 0 \qquad 12)$$
$$v_1\,\beta_1 + v_2\,\beta_2 + v_3\,\beta_3 + v_4\,\beta_4 + v_5\,\beta_5 + v_6\,\beta_6 \equiv 0 \qquad 13)$$
$$v_1\,\delta_1 + v_2\,\delta_2 + v_3\,\delta_3 + v_4\,\delta_4 + v_5\,\delta_5 + v_6\,\delta_6 \equiv 0 \qquad 14)$$
$$d_1\,\delta_1 + d_2\,\delta_2 + d_3\,\delta_3 + d_4\,\delta_4 + d_5\,\delta_5 + d_6\,\delta_6 = 0 \qquad 15)$$
$$d_1\,\beta_1 + d_2\,\beta_2 + d_3\,\beta_3 + d_4\,\beta_4 + d_5\,\beta_5 + d_6\,\beta_6 = 0 \qquad 16)$$
$$b_1\,\delta_1 + b_2\,\delta_2 + b_3\,\delta_3 + b_4\,\delta_4 + b_5\,\delta_5 + b_6\,\delta_6 = 0 \qquad 17)$$
$$b_1\,\beta_1 + b_2\,\beta_2 + b_3\,\beta_3 + b_4\,\beta_4 + b_5\,\beta_5 + b_6\,\beta_6 = K \qquad 18)$$

Ostatnie zrównanie powinno być właściwie napisane

$$b_1\,\beta_1 + b_2\,\beta_2 + b_3\,\beta_3 + b_4\,\beta_4 + b_5\,\beta_5 + b_6\,\beta_6 + b_7\,\beta_7 = 0$$

Ponieważ jednak współczynniki b_7 i β_7 w systemach 6) 7) 8) 9) nigdzie nie przychodzą, przeto odpowiedniej jest napisać zrównanie to w kształcie 18) kładąc $b_7\,\beta_7 = -K$.

§. 6.

Powróćmy do systemów 6 i 7. Wyłączmy w systemie 6 pięć punktów Salmona

(1234), (1235), (1245), (1345), (2345).

pomiędzy którymi nie ma trzech takich, któreby leżały na tym samym promieniu. Punkty te możemy więc uważać jako wierzchołki zupełnego pięciokąta (12345). Dziesięć boków jego tworzą linie Calaya [123], [124], [125] [134], [135], [145], [234], [235], [245], [345].

Są to więc promienie, które otrzymamy przez skombinowanie po trzy pierwszych pięciu kolumn systemu 6.

Wyłączmy również w systemie 7 owych pięć linii Plückera, które otrzymamy łącząc szóstę kolumnę systemu 7 z każdą z poprzedzających pięciu. Są to więc promienie

[16], [26], [36], [46], [56]

Między nimi nie ma trzech takich, któreby się w tym samym punkcie przecinały. Możemy je więc uważać jako boki zupełnego pięcioboku [12345]. Dziesięć wierzchołkow jego tworzą punkta Steinera

(126), (136), (146), (156), (246), (256), (346), (356), (456).

Pięciokąt (12345) nazwiemy odpowiednym pięciobokowi [12345]. Z systemów 6 i 7 możemy w ten sam sposób utworzyć jeszcze pięciokąty

(23456), (34561), (45612), (56623), (61234)

i odpowiedne im pięcioboki

[23456], [34561], [45612], [56123], [61234]

Którykolwiek z pięciokątów powstaje przez wyłączenie jednej kolumny systemu 6. Jeżeli index tej kolumny jest n, natenczas odpowiedny mu pięciobok powstaje przez skombinowanie n-J kolumny systemu 7 z pozostałymi pięciu Jeżeli z systemu 6 wyłączymy pięciokąt (12345), natenczas pozostanie jeszcze 10 promieni Calaya i 10 punktów Salmona. Ponieważ na każdym boku pięciokąta jako na promieniu Calaya leżą trzy punkty Salmona, a wierzchołki pięciokąta, przez które ten bok przechodzi, są właśnie dwoma punktami Salmona, przeto każdy bok pięciokąta przechodzi przez jeden z owych pozostałych 10 punktów, czyli inaczej: punkty te leżą po jednym na dziesięciu bokach pięciokąta. Ponieważ zaś w każdym z tych punktów, jako w punkcie Salmona, przecinają się cztery linie Calaya a jedną z nich jest już jeden bok pięciokąta, przeto trzy inne muszą być trzema liniami z pozostałych 10 linii Calaya. Żaden z tych promieni nie przechodzi przez wierzchołki pięciokąta. Ponieważ zaś na nim, jako na linii Calaya, leżą trzy punkty Salmona, przeto tymi punktami muszą być trzy z pozostałych 10 punktów Salmona. Ponieważ zaś promień Calaya [abc] przechodzi przez punkt Steinera (abc), przeto pozostałe linie Calaya przechodzą przez wierzchołki pięcioboku [12345] gdyż te są, jakeśmy widzieli

(126), (136), (146), (156), (236), (246), (256), (345), (356), (456),

a pozostałe promienie Calaya są

[126], [136], [146], [156], [236], [246], [256], [346], [356], [456]

System więc 10 promieni i 10 punktów ma następujące własności:

a) Na każdym promieniu leżą trzy punkty.

b) Przez każdy punkt przechodzą trzy promienie.

c) Punkty leżą na bokach pięciokąta (12345).

d) Promienie przechodzą przez wierzchołki pięcioboku [12345].

Te same własności posiada system 10 promieni Plückera i 10 punktów Steinera, które otrzymamy po wyłączeniu z systemu 7 zupełnego pięcioboku [12345]. W każdym bowiem wierzchołku pięcioboku, jako w punkcie Steinera, przecinają się trzy promienie Plückera. Ponieważ dwoma z nich są już boki przecinające się w tym wierzchołku, przeto trzecim musi być jeden z pozostałych dziesięciu, co jest własnością d). Ponieważ zaś na tym promieniu, jako na linii Plückera, leżą cztery punkty Steinera, a wierzchołek pięcioboku, przez który ten promień przechodzi, jest już jednym punktem, przeto trzy inne muszą być trzema punktami z pozostałych 10 punktów, co jest własnością a). Ponieważ żaden z tych punktów nie leży na bokach pięcioboku, a przez każdy z nich, jako przez punkt Steinera, przechodzą trzy promienie Plückera, przeto tymi trzema liniami muszą być trzy z pozostałych dziesięciu, co jest własnością b). Ponieważ zaś te punkty są (123), (124), (125), (134), (135), (145), (234), (235), (245), (345) przeto leżą po jednym na liniach Calaya |123|, |124|, |125], |134|, [135], |145], |234|, |235|, |245|, |345|, które właśnie są bokami pięciokąta (12345). Własność więc c) jest także udowodnioną.

Takich systemów, które mają własności a, b, c, d istnieje nieskończenie wiele. Jeżeli bowiem w systemie 6 §. 5 zamiast β_6 napiszemy $\beta_6 + \lambda_6$ gdzie λ_6 jest dowolną liczbą i w otrzymanym systemie

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \delta_6 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 + \lambda_6 \end{vmatrix}$$

co dwie z pierwszych pięciu kolumn skombinujemy z szóstą, natenczas otrzymamy 10 linii z tymi samymi własnościami. Naznaczywszy bowiem cały ten system przez $\pi\,(6, \lambda_6)$ a promień, który powstaje przez połączenie kolumn p, q z kolumną szóstą, przez $\pi\,|6\,\lambda_6\,p\,q|$, otrzymamy n. p. że linie $\pi\,|6\,\lambda_6\,1\,2|$, $\pi\,|6\,\lambda_6\,2\,3|$, $\pi\,|6\,\lambda_6\,3\,1|$ i $|123|$ pięciokąta (12345) przecinają się w jednym punkcie albowiem

$$\beta_1\,\pi\,[6\lambda_6 23| + \beta_2\,\pi\,|6\lambda_6 31| + \beta_3\,\pi\,[6\lambda_6 12| - |\beta_6 + \lambda_6|\,|123| =$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_6 + \lambda_6 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_6 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_6 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_6 + \lambda_6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\delta_1\,\pi\,[6\lambda_6 23| + \delta_2\,\pi\,|6\lambda_6 31] + \delta_3\,\pi\,[6\lambda_6 12| - \delta_6\,[123| =$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_6 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_6 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_6 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_1 + \lambda_6 \end{vmatrix} = 0$$

Trzy więc promienie zbudowane na wzór

$$\pi\,|6\lambda_6 pq|,\ \pi\,|6\lambda_6 qr].\ \pi\,|6\lambda_6 rp|$$

przecinają sie w jednym punkcie i to na boku |pqr| pięciokąta (12345). Ten punkt oznaczymy przez $(6\lambda_6 pqr)$.

Na każdej z dziesięciu linii systemu $\pi\,|6\lambda_6|$ leżą trzy takie punkty n. p. na linii $\pi\,[6\lambda_6 12]$ punkty $(6\lambda_6 123)$, $(6\lambda_6 124)$, $(6\lambda_6 125)$.

Punktów tych jest więc dziesięć. Własności a, b, c są więc udowodnione.

Własność zaś d) wynika ze zrównań

$$\pi\,[6\lambda_6 pq] - \beta_1 \begin{vmatrix} y_q & y_6 \\ \delta_q & y_6 \end{vmatrix} - \beta_2 \begin{vmatrix} y_6 & y_p \\ \delta_6 & \delta_p \end{vmatrix} - (\beta_6 + \lambda_6) \begin{vmatrix} y_p & y_q \\ \delta_p & \delta_q \end{vmatrix} = 0$$

$$\delta_p \begin{vmatrix} y_q & y_6 \\ \delta_q & \delta_6 \end{vmatrix} + \delta_q \begin{vmatrix} y_6 & y_p \\ \delta_6 & \delta_p \end{vmatrix} + \delta_6 \begin{vmatrix} y_p & y_q \\ \delta_p & \delta_q \end{vmatrix} = 0,$$

które wyrażają, że linia $\pi\,[6\lambda_6 pq]$ przechodzi przez punkt Steinera (6pq) a więc przez jeden z wierzchołków pięcioboku [12345].

Z własności takiego systemu $\pi\,(6\lambda_6)$ wynika, że dwa systemy $\pi\,(6\lambda_6)$ i $\pi\,(6\lambda'_6)$ tworzą z zupełnym pięciokątem (12345) i zupełnym pięciobokiem [12345] system 35 promieni i 35 punktów taki właśnie, od jakiegośmy wyszli t. j. że na każdej z tych linii leżą cztery punkty, a przez każdy punkt przechodzą cztery promienie.

Na zakończenie tego paragrafu przedstawmy system $\pi\,(6\lambda_6)$ we współrzędnych $u_1\ u_2\ u_3$. Linie $\pi\,[6\lambda_6 12]$, $\pi\,[6\lambda_6 23]$, $\pi\,[6\lambda_6 31]$ przecinają się w punkcie $(6\lambda_6 123)$. Dla współrzędnych x_1, x_2, x_3 tego punktu funkcye y_1, y_2, y_3, y_6 przybierają wartości, które muszą się dać przedstawić w kształcie

$$y_1 = r\delta_1 + s\beta_1,\quad y_2 = r\delta_2 + s\beta_2,\quad y_3 = r\delta_3 + s\beta_3,\quad y_6 = r\delta_6 + s\beta_6 + s\lambda_6$$

Wstawiwszy te wartości w zrównania 11 i 12 §. 5 i uwzględniwszy zrównania 15, 16, 17, 18 §. 5 otrzymamy

$$d_4\,(y_4 - r\delta_4 - s\beta_4) + d_5\,(y_5 - r\delta_5 - s\beta_5) + d_6\,\lambda_6\,s = 0$$

$$b_4\,(y_4 - r\delta_4 - s\beta_4) + b_6\,(y_5 - r\delta_5 - s\beta_5) + s\,(\lambda_6\,b_6 + k) = 0$$

Zrównanie zaś 10 z uwzględnieniem zrównań 13 i 14 daje jako zrównanie tego punktu

$$v_4\,(y_4 - r\delta_4 - s\beta_4) + v_5\,(y_5 - r\delta_5 - s\beta_5) + v_6\,s\lambda_6 = 0$$

Jeżeli z niego zapomocą dwóch poprzednich zrównań wyeliminujemy ilości $y_4 - r\delta_4 - s\beta_4$, $y_5 - r\delta_5 - s\beta_5$ otrzymamy na zrównanie tego punktu

$$\begin{vmatrix} v_4 & v_5 & v_6\,\lambda_6 \\ d_4 & d_5 & d_6\,\lambda_6 \\ b_4 & b_5 & b_6\,\lambda_6 + k \end{vmatrix} = 0$$

albo jeżeli ostatnią kolumnę przez λ_6 podzielimy i położymy

$$\frac{k}{\lambda_6} = l_6 \qquad \begin{vmatrix} v_4 & v_5 & v_6 \\ d_4 & d_5 & d_6 \\ b_4 & b_5 & b_6 + l_6 \end{vmatrix} = 0$$

Zrównania więc punktów systemu $\pi\,(6\lambda_6)$ otrzymamy ze systemu

$$\begin{Vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 + l_6 \end{Vmatrix}$$

łącząc szóstą jego kolumnę z którymikolwiek dwoma z pięciu pierwszych. Przytem $\lambda_6\,l_6 = k$. Pod tym warunkiem symbolem tego systemu może być także $\pi\,(6\,l_6)$.

§. 7.

Tak samo, jak z pięciokątu (12346) i pięcioboku [12345], otrzymaliśmy system π $(6\lambda_6)$ tak możemy z pięciokątów

(23456), (34561), (45612), (55123), (61234)

i odpowiednich im pięcioboków

[23456], [34561], [45612], [56123], [61234]

otrzymać systemy π $[1\lambda_1]$ π $[2\lambda_2]$ π $[3\lambda_3]$ π $[4\lambda_4]$ π $[5\lambda_5]$.

Otrzymamy więc 60 promieni i 60 punktów. System tych 60 promieni i 60 punktów nazywa się systemem Pascala a symbolem jego niech będzie π $(\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4\ \lambda_5\ \lambda_6)$ albo π $(l_1\ l_2\ l_3\ l_4\ l_5\ l_6)$ pod warunkiem że

$$\lambda_1\ l_1 = \lambda_2\ l_2 = \lambda_3\ l_3 = \lambda_4\ l_4 = \lambda_5\ l_5 = \lambda_6\ l_6 = k$$

a funkcye y i v wypełniają zrównania 10—18 §. 5.

Promienie tego systemu nazywają się promieniami Pascala a punkty punktami Kirkmanna.

Z własności, które każdy z systemów π posiada wynika:

1) Sześćdziesiąt linii Pascala przecina się 60 razy po trzy w sześćdziesięciu punktach Kirkmanna, rozłożonych na liniach Calaya mianowicie: trzy linie Pascala należące do tego samego systemu π, a utworzone na wzór

$[r\ \lambda_r\ p\ q]$ $[r\ \lambda_r\ q\ s]$ $[r\ \lambda_r\ s\ p]$

przecinają się w tym samym punkcie Kirkmanna

$(r\ \lambda_r\ p\ q\ s)$,

który leży na linii Calaya

$[p\ q\ s]$

2) Sześćdziesiąt punktów Kirkmanna leży 60 razy po trzy na sześćdziesięciu liniach Pascala, przechodzących przez punkty Steinera mianowicie: trzy punkta Kirkmanna, należące do tego samego systemu π, a utworzone na wzór

$(r\lambda_r\ p\ q\ s)(r\lambda_r\ p\ q\ m)(r\lambda_r\ p\ q\ n)$

leżą na linii Pascala

$[r\ \lambda_r\ p\ q]$

która przechodzi przez punkt Steinera

$(p\ q\ r)$

3) Ponieważ każda linia Pascala, jako promień jednego z systemów π przechodzi przez pewien punkt Steinera, a każdy z tych punktów jest wierzchołkiem trzech z sześciu pięcioboków, przeto wynika, że przez każdy punkt Steinera przechodzą trzy linie Pascala, które należą do trzech różnych systemów. I tak linie Pascala

$[p\ \lambda_p\ q\ s]$ $[q\ \lambda_q\ s\ p]$ $[s\ \lambda_s\ p\ q]$

przecinają się w punkcie Steinera $(p\ q\ s)$

4) Ponieważ każdy punkt Kirkmanna, jako punkt jednego systemu π, leży na pewnej linii Calaya, a każda z tych linii jest bokiem trzech z sześciu pięciokątów, przeto wynika z tego, że na każdej linii Calaya leżą trzy punkta Kirkmanna, które należą do trzech różnych systemów. I tak punkta Kirkmanna

$(m\ \lambda_m\ p\ q\ s)(n\ \lambda_n\ p\ q\ s)(r\ \lambda_r\ p\ q\ s)$

leżą na linii Calaya

$[p\ q\ s]$

Inaczej linie Pascala przecinają się dwadzieścia razy po trzy w dwudziestu punktach Steinera.

Inaczej punkta Kirkmanna leżą dwadzieścia razy po trzy na 20 liniach Calaya.

§. 8.

Niech będzie teraz system

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_1\lambda_2 + y_2\lambda_1 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_1\lambda_2 + \delta_2\lambda_1 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \delta_6 \\ \beta_1 + \lambda_1 & \beta_2 + \lambda_2 & \beta_1\lambda_2 + \beta_2\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \end{vmatrix}$$

Jeżeli w tym systemie co dwie z ostatnich pięciu kolumn skombinujemy z kolumną pierwszą, natenczas otrzymamy system $\pi\ (1\lambda_1)$. Albowiem kombinacye pierwszej kolumny z dwoma z czterech ostatnich dają linie

$\pi\ [1\lambda_1 34]$, $\pi\ [1\lambda_1 35]$, $\pi\ [1\lambda_1 36]$, $\pi\ [1\lambda_1 45]$, $\pi\ [1\lambda_1 46]$, $\pi\ [1\lambda_1 56]$,

kombinacya zaś pierwszej trzeciej i jednej z czterech ostatnich, daje pozostałe linie tego systemu

$$\pi\ [1\lambda_1 23],\ \pi\ [1\lambda_1 24],\ \pi\ [1\lambda_1 25],\ \pi\ [1\lambda_1 26]$$

gdyż n. p.

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1\lambda_2 + y_2\lambda_1 & y_3 \\ \delta_1 & \delta_1\lambda_2 + \delta_2\lambda_1 & \delta_3 \\ \beta_1 + \lambda_1 & \beta_1\lambda_2 + \beta_2\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2\lambda_1 & y_3 \\ \delta_1 & \delta_2\lambda_1 & \delta_3 \\ \beta_1 + \lambda_1 & \beta_2\lambda_1 & \beta_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} y_1 & y_1\lambda_2 & y_3 \\ \delta_1 & \delta_1\lambda_2 & \delta_3 \\ \beta_1 + \lambda_1 & \beta_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \lambda_1 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \beta_1 + \lambda_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \lambda_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_1 & y_3 \\ \delta_1 & \delta_1 & \delta_3 \\ \beta_1 + \lambda_1 & \beta_1 + \lambda_1 & \beta_3 \end{vmatrix} = \lambda_1 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \beta_1 + \lambda_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

co położone równe zero, jest zrównaniem linii $\pi\ [1\lambda_1 23]$. Tak samo otrzymamy system $\pi\ [2\lambda_2]$ kombinując co dwie z ostatnich kolumn z kolumną drugą. Jeżeli zaś w tym systemie skombinujemy pierwsze dwie kolumny z każdą z następnych pięciu, natenczas otrzymamy pięć promieni, między którymi nie ma trzech takich, któreby się w jednym punkcie przecinały. Linie te więc tworzą zupełny pięciobok. Jednym z boków jest linia Plückera [12], którą otrzymamy kombinując pierwsze trzy kolumny. Jeżeli bowiem w wyznaczniku

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_1\lambda_2 + y_2\lambda_1 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_1\lambda_2 + \delta_2\lambda_1 \\ \beta_1 + \lambda_1 & \beta_2 + \lambda_2 & \beta_1\lambda_2 + \beta_2\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 \end{vmatrix}$$

człony pierwszej kolumny pomnożymy przez λ_2, człony drugiej przez λ_1 i sumę odpowiednich członów odciągniemy od odpowiednich członów kolumny trzeciej, przez co wartość wyznacznika się nie zmnieni, otrzymamy

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ \delta_1 & \delta_2 & 0 \\ \beta_1 + \lambda_1 & \beta_2 + \lambda_2 & -\lambda_1 \lambda_2 \end{vmatrix} = -\lambda_1 \lambda_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{vmatrix}$$

co położone równe zero, jest zrównaniem linii Plückera [12]. Cztery inne boki tego pięcioboku naznaczmy przez $[3\lambda_1\lambda_2]$ $[4\lambda_1\lambda_2]$ $[5\lambda_1\lambda_2]$ $[6\lambda_1\lambda_2]$, Przecinają one linie Plückera właśnie w czterech punktach Steinera (123), (124), (125), (126). Jeżeli z tego pięcioboku wyłączymy linie Plückera i wierzchołki pięcioboku na niej leżące, to znaczy owe punkty Steinera, natenczas pozostałe cztery linie utworzą zupełny czworobok. Jeżeli w ten sposób skombinujemy wszystkie 6 systemów po dwa, otrzymamy znowu wszystkie linie Plückera i wszystkie punkta Steinera a oprócz tego otrzymamy 15 zupełnych czworoboków, których boki w liczbie 60 mają tą własność, że się 20 razy po trzy przecinają w punktach Steinera n. p w punkcie Steinera (123) linie $[3\lambda_1\lambda_2]$ $[1\lambda_2\lambda_3]$ $[2\lambda_3\lambda_1]$. Bliskim więc jest pytanie, czy te boki nie są liniami Pascala t. j. czy się oprócz tego nie przecinają 60 razy po trzy w 60 punktach, leżących po trzy na liniach Calaya, czyli innymi słowy czy nie tworzą figury $\pi(\lambda'_1\ \lambda'_2\ \lambda'_3\ \lambda'_4\ \lambda'_5\ \lambda'_6)$. Naprzód 60 tych linii możemy podzielić na 6 grup po 10, z których jedna jest

$[1\lambda_2\lambda_3]$, $[1\lambda_2\lambda_4]$, $[1\lambda_2\lambda_5]$, $[1\lambda_2\lambda_6]$, $[1\lambda_3\lambda_4]$, $[1\lambda_3\lambda_5]$, $[1\lambda_3\lambda_6]$, $[1\lambda_4\lambda_5]$, $[1\lambda_4\lambda_6]$, $[1\lambda_5\lambda_6]$.

Zrównanie jednej z tych linii n. p. $[1\lambda_3\lambda_4]$ jest

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_3 & y_4 \\ \delta_1 & \delta_3 & \delta_4 \\ \beta_1 & \beta_3 + \lambda_3 & \beta_4 + \lambda_4 \end{vmatrix} = 0$$

Tę samą linię przedstawia jednak i zrównanie

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_3 & y_4 \\ \delta_1 & \delta_3 & \delta_4 \\ p\beta_1 & p(\beta_3 + \lambda_3) & p(\beta_4 + \lambda_4) \end{vmatrix} = 0$$

gdzie p jest liczbą dowolną. Wyznacznik jednak nie zmieni się, jeżeli do członów trzeciego wiersza dodamy odpowiednie człony drugiego wiersza pomnożone przez dowolną liczbę q, zatem i zrównanie

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_3 & y_4 \\ \delta_1 & \delta_3 & \delta_4 \\ p\beta_1 + q\delta_1 & p(\beta_3 + \lambda_3) + q\delta_3 & p(\beta_4 + \lambda_4) + q\delta_4 \end{vmatrix} = 0 \qquad 1)$$

jest zrównaniem linii $[1\lambda_3\lambda_4]$ Ponieważ jednak p i q są liczbami dowolnymi, przeto możemy je tak dobrać, aby spełniały zrównania

$$p(\beta_3 + \lambda_3) + q\delta_3 = \beta_3 \qquad 2)$$

$$p(\beta_4 + \lambda_4) + q\delta_4 = \beta_4 \qquad 3)$$

Z tych zrównań wynika

$$p = \frac{\delta_4\beta_3 - \delta_3\beta_4}{(\delta_4\beta_3 - \delta_3\beta_4) + (\delta_4\lambda_3 - \delta_3\lambda_4)}$$

$$q = \frac{\lambda_3\beta_4 - \lambda_4\beta_3}{(\delta_4\beta_3 - \delta_3\beta_4) + (\delta_4\lambda_3 - \delta_3\lambda_4)}$$

zatem

$$p\,\beta_1 + q\,\delta_1 = \frac{\beta_1\,(\delta_4\,\beta_3 - \delta_3\,\beta_4) + \delta_1\,(\lambda_3\,\beta_1 - \lambda_1\,\beta_3)}{(\delta_1\,\beta_3 - \delta_3\,\beta_1) + (\delta_1\,\lambda_3 - \delta_3\,\lambda_1)}$$

$$p\,\beta_1 + q\,\delta_1 - \beta_1 = \frac{-\,\delta_1\,\dfrac{\lambda_3\,\beta_1 - \lambda_1\,\beta_3}{\delta_3\,\beta_4 - \delta_1\,\beta_3} - \beta_1\,\dfrac{\delta_3\,\lambda_1 - \delta_1\,\lambda_3}{\delta_3\,\beta_1 - \delta_1\,\beta_3}}{1 + \dfrac{\delta_3\,\lambda_1 - \delta_1\,\lambda_3}{\delta_3\,\beta_1 - \delta_1\,\beta_3}}$$

$$= -\frac{a}{1+b}\,\delta_1 - \frac{b}{1+b}\,\beta_1 \qquad 4)$$

jeżeli dla skrócenia położymy

$$\frac{\lambda_3\,\beta_1 - \lambda_1\,\beta_3}{\delta_3\,\beta_4 - \delta_4\,\beta_3} = a \qquad \frac{\delta_3\,\lambda_1 - \delta_1\,\lambda_3}{\delta_3\,\beta_1 - \delta_1\,\beta_3} = b \qquad 5)$$

Położywszy teraz

$$-\frac{a}{1+b}\,\delta_1 - \frac{b}{1+b}\,\beta_1 = \lambda_1' \qquad 6)$$

otrzymamy

$$p\,\beta_1 + q\,\delta_1 - \beta_1 = \lambda_1', \text{ skąd } p\,\beta_1 + q\,\delta_1 = \beta_1 + \lambda_1'$$

Na podstawie tego zrównania i zrównań 2 i 3 zrównanie linii $[1\ \lambda_3\ \lambda_4]$ przybiera kształt

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_3 & y_4 \\ \delta_1 & \delta_3 & \delta_4 \\ \beta_1 + \lambda' & \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} = 0$$

W podobnym kształcie możemy przedstawić zrównanie każdej z owych dziesięciu linii. Jeżeli we wszystkich razach wartość dla λ_1' będzie ta sama, natenczas dziesięć tych linii będzie stanowiło system $\pi\,(1\ \lambda'_1)$. Warunek ten jak widać z 6) będzie wypełniony, jeżeli we wszystkich dziesięciu razach otrzymamy te same wartości dla a i b. Liczby te są jednak przy danym systemie liczb δ i β funkcyami liczb λ, więc liczby λ muszą wypełniać pewien warunek. Przyjmijmy, że wartości dla a i b we wszystkich razach otrzymane są jednakowe. Ze zrównań 5) możemy odwrotnie liczby λ przedstawić jako funkcye liczb a i b. Ze zrównań tych otrzymamy

$$\lambda_3 = a\,\delta_3 + b\,\beta_3$$
$$\lambda_1 = a\,\delta_1 + b\,\beta_1$$

Przemieniając zrównania innych owych dziesięciu linii otrzymalibyśmy

$$\lambda_5 = a\,\delta_5 + b\,\beta_5 \qquad 7)$$
$$\lambda_6 = a\,\delta_6 + b\,\beta_6$$
$$\lambda_2 = a\,\delta_2 + b\,\beta_2$$

a z innych pozostałych pięciu grup

$$\lambda_4 = a\,\delta_4 + b\,\beta_4$$

Taki więc kształt muszą mieć ilości λ jeżeli z systemu Pascala $\pi\,(\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4\ \lambda_5\ \lambda_6)$ ma powstać w powyżej wskazany sposób nowy system Pascala $\pi\,(\lambda'_1\ \lambda_2'\ \lambda_3'\ \lambda_4'\ \lambda_5'\ \lambda_6')$.

Dla λ_1' otrzymaliśmy

$$\lambda_1' = -\frac{a}{1+b}\,\delta_1 - \frac{b}{1+b}\,\beta_1$$

Otóż jeżeli położymy

$$-\frac{a}{1+b} = a' \qquad -\frac{b}{1+b} = b' \tag{8}$$

otrzymamy

$$\lambda_1' = a'\,\delta_1 + b'\,\beta_1$$

w ogóle

$$\lambda'_r = a'\,\delta_r + b'\,\beta_r$$

a więc ilości systemu $\pi\,(\lambda')$ wypełniają zupełnie podobne zrównania jak ilości λ systemu $\pi\,(\lambda)$.

Ze zrównań 8) wynika

$$a = -\frac{a'}{1+b'} \qquad b = -\frac{b'}{1+b'}$$

z czego widzimy, że z systemu $\pi\,(\lambda')$ otrzymalibyśmy znowu system $\pi\,(\lambda)$. Dwa takie systemy zowią się sprzężonymi. Odtąd będziemy się zajmować tylko takimi systematami Pascala, których λ wypełniają zrównania 7. Jak widzimy, każdy taki system jest dokładnie wyznaczony przez dwie liczby a i b i dlatego zaprowadzamy dla niego symbol π (a b).

§. 9.

Do systemu Pascala doszliśmy wychodząc od systemów 6 i 7 paragrafu 5. Wyjdźmy teraz od systemów 8 i 9 §. 5 t. j. od systemów

$$\left\|\begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \end{matrix}\right\| \quad \text{i} \quad \left\|\begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{matrix}\right\|$$

Z pierwszego z tych systemów otrzymamy, łącząc co dwie kolumny jego, zrównanie 15 punktów, z których co trzy leżą na jednej linii. Takich linii jest 20, a przez każdy z tych punktów przechodzą cztery linie. Figura ta jest odwrotną figurze wynikającej z systemu 7 §. 5, albowiem pierwsza posiada 15 punktów, druga 15 linii, pierwsza 20 linii, druga 20 punktów. Stosownem więc będzie punkty pierwszej nazwać punktami Plückera, a promienie promieniami Steinera.

Z drugiego systemu tego paragrafu otrzymujemy, kombinując co trzy kolumny, zrównania 20 punktów, które po cztery leżą na tym samym promieniu. Promieni tych jest 15 a przez każdy punkt przechodzą trzy. Figura ta jest odwrotną figurze wynikającej z systemu 6 §. 5 i dlatego nazwiemy jej punkty punktami Calaya a promienie promieniami Salmona.

Postępując tak samo, jak w §. 6, dojdziemy do sześciu systemów po dziesięć punktów $\pi\,(1\mu_1)$ $\pi\,(2\mu_2)$ $\pi\,(3\mu_3)$ . . . $\pi\,(6\mu_6)$. Każdy z tych systemów posiada tę własność, że co trzy jego punkty leżą na jednym promieniu. Promieni tych w każdym systemie jest dziesięć i przez każdy z dziesięciu punktów przechodzą trzy linie. Mamy więc 60 puktów i 60 promieni; punkta nazywają się punktami Brianchona a promienie nazwiemy stosownie promieniami Kirkmanna. Cała figura tworzy system Brianchona.

$\pi\ (\mu_1\ \mu_2\ \mu_3\ \mu_4\ \mu_5\ \mu_6)$, posiadający następujące własności:

1) Sześćdziesiąt punktów Brianchona leży sześćdziesiąt razy po trzy na sześćdziesięciu liniach Kirkmanna.

3) Sześćdziesiąt linii Kirkmanna przecina się sześćdziesiąt razy po trzy w 60 punktach Brianchona.

3) Sześćdziesiąt punktów Brianchona leży 20 razy po trzy na 20 liniach Steinera.

4) Sześćdziesiąt linii Kirkmanna przecina się 20 razy po trzy w 20 punktach Calaya.

5) Dwadzieścia punktów Calaya leży 15 razy po cztery na piętnastu liniach Salmona.

6) Dwadzieścia linii Steinera przecina się 15 razy po cztery w 15 punktach Plückera.

7) Przez każdy punkt Calaya przechodzą trzy linie Salmona.

8) Na każdej linii Steinera leżą trzy punkta Plückera.

Zrównania 10 punktów objętych symbolem $\pi\ (6\mu_6)$ otrzymamy, kombinując w systemie

$$\left|\begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 + \mu_6 \end{matrix}\right| \qquad 1)$$

ostatnią kolumnę z każdymi dwoma z poprzedzających pięciu. W paragrafie 6 wykazano, że system $\pi\ (6\ \lambda_6)$

$$\left|\begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \delta_6 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 + \lambda_6 \end{matrix}\right|$$

przedstawiony za pomocą zrównań 10—18 §. 5 we współrzędnych $u_1\ u_2\ u_3$ otrzymuje kształt

$$\left|\begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 + l_6 \end{matrix}\right|$$

gdzie $\lambda_6\ l_6 = k$

Jeżeli więc ilości y, δ, β, v, d, b spełniają zrównania 10—18 §. 5 i oprócz tego $\lambda_6\ \mu_6 = k$ natenczas system $\pi\ (6\ \mu_6)$ jest identyczny z systemem $\pi\ (6\ \lambda_6)$, a cały system Brianchona $\pi\ (\mu_1\ \mu_2\ \mu_3\ \mu_4\ \mu_5\ \mu_6)$ będzie identyczny z systemem Pascala $\pi\ (\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4\ \lambda_5\ \lambda_6)$, jeżeli będzie

$$\lambda_1\ \mu_1 = \lambda_2\ \mu_2 = \lambda_3\ \mu_3 = \lambda_4\ \mu_4 = \lambda_5\ \mu_5 = \lambda_6\ \mu_6 = k \qquad 2)$$

Jeżeli z systemem Brianchona $\pi\ (\mu_1\ \mu_2\ \mu_3\ \mu_4\ \mu_5\ \mu_6)$ postąpimy tak, jak z systemem Pascala w §. 8, otrzymamy 15 zupełnych czworokątów, których 60 wierzchołków będą tworzyć znowu system Brianchona odpowiadający systemowi $\pi\ (\mu_1\ \mu_2\ \mu_3\ \mu_4\ \mu_5\ \mu_6)$, jeżeli liczby μ będą dane zrównaniami

$\mu_1 = p\ d_1 + q\ b_1 \quad \mu_2 = p\ d_2 + q\ b_2 \quad \mu_3 = p\ d_3 + q\ b_3$
$\mu_4 = p\ d_4 + b\ b_4 \quad \mu_5 = p\ d_5 + q\ b_5 \quad \mu_6 = p\ d_6 + q\ b_6$
gdzie p i q są dwa współczynniki dowolne. Liczby μ' nowego systemu dane są przez zrównania kształtu

$$\mu'_r = p'\ d_r + q'\ b_r$$

$$\text{gdzie } p' = -\frac{p}{1+q} \quad q' = -\frac{1}{1+q}$$

System pierwotny możemy naznaczyć przez π (p, q), nowy przez π (p', q',).

Niech będzie system Pascala π (a c) i system Brianchona π (p q). Możemy się zapytać, kiedy takie dwa systemy będą identyczne. Naprzód muszą funkcye y i v, jakoteż ilości ξ, β, d, b spełniać zrównania 10—18 §. 5.

Przypuśćmy, że tak jest, natenczas muszą jeszcze być spełnione zrównania 2) tego paragrafu. Ponieważ teraz $\lambda_r = a\ \xi_r + c\ \beta_r$ a $\mu_r = p\ d_r + q\ b_r$ gdzie r może przyjąć jedną z wartości 1, 2, 3, 4, 5, 6, przeto musi być spełnionych sześć zrównań kształtu

$$a\ \xi_r + c\ \beta_r = \frac{k}{p\ d_r + q\ b_r} \quad \text{albo} \quad a\ \xi_r + c\ \beta_r = \frac{1}{s\ d_r + t\ b_r}$$

jeżeli położymy $\frac{p}{q} = s \quad \frac{q}{k} = t$. Oczywiście nie zawsze będzie można znaleść cztery liczby a, c, s, t, któreby spełniały sześć owych zrównań. Przypuśćmy jednak, że i ten drugi warunek jest spełniony, natenczas systemy 6, 7, 8, 9 i zrównania 10—18 §. 5 będzie można w innym kształcie przedstawić. Naprzód system 6 i 7 nie zmieni się, to znaczy otrzymamy zrównania tych samych promieni, jeżeli zamiast β_r napiszemy $a\ \xi_r + c\ \beta_r$ i następnie wszystkie człony kolumny r podzielimy przez jedną i tę samą liczbę, $a\ \xi_r + c\ \beta_r$ Systemy zaś 8 i 9 nie zmienią się, to jest otrzymamy zrównania tych samych punktów, jeżeli w miejsce b_r napiszemy $s\ d_r + t\ b_r$ i następnie wszystkie człony kolumny r podzielimy przez jedną i tę samą liczbę $s\ d_r + t\ b_r$ Mamy więc teraz zamiast

$$y_r \qquad \xi_r \qquad \beta_r \qquad v_r \qquad d_r \qquad b_r \quad \text{ilości}$$

$$\frac{y_r}{a\ \xi_r + c\ \beta_r} \qquad \frac{\xi_r}{a\ \xi_r + c\ \beta_r} \qquad 1 \qquad \frac{v_r}{s\ d_r + t\ b_r} \qquad \frac{d_r}{s\ d_r + t\ b_r} \qquad 1$$

Łatwo się przekonać, że nowe te ilości spełniają zrównanie 10—18 §. 5. Uwzględniając bowiem że ilości y, v, d, b, ξ i β z założenia spełniają zrównania 10—18 §. 5,
a $(a\ \xi_r + c\ \beta_r)\ (s\ d_r + t\ b_r) = 1$ mamy n. p.

$$\sum_{r=1}^{r=6} \frac{y_r\ v_r}{(a\ \xi_r + c\ \beta_r)\ (s\ d_r + t\ b_r)} = \sum_{r=1}^{r=6} y_r\ v_r \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$$

$$\sum_{r=1}^{r=6} \frac{y_r}{a\,\delta_r + c\,\beta_r} \cdot \frac{d_r}{s\,d_r + t\,b_r} = \sum_{r=1}^{r=6} y_r\,d_r = 0 \quad \text{i t. d,}$$

Dla oznaczenia zaś liczby k mamy zrównanie 18 §. 5, które teraz ma kształt

$$k = \sum_{r=1}^{r=6} \frac{s\,d_r + t\,b_r}{s\,d_r + t\,b_r} \cdot \frac{a\,\delta_r + c\,\beta_r}{a\,\delta_r + c\,\beta_r} = 6$$

Połóżmy dla skrócenia

$$\frac{y_r}{a\,\delta_r + c\,\beta_r} = z_r \qquad \frac{\delta_r}{a\,\delta_r + c\,\beta_r} = \nu_r \qquad \frac{v_r}{s\,d_r + t\,b_r} = w_r$$

$$\frac{d_r}{s\,d_r + t\,b_r} = n_r$$

natenczas systemy 6, 7, 8, 9 §. 5 przybierą kształt

$$\left\| \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 & \nu_5 & \nu_6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| \quad \left\| \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 & \nu_5 & \nu_6 \end{matrix} \right\| \quad \left\| \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & n_6 \end{matrix} \right\|$$

$$\left\| \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & n_6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| \qquad 3)$$

których funkcye z i w jakoteż liczby ν i n spełniają zrównania

$$z_1 w_1 + z_2 w_2 + z_3 w_3 + z_4 w_4 + z_5 w_5 + z_6 w_6 = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 \qquad 4)$$
$$n_1\,z_1 + n_2\,z_2 + n_3\,z_3 + n_4\,z_4 + n_5\,z_5 + n_6\,z_6 = 0 \qquad 5)$$
$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 = 0 \qquad 6)$$
$$\nu_1\,w_1 + \nu_2\,w_2 + \nu_3\,w_3 + \nu_4\,w_4 + \nu_5\,w_5 + \nu_6\,w_6 = 0 \qquad 7)$$
$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 = 0 \qquad 8)$$
$$\nu_1\,n_1 + \nu_2\,n_2 + \nu_3\,n_3 + \nu_4\,n_4 + \nu_5\,n_5 + \nu_6\,n_6 = 0 \qquad 9)$$
$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = 0 \qquad 10)$$
$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 + \nu_6 = 0 \qquad 11)$$
$$k = 6 \qquad 12)$$

§. 10.

Do systemów i zrównań paragrafu poprzedniego doszliśmy pod warunkiem, że systemy 6, 7, 8 i 9 §. 5. były tak dane, iż można było znaleść 4 liczby a, c, p, q spełniające sześć zrównań kształtu $(a\,\delta_r + c\,\beta_r)\,(p\,d_r + q\,b_r) = k$.

Odwrotnie będziemy mogli wnosić że takie liczby istnieją, jeżeli mamy z góry dane systemy 3 spełniające zrównania 4 – 12 §. 9. Przyjmijmy bowiem że nam dane są tylko pierwsze dwa z systemów 3) poprzedniego paragrafu. Utwórzmy z nich system Pascala π (o, c) gdzie c jest jakąkolwiek liczbą. Zrównania 7 §. 8.

przechodzą, ponieważ wszystkie β są równe jedności a liczba a = o, w zrównania

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = c$$

Przyjmijmy teraz, że dane są tylko dwa ostatnie z systemów 3) poprzedniego paragrafu; utwórzmy z nich system Brianchona π (o p). Zrównania dla liczb μ są teraz

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = q$$

Ażeby systemy π (o c) i π (o q) były identyczne, muszą naprzód być spełnione zrównania 4—12 §. 9. Jeżeli zrównania te są rzeczywiście spełnione, natenczas musi być spełnionych jeszcze sześć zrównań kształtu

$$(a\,\delta_r + c\,\beta_r)\,(p\,d_r + q\,b_r) = k$$

które jednak wszystkie redukują się teraz do jednego

$$c = \frac{6}{q}$$

któremu zrównaniu można w nieskończenie wieloraki sposób zadość uczynić.

Jeżeli więc funkcye z, w i ilości ν i n spełniają zrównania 4—12 §. 9, natenczas system Pascala będzie zarazem systemem Brianchona, jeżeli $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = c$ gdzie c jest jakąkolwiek liczbą. Przyjmijmy dla c jaką wartość i szukajmy systemu odpowiedniego systemowi π (o c). Ten dany jest przez zrównania 8 §. 8. to jest przez zrównania

$$a' = \frac{-a}{1+a} \qquad c' = \frac{-c}{1+c}$$

z których ponieważ a = o wynika

$$a' = o \qquad c' = \frac{-c}{1+c} \qquad\qquad 1)$$

Podstawiając w ostatniem zrównaniu za c wszystkie wartości od $-\infty$ do $+\infty$, otrzymamy dla każdej odpowiedne c'. Ze wszystkich wartości, jakie może przyjąć c, zasługuje na szczególne uwzględnienie c = — 1. Dla tej bowiem wartości otrzymujemy c' = — 2, z czego wynika, że system π (o — 2) sam sobie odpowiada. Przy tym systemie zatrzymamy się dłużej.

§. 11.

Ponieważ teraz w ogólnym symbolu linii Pascala $\pi\,|p\,\lambda_p\,q\,r|$, λ_p ma zawsze tę samę wartość — 2 przeto możemy λ_p ze symbolu wypuścić i jako symbol linii Pascala przyjąć $\pi\,|p\,q\,r|$. Zrównanie linii Pascala n. p. $\pi\,|1\;2\;3|$ będzie teraz

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad\qquad 1)$$

Ponieważ jednak

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 + z_2 & z_2 & z_3 \\ v_1 + v_2 & v_2 & v_3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 + z_2 & z_2 - z_3 & z_3 \\ v_1 + v_2 & v_2 - v_3 & v_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (z_1 + z_2)(v_2 - v_3) - (z_2 - z_3)(v_1 + v_2),$$

przeto zrównanie tej linii jest

$(z_1 + z_2)(v_2 - v_3) - (z_2 - z_3)(v_1 + v_2) = 0$ albo

$$\frac{z_1 + z_2}{v_1 + v_2} = \frac{z_2 - z_3}{v_2 - v_3} \qquad 2)$$

Ponieważ jednak

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 + z_3 & z_2 - z_3 & z_3 \\ v_1 + v_3 & v_2 - v_3 & v_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

przeto zrównanie tej samej linii jest takie

$$\frac{z_1 + z_3}{v_1 + v_3} = \frac{z_2 - z_3}{v_2 - v_3} \qquad 3)$$

Z powyższych dwóch kształtów wynika jednak jeszcze trzeci kształt zrównania tej samej linii, mianowicie

$$\frac{z_1 + z_2}{v_1 + v_2} = \frac{z_1 + z_3}{v_1 + v_3} \qquad 4)$$

Wyłączywszy więc z indexów 1, 2, 3, 4, 5, 6 index 1 i utworzywszy z pięciu innych wszystkie dwójki, otrzymamy, tworząc zrównania na kształt jednego z trzech powyższych, zrównania linii Pascala grupy $\pi\,|1|$, a w podobny sposób otrzymamy i zrównania linii grup $\pi\,|2|$, $\pi\,|3|$, $\pi\,|4|$, $\pi\,|5|$, $\pi\,|6|$. Jeżelibyśmy zrównania wszystkich linii napisali w podobny sposób, jak zrównanie linii $\pi\,(1, 2, 3)$ w trzecim kształcie, natenczas w każdym z tych zrównań pewien index dwa razy by przychodził. Bliskim więc jest pytanie, jakie promienie oznaczają zrównania utworzone w podobny sposób ale tak, żeby się indexy nie powtarzały, a więc n. p.

$$\frac{z_1 + z_2}{v_1 + v_2} = \frac{z_3 + z_4}{v_3 + v_4}$$

Zaznaczyć musimy że zrównanie tego promienia da się przedstawić jeszcze w dwóch innych kształtach, albowiem z uwzględnieniem zrównań 6 i 11 §. 9.

$$\frac{z_2 + z_2}{v_1 + v_2} = \frac{z_3 + z_4}{v_3 + v_1} = \frac{-(z_1 + z_2 + z_3 + z_1)}{-(v_1 + v_2 + v_3 + z_4)} = \frac{z_5 + z_6}{v_5 + v_6}$$

Zrównanie tego promienia da się więc w trzech następujących kształtach przedstawić

$$\frac{z_1 + z_2}{v_1 + v_2} = \frac{z_3 + z_4}{v_3 + v_4}, \quad \frac{z_3 + z_4}{v_3 + v_4} = \frac{z_5 + z_6}{v_5 + v_6}, \quad \frac{z_5 + z_6}{v_5 + v_6} = \frac{z_1 + z_2}{v_1 + v_2}$$

Promień ten możemy więc symbolicznie naznaczyć przez $|12, 34, 56|$. Promieni takich jest piętnaście. Otrzymamy je wszystkie w następujący sposób. Z pomiędzy piętnastu dwójek, które można z sześciu elementów 1, 2, 3, 4, 5, 6 utworzyć, wyłączmy którekolwiek pięć, mające jeden element wspólny n. p.

dwójki 12, 13, 14, 15, 16. Jeżeli z pomiędzy tych dwojek obierzemy jednę n. p. 12 a z pomiędzy czterech w niej nie znajdującyhh się elementów jeden n. p. 3 to ten element z powstałymi trzema daje trzy dwójki 34, 35, 36. Jeżeli następnie jednę z tych dwójek skombinujemy z dwójką 12 n. p. dwójkę 34, to pozostałe dwa elementa dadzą trzecią dwójkę 56, a te trzy dwójki razem złączone dadzą nam symbol promienia (12, 34, 56). Symbole piętnastu linii są więc następujące

(12, 34, 56) (13, 24, 56) (14, 23, 56) (15, 23, 46) (16, 23, 45)
(12, 35, 46) (13, 25, 46) (14, 25, 36) (15, 24, 36) (16, 24, 35)
(12, 36, 45) (13, 26, 45) (14, 26, 35) (15, 26, 34) (16, 25, 34)

Ze sposobu tworzenia tych symbolów wynika, że każda dwójka przychodzi w znaku trzech promieni n. p. dwójka 26 w znakach (13, 26, 45) (14, 26, 35), (15, 26, 34). Trzy takie promienie, których symbole posiadają wspólną dwójkę, tworzą trójkąt, który naznaczymy przez t (p q), jeżeli symbole boków jego posiadają wspólną dwójkę (pq). Ponieważ dwójek jest 15, przeto i trójkątów będzie 15; wierzchołki tych trójkątów wyznaczają 45 punktów. Te bowiem z tych trójkątów, które mają jeden indeks wspólny, jak n. p. trójkąty t (12) i t (23) zbudowane są z sześciu różnych promieni; dwa zaś trójkąty, które nie mają żadnego indeksu wspólnego jak n. p. t (23) i t (56) mają jeden z piętnastu promieni jako bok wspólny n. p. trójkąty t (23) i t (56), promień (23, 56, 41); nie ma zaś dwóch takich trójkątów, które by miały dwa z owych piętnastu promieni jako dwa wspólne boki. Z tego wynika że 45 wierzchołków 15 trójkątów, wyznacza 45 różnych punktów i łatwo udowodnić że przez każdy wierzchołek przechodzą cztery promienie Pascala, n. p. przez wierzchołek powstały przez przecięcie się promieni (15, 26, 34) i (13, 26, 45) przechodzą promienie Pascala π [1, 35], π [3, 14], π [4, 35], π [5, 14]. Albowiem zrównania

$$\frac{z_3 + z_4}{y_3 + y_4} - \frac{z_2 + z_6}{y_2 + y_6} = 0 \qquad \frac{z_1 + z_5}{y_1 + y_5} - \frac{z_2 + z_6}{y_2 + y_6} = 0$$

$$\frac{z_3 + z_4}{y_3 + y_4} - \frac{z_2 + z_6}{y_2 + y_6} = 0 \qquad \frac{z_1 + z_5}{y_1 + y_5} - \frac{z_2 + z_6}{y_2 + y_6} = 0$$

są dwa zrównania tego samego promienia (15, 26, 34), każde dwa razy napisane, zrównania zaś

$$\frac{z_2 + z_6}{y_2 + y_6} - \frac{z_1 + z_3}{y_1 + y_3} = 0 \qquad \frac{z_2 + z_6}{y_2 + y_6} - \frac{z_1 + z_3}{y_1 + y_3} = 0$$

$$\frac{z_2 + z_6}{y_2 + y_6} - \frac{z_4 + z_5}{y_4 + y_5} = 0 \qquad \frac{z_2 + z_6}{y_2 + y_6} - \frac{z_4 + z_5}{y_4 + y_5} = 0$$

są dwa zrównania promienia (13, 26, 45), każde także dwa razy napisane. Otóż jeżeli do sumy lewych stron co dwóch tych zrównań dodamy lewe strony zrównań promieni Pascala π [3, 14], π [1, 35], π [4, 35], π [5, 14] a więc zrównań

$$\frac{z_1 + z_3}{\nu_1 + \nu_3} - \frac{z_3 + z_1}{\nu_3 + \nu_4} = 0 \qquad \frac{z_1 + z_3}{\nu_1 + \nu_3} - \frac{z_1 + z_5}{\nu_1 + \nu_5} = 0$$

$$\frac{z_1 + z_5}{\nu_1 + \nu_5} - \frac{z_3 + z_1}{\nu_3 + \nu_4} = 0 \qquad \frac{z_4 + z_5}{\nu_4 + \nu_5} - \frac{z_1 + z_5}{\nu_1 + \nu_5} = 0,$$

nateneczas w każdym razie otrzymamy sumę identycznie równą zero, co dowodzi twierdzenia.

Ażeby poznać, które promienie Pascala przechodzą przez pewien wierzchołek, wyłączmy z symbolów promieni, przez których przecięcie ten wierzchołek powstaje wspólną dwójką w naszym więc przykładzie z symbolów (15, 26, 34) (13, 26, 45) dwójkę 26. Cztery pozostałe indeksy wskażą nam owe grupy π, do których promienie Pascala przez ten wierzchołek przechodzące należą; tu więc będą grupy π [1], π [3], π [4], π [5]. Aby dowiedzieć się teraz, który promień z grupy π [1] przez ten wierzchołek przechodzi, trzeba te indeksy, które w symbolach powyższych z indeksem 1 są połączone skombinować w dwójkę; w naszym przykładzie są to indeksy 3, 5, a więc z grupy π [1] przehodzi promień π [1, 35]. W ten sposób otrzymamy i trzy inne promienie Pascala.

Promienie Pascala przecinają się więc 45 razy po cztery w 45 punktach; na każdym promieniu leżą trzy z tych punktów n. p. promieniu π [1, 34] punkty powstałe przez przecięcie się promieni

$$\begin{Bmatrix}(13,\ 26,\ 45)\\(14,\ 26,\ 35)\end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix}(13,\ 25,\ 64)\\(14,\ 25,\ 63)\end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix}(13,\ 56,\ 24)\\(14,\ 56,\ 23)\end{Bmatrix}$$

Z symbolów tych promieni poznajemy, że promienie pierwszego wiersza tworzą trójkąt t (13) promienie drugiego wiersza trójkąt t (14).

Uważając te boki obu trójkątów jako odpowiadające sobie, w których symbolach przychodzi ta sama dwójka, poznajemy, iż odpowiedne boki dwóch trójkątów, mających jeden indeks wspólny, przecinają się w trzech punktach leżących na tym samym promieniu Pascala mianowicie: boki trójkątów t (pq) i t (pr) na promieniu π [p, qr]. Trójkąty takie są więc trójkątami perspektywnymi, zatem promienie, łączące odpowiedne wierzchołki, muszą się przecinać w jednym punkcie. Promienie te są trzema promieniami Pascala, przecinającymi się w jednym punkcie Steinera. Rzeczywiście między innymi promieniami przechodzi przez

wierzchołek $\begin{Bmatrix}(13,\ 26,\ 45)\\(13,\ 25,\ 64)\end{Bmatrix}$ trójkąta t (13) i odpowiedny mu wierzchołek $\begin{Bmatrix}(14,\ 26,\ 35)\\(14,\ 25,\ 63)\end{Bmatrix}$ trójkąta t (14), π [2, 56] przez

wierzchołek $\begin{Bmatrix}(13,\ 25,\ 64)\\(13,\ 56,\ 24)\end{Bmatrix}$ trójkąta t (13) i odpowiedny mu wierzchołek $\begin{Bmatrix}(14,\ 25,\ 63)\\(14,\ 56,\ 23)\end{Bmatrix}$ trójkąta t (14), π [5, 26]

wierzchołek $\begin{matrix}(13, 56, 24)\\(13, 26, 45)\end{matrix}$ trójkąta t (13) i odpowiedny mu wierzchołek $\begin{matrix}(14, 56, 23)\\(14, 25, 35)\end{matrix}$ trójkąta t (14), π [6, 25]

Promienie te jak z poprzedzającego wiemy, przecinają się w punkcie Steinera (256). Dwa więc trójkąty takie, jak t (13) i s (14) wpisane są w trzy promienie Pascala, których symbole zbudowane są z trzech indeksów, nie przychodzących w symbolach tych trójkątów, Z tego wynika, że i trójkąt t (34) jest w te same promienie wpisany, że więc trzy trójkąty t (13), t (14), t (34) są perspektywnymi; ale w takim razie odpowiedne boki tych trzech trójkątów tworzą trzy nowe trójkąty, których odpowiedne wierzchołki leżą znowu na trzech liniach, przecinających się w jednym punkcie. Jakoż jeżeli zważymy, że bokami trójkąta t (34) są

(34, 26, 15), (34, 25, 16), (34, 56, 12)

trójkąta t (13)

(13, 26, 45), (13, 25, 64), (13, 56, 24)

trójkąta t (14)

(14, 26, 35), (14, 25, 36), (14, 56, 23),

natenczas widzimy, że trójkątami nowymi utworzonymi przez odpowiedne boki tych trójkątów są trójkąty t (26), t (25), t (56). Trójkąty te są tak samo zbudowane, jak trójkąty t (13), t (14), t (34), zatem odpowiedne ich wierzchołki leżą na promieniach Pascala π [1, 34], π [3, 14], π [4, 13], przecinających się w punkcie Steinera (1 3 4). Takie punkta Steinera jak (134) i (256) nazywają się sprzężonymi.

§ 12.

Boki takich dwóch trójkątów jak t (pq) i t (pr), a zatem trójkątów zbudowanych z sześciu różnych promieni, przecinają się w piętnastu punktach. Sześć z tych punktów są wierzchołkami tych trójkątów; trzy inne leżą jak wiemy na promieniu π [p, qr]. Pozostałych sześć punktów tworzą wierzchołki sześciokąta zwanego sześciokątem Pascala. Każdemu więc promieniowi Pascala odpowiada sześciokąt Pascala sześciokątów takich jest więc 60. Otrzymamy je łatwo w ten sposób. Wyłączając wszystkie trójkąty, które mają jeden indeks wspólny, których liczba jest więc zawsze pięć n. p. trójkąty t (12), t (13), t (14), t (15), t (16) i kombinując je co dwa, otrzymamy dziesięć sześciokątów odpowiadających dziesięciu promieniom grupy π [1]. Postępując tak z każdym indeksem, otrzymamy wszystkie 60 sześciokątów. Wierzchołki tych sześciokątów czynią 60 różnych punktów, albowiem 15 owych promieni przecina się w $\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$ różnych punktach, z których 45 leży na promieniach Pascala, z których zatem żaden nie jest wierzchołkiem jakiegoś sześciokąta.

Sześćdziesiąt pozostałych punktów otrzymamy w ten sposób Wybierzmy grupę pięciu trójkątów, które mają jeden indeks wspólny n. p. t (12) t (13) t (14) t (15) t (16). Ponieważ między nimi niema takich dwóch, któreby miały bok wspólny, przeto zawierają one w sobie wszystkie 15 promieni. Obierzmy bok [12, 34, 56] trójkąta t (12), a z pomiędzy boków czterech innych trójkątów te, które ani z bokiem [12, 34, 56] ani między sobą nie dają żadnego punktu, leżącego na promieniu Pascala, a więc takie, których symbole nie mają wspólnej dwójki. Są to więc promienie

[12, 34, 56], [13, 46, 25], [14, 26, 35], [15, 42, 36], [16, 54, 32] I

albo

[12, 34, 56], [13, 45, 26], [14, 25, 36], [15, 46, 23], [16, 42, 35] II

Przez przecięcie co dwóch premieni pierwszej grupy otrzymamy 10, przez przecięcie co dwóch promieni drugiej grupy innych 10, a więc razem 20 z owych 60 wierzchołków. Postępując tak samo z drugim i trzecim bokiem trójkąta t (12) otrzymamy jeszcze cztery grupy

[12, 36, 45], [13, 46, 25], [14, 56, 23], [15, 34, 26], [16, 42, 35] III

[12, 36, 45], [13, 42, 56], [14, 26, 35], [15, 46, 32], [16, 43, 25] IV

[13, 35, 46], [13, 26, 54], [14, 32, 56], [15, 42, 36], [16, 52, 34] V

[12, 35, 45]. [13, 42, 65], [14, 25, 36], [15, 34, 62], [16, 54, 32] VI

które dają 40 pozostałych wierzchołków.

Pod pewnymi warunkami wierzchołki utworzone przez każdą z tych grup zleją się w jeden tak, że otrzymamy tylko 6 wierzchołków a ponieważ w każdym z nich będzie się przecinać 5 z owych piętnastu promieni, przeto te wierzchołki i piętnaście promieni będą tworzyć zupełny sześciokąt Pascala.

Aby te warunki poznać napiszmy zrównania pięciu promieni grupy I. Są one:

$$\frac{z_1 + z_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{z_3 + z_4}{\gamma_3 + \gamma_4} = \frac{z_5 + z_6}{\gamma_5 + \gamma_6}$$

$$\frac{z_1 + z_3}{\gamma_1 + \gamma_3} = \frac{z_4 + z_6}{\gamma_4 + \gamma_6} = \frac{z_2 + z_5}{\gamma_2 + \gamma_5}$$

$$\frac{z_1 + z_4}{\gamma_1 + \gamma_4} = \frac{z_2 + z_6}{\gamma_2 + \gamma_6} = \frac{z_3 + z_5}{\gamma_3 + \gamma_5}$$

$$\frac{z_1 + z_5}{\gamma_1 + \gamma_5} = \frac{z_4 + z_2}{\gamma_4 + \gamma_2} = \frac{z_3 + z_6}{\gamma_3 + \gamma_6}$$

$$\frac{z_1 + z_6}{\gamma_1 + \gamma_6} = \frac{z_5 + z_4}{\gamma_5 + \gamma_4} = \frac{z_3 + z_2}{\gamma_3 + \gamma_2}$$

Szukajmy naprzód warunków pod jakimi trzy pierwsze promienie przetną się w jednym punkcie. W tym celu napiszmy ich zrównania w kształcie

$$\frac{z_4 + z_3}{\nu_4 + \nu_3} = \frac{z_6 + z_5}{\nu_6 + \nu_5}$$
$$\frac{z_3 + z_1}{\nu_3 + \nu_1} = \frac{z_5 + z_2}{\nu_5 + \nu_2} \qquad 1$$
$$\frac{z_1 + z_4}{\nu_1 + \nu_4} = \frac{z_2 + z_6}{\nu_3 + \nu_6}$$

i dodajmy te zrównania stronami a otrzymamy

$$\frac{(z_4+z_3)(\nu_3+\nu_1)(\nu_1+\nu_4) + (z_3+z_1)(\nu_4+\nu_3)(\nu_1+\nu_4) + (z_1+z_4)(\nu_4+\nu_3)(\nu_3+\nu_1)}{(\nu_4+\nu_3)(\nu_3+\nu_1)(\nu_1+\nu_4)} =$$
$$= \frac{(z_6+z_5)(\nu_5+\nu_2)(\nu_2+\nu_6) + (z_5+z_2)(\nu_6+\nu_5)(\nu_2+\nu_6) + (z_2+z_6)(\nu_6+\nu_5)(\nu_5+\nu_2)}{(\nu_6+\nu_5)(\nu_5+\nu_2)(\nu_2+\nu_6)}$$

Otóż

$$(z_4+z_3)(\nu_3+\nu_1)(\nu_1+\nu_4) = (z_4+z_3+z_1)(\nu_1^2+\nu_3\nu_4+\nu_1\nu_4+\nu_1\nu_3) -$$
$$- z_1(\nu_1^2+\nu_3\nu_1+\nu_4\nu_1+\nu_1\nu_3)$$

Podobne wartości otrzymamy dla wszystkich innych członów w licznikach powyższego zrównania. Jeżeli jeszcze uwzględnimy że

$$(\nu_4+\nu_3)(\nu_3+\nu_1)(\nu_1+\nu_4) = \tfrac{1}{3}\left[(\nu_1+\nu_3+\nu_4)^3 - (\nu_1^3+\nu_3^3+\nu_4^3)\right]$$
$$(\nu_6+\nu_5)(\nu_5+\nu_2)(\nu_2+\nu_6) = \tfrac{1}{3}\left[(\nu_2+\nu_5+\nu_6)^3 - (\nu_2^3+\nu_5^3+\nu_6^3)\right]$$

natenczas po wstawieniu wszystkich tych wartości w powyższe zrównanie otrzymamy

$$\frac{(z_4+z_3+z_1)(\nu_4+\nu_3+\nu_1)^2 - (\nu_4^2 z_4 + \nu_3^2 z_3 + \nu_1^2 z_1)}{(\nu_4+\nu_3+\nu_1)^2 - (\nu_4^3+\nu_3^3+\nu_1^3)} =$$
$$= \frac{(z_2+z_5+z_6)(\nu_2+\nu_5+\nu_6)^2 - (\nu_2^2 z_2 + \nu_5^2 z_5 + \nu_6^2 z_6)}{(\nu_2+\nu_5+\nu_6)^3 - (\nu_2^3+\nu_5^3+\nu_6^3)}$$

Ponieważ jednak

$$z_2 + z_5 + z_6 = -(z_4 + z_3 + z_1)$$
$$\nu_2 + \nu_5 + \nu_6 = -(\nu_4 + \nu_3 + \nu_1)$$

dlatego możemy zrównanie to napisać i tak

$$\frac{(z_4+z_3+z_1)(\nu_4+\nu_3+\nu_1)^2 - (\nu_4^2 z_4 + \nu_3^2 z_3 + \nu_1^2 z_7)}{(\nu_4+\nu_3+\nu_1)^3 - (\nu_4^3+\nu_3^3+\nu_1^3)} =$$
$$= \frac{(z_4+z_3+z_1)(\nu_4+\nu_3+\nu_1)^2 + (\nu_2^2 z_2 + \nu_5^2 z_5 + \nu_6^2 z_6)}{(\nu_4+\nu_3+\nu_1)^3 + (\nu_2^3+\nu_5^3+\nu_6^3)}$$

Zrównanie to jest sumą zrównań 1). Widzimy z niej iż będzie ona identycznie równą zero a więc promienie [12, 34, 56], [13, 46, 25], [14, 26, 35] będą się przecinały w jednym punkcie, jeżeli ilości z i ν będą spełniały zrównania

$$\nu_1^2 z_1 + \nu_2^2 z_2 + \nu_3^2 z_3 + \nu_4^2 z_4 + \nu_5^2 z_5 + \nu_6^2 z_6 = 0$$
$$\nu_1^3 + \nu_2^3 + \nu_3^3 + \nu_4^3 + \nu_5^3 + \nu_6^3 = 0 \qquad 2)$$

Pod tymi dwoma warunkami przejdę przez ten sam punkt, co łatwo moglibyśmy udowodnić, i promienie [15, 42, 36] i

[16, 54, 32] grupy I. Pod tymi samymi warunkami przetną się i promienie pięciu innych grup w pięciu punktach.

Przypuśćmy, że warunki 2) są spełnione, natenczas możemy udowodnić, iż 6 otrzymanych punktów leży na krzywej drugiego stopnia

$$\frac{z_1+z_2}{\nu_1+\nu_2}\cdot\frac{z_2+z_3}{\nu_2+\nu_3}+\frac{z_2+z_3}{\nu_2+\nu_3}\cdot\frac{z_3+z_1}{\nu_3+\nu_1}+\frac{z_3+z_1}{\nu_3+\nu_1}\cdot\frac{z_1+z_2}{\nu_1+\nu_2}=$$
$$=\frac{z_4+z_5}{\nu_4+\nu_5}\cdot\frac{z_5+z_6}{\nu_5+\nu_6}+\frac{z_5+z_6}{\nu_5+\nu_6}\cdot\frac{z_6+z_4}{\nu_6+\nu_4}+\frac{z_6+z_4}{\nu_6+\nu_4}\cdot\frac{z_4+z_5}{\nu_4+\nu_5} \qquad 3)$$

Albowiem współrzędne n p punkta I t. j. tego, który powstał przez przecięcie się promieni grupy I spełniają zrównania

$$\frac{z_1+z_2}{\nu_1+\nu_2}=\frac{z_5+z}{\nu_5+\nu},\quad \frac{z_2+z_3}{\nu_2+\nu_3}=\frac{z_4+z_5}{\nu_4+\nu_5},\quad \frac{z_3+z_1}{\nu_3+\nu_1}=\frac{z_6+z_4}{\nu_6+\nu_4}$$

spełnią więc i owe trzy zrównania, które wynikają z pomnożenia co dwóch powyższych zrównań, a więc spełnią i zrównanie wynikające przez dodanie trzech ostatnich t. j. spełnią zrównanie 3. Z poprzedzającego przeprowadzenia wynika, że zrównanie to można przedstawić i w kształcie

$$\frac{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)(z_1+z_2+z_3)^2-(\nu_1 z_1^2+\nu_2 z_2^2+\nu_3 z_3^2)}{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)^3-(\nu_1^3+\nu_2^3+\nu_3^3)}=$$
$$=\frac{(\nu_4+\nu_5+\nu_6)(z_4+z_5+z_6)^2-(\nu_4 z_4^2+\nu_5 z_5^2+\nu_6 z_6^2)}{(\nu_4+\nu_5+\nu_6)^3-(\nu_4^3+\nu_5^3+\nu_6^3)}$$

albo z uwzględnieniem zrównań 6 i 11 §. 9 tudzież zrównań 2 paragrafu niniejszego.

$$\frac{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)(z_1+z_2+z_3)^2-(\nu_1 z_1^2+\nu_2 z_2^2+\nu_3 z_3^2)}{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)^3-(\nu_1^3+\nu_2^3+\nu_3^3)}=$$
$$=\frac{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)(z_1+z_2+z_3)^2+(\nu_4 z_4^2+\nu_5 z_5^2+\nu_6 z_6^2)}{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)^3-(\nu_1^3+\nu_2^3+\nu_3^3)}$$

z czego wreście wynika

$$\nu_1 z_1^2+\nu_2 z_2^2+\nu_3 z_3^2+\nu_4 z_4^2+\nu_5 z_5^2+\nu_6 z_6^2=0 \qquad 4)$$

Ze względu na tę krzywę punkty Steinera sprzężone a więc takie jak (123) i (456) są biegunami sprzężonymi to znaczy, jeden leży na biegunowej drugiego. Wiadomo bowiem że, jeżeli dwa punkty Y i Z są sprzężonymi biegunami ze względu na dwie krzywe drugiego stopnia $\varphi(x_1\ x_2\ x_3)=0$ i $\psi(x_1\ x_2\ x_3)=0$, natenczas są one sprzężonymi biegunami i ze względu na każdą inną krzywą, której zrównanie jest $\varphi(x_1\ x_2\ x_3)+\lambda\,\psi(x_1\ x_2\ x_3)=0$ gdzie λ jest dowolną liczbą. Otóż możemy udowodnić, że punkta Steinera są sprzężonymi biegunami ze względu na krzywe

$$\frac{n_1}{\nu_1}z_1^2+\frac{n_2}{\nu_2}z_2^2+\frac{n_3}{\nu_3}z_3^2+\frac{n_4}{\nu_4}z_4^2+\frac{n_5}{\nu_5}z_5^2+\frac{n_6}{\nu_6}z_6^2=0 \qquad 5)$$

$$\frac{1}{\nu_1}z_1^2+\frac{1}{\nu_2}z_2^2+\frac{1}{\nu_3}z_3^2+\frac{1}{\nu_4}z_4^2+\frac{1}{\nu_5}z_5^2+\frac{1}{\nu_6}z_6^2=0 \qquad 6)$$

Szukajmy bowiem zrównania biegunowej punktu (123) ze względu na pierwszą krzywą. Punkt ten jest punktem przecięcia trzech linii Plückera.

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} z_1 & z_3 \\ \nu_1 & \nu_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix} = 0$$

Jeżeli we funkcye z_1, z_2, z_3 wstawimy współrzędne tego punktu, natenczas wartości dla tych funkcyj otrzymane muszą spełniać trzy powyższe zrównania. Naznaczmy wartość, jaką przybierze funkcya z_k, gdy się w nią wstawi współrzędne punkta (123) przez z'_k, to z kształtów powyższych trzech zrównań, które z'_1 z'_2 z'_3 spełniać muszą, widzimy, że musi być $z'_1 = \nu_1$ $z'_2 = \nu_2$ $z'_3 = \nu_3$. Wstawiając wartości te w zrównanie 5 i 6 §. 9. otrzymujemy

$$n_1 \nu_1 + n_2 \nu_2 + n_3 \nu_3 + n_4 z'_4 + n_5 z'_5 + n_6 z'_6 = 0$$
$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + z'_4 + z'_5 + z'_6 = 0$$

które na podstawie zrównań 9 i 11 §. 9 przechodzą w zrównania

$$\left.\begin{array}{l} n_4 (z'_4 - \nu_4) + n_5 (z'_5 - \nu_5) + n_6 (z'_6 - \nu_6) = 0 \\ (z'_4 - \nu_4) + (z'_5 - \nu_5) + (z'_6 - \nu_6) = 0 \end{array}\right\} \quad 7)$$

Naznaczywszy lewą stronę zrównania 5 przez $\varphi(z)$ otrzymamy na zrównanie biegunowej punktu (123) ze względu na tę krzywę

$$x_1 \left[\frac{d\varphi(z)}{\partial x_1}\right] + x_2 \left[\frac{d\varphi(z)}{\partial x_2}\right] + x_3 \left[\frac{d\varphi(z)}{\partial x_3}\right] = 0$$

gdzie nawiasy oznaczają, że w wyrazy te trzeba wstawić współrzędne punktu (123). Otóż

$$\left[\frac{\partial\varphi(z)}{\partial x_1}\right] = 2\left\{\frac{n_1}{\nu_1} z'_1 \frac{dz_1}{dx_1} + \frac{n_2}{\nu_2} z'_2 \frac{dz_2}{dx_1} + \ldots + \frac{n_6}{\nu_6} z'_6 \frac{dz_6}{dx_1}\right\}$$
$$\left[\frac{d\varphi(z)}{d x_2}\right] = 2\left\{\frac{n_1}{\nu_1} z'_1 \frac{dz_1}{dx_2} + \frac{n_2}{\nu_2} z'_2 \frac{dz_2}{dx_2} + \ldots + \frac{n_6}{\nu_6} z'_6 \frac{dz_1}{dx_1}\right\}$$
$$\left[\frac{d\varphi(z)}{d x^3}\right] = 2\left\{\frac{n_1}{\nu_1} z'_1 \frac{dz_1}{dx_3} + \frac{n_2}{\nu_2} z'_2 \frac{dz_2}{dx_3} + \ldots + \frac{n_6}{\nu_6} z'_6 \frac{dz_6}{dx_3}\right\}$$

W wyrazach tych jest każdy iloraz różniczkowy $\frac{dz_k}{dx_l}$ liczbą stałą, mianowicie współczynnikiem współrzędnej x_l w funkcyi z_k. Zrównanie biegunowej punktu (123) będzie więc, jeżeli całe zrównanie przez 2 podzielimy,

$$x_1 \sum_{r=1}^{r=6} \frac{n_r}{\nu_r} z'_r \frac{dz_r}{dx_r} + x_2 \sum_{r=1}^{r=6} \frac{n_r}{\nu_r} z'_r \frac{dz_r}{dx_r} = x_3 \sum_{r=1}^{r=6} \frac{n_r}{\nu_r} z'_r \frac{dz_r}{dx_3} = 0$$

$$\text{albo} \sum_{r=1}^{r=6} \frac{n_r}{\nu_r} z'_r \left(x_1 \frac{dz_r}{dx_1} + x_2 \frac{dz_r}{dx_2} + x_3 \frac{dz_r}{dx_3}\right) = 0$$

Według tego jednak cośmy wyżej powiedzieli o ilorazach $\frac{dz_k}{dx_l}$ widzimy że wyraz

$$x_1 \frac{dz_r}{dx_1} + x_2 \frac{dz_r}{dx_2} + x_3 \frac{dz_r}{dx_3} = z_r$$

Zrównanie zatem biegunowej punktu (123) jest więc

$$\sum_{r=1}^{r=6} \frac{n_r}{\nu_r} z'_r z_r = 0$$

z czego otrzymujemy, jeżeli za z'_1, z'_2, z'_3 podstawimy otrzymane wartości ν_1, ν_2, ν_3 i uwzględnimy że

$$n_1 z_1 + n_2 z_2 + n_3 z_3 = - n_4 z_4 - n_5 z_5 - n_6 z_6$$

$$\frac{n_4}{\nu_4} z_4 (z'_4 - \nu_4) + \frac{n_5}{\nu_5} z_5 (z'_5 - \nu_5) + \frac{n_6}{\nu_6} z_6 (z'_6 - \nu_6) = 0$$

Rugując z tego zrównania przy pomocy zrównań 7) ilości $z'_4 - \nu_4$, $z'_5 - \nu_5$, $z'_6 - \nu_6$ otrzymujemy jako zrównanie biegunowej punktu (123)

$$\begin{vmatrix} \frac{n_4}{\nu_4} z_4 & \frac{n_5}{\nu_5} z_5 & \frac{n_6}{\nu_6} z_6 \\ n_4 & n_5 & n_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

któremu zadość się uczyni, jeżeli w nie wstawimy $z_4 = \nu_4$ $z_5 = \nu_5$ $z_6 = \nu_6$ a więc jeżeli w nie wstawimy współrzędne punktu (456). Tak samo można udowodnić, że punkt (456) jest sprzężonym biegunem z punktem (123) ze względu na drugą krzywę 6). Biegunowa punktu (123) ze względu na tę krzywę ma zrównanie

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\nu_4} z_4 & \frac{1}{\nu_5} z_5 & \frac{1}{\nu_6} z_6 \\ n_4 & n_5 & n_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

któremu także czynią zadość $z_4 = \nu_4$ $z_5 = \nu_5$ $z_6 = \nu_6$. W skutek tego punkta te będą sprzężonymi biegunami i ze względu na każdą krzywę której zrównanie jest

$$\sum_{r=1}^{r=6} \frac{n_r}{\nu_r} z^2_r + \lambda \sum_{r=1}^{r=6} \frac{1}{\nu_r} z^2_r = 0 \quad \text{albo} \quad \sum_{r=1}^{r=6} \frac{n_r + \lambda}{\nu_r} z^2_r = 0$$

Dobrawszy jednak w tem zrównaniu λ tak, ażeby było $\frac{n_r + \lambda}{\nu_r} = \nu_r$ czyli ażeby było

$\lambda = \nu_1{}^2 - n_1 \quad \lambda = \lambda_2{}^2 - n_2 \quad \lambda = \nu_3{}^2 - n_3 \quad .\ .\ \lambda = \nu_6{}^2 - n_6$
czyli

$$6\lambda = \nu_1{}^2 + \nu_2{}^2 + - - \nu_6{}^2 - (n_1 + n_2 + \ldots n_6)$$

a więc

$$\lambda = \frac{1}{6}(\nu_1{}^2 + \nu_2{}^2 + \ldots + \nu_6{}^2),$$

gdyż $n_1 + n_2 + \ldots + n_6 = 0$, otrzymamy zrównanie

$$\sum_{r=1}^{r=6} \nu_r z^2{}_r = 0$$

a więc zrównanie 4).

§. 13.

Przypadek $9 = -2$ nastręcza twierdzeniom wyprowadzonym w paragrafach poprzednich odwrotne twierdzenia. Zrównania jednego z punktów Brianchona byłoby

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad 1)$$

albo $\dfrac{w_1 + w_2}{n_1 + n_2} = \dfrac{w_1 + w_3}{n_1 + n_3} = \dfrac{w_2 + w_3}{n_2 - n_3}$

a więc zrównania odpowiedne zrównaniom 1, 2, 3, 4 § 11. Gdybyśmy ten system uważali jako system Pascala natenczas punkt ten Brianchona byłby punktem Kirkmanna [1, 4 5 6.] Albowiem jakeśmy poprzednio pokazali promienie Pascala

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_4 & y_5 \\ \delta_1 & \delta_4 & \delta_5 \\ \beta_1 + \lambda_1 & \beta_4 & \beta_5 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_5 & y_6 \\ \delta_1 & \delta_5 & \delta_6 \\ \beta_1 + \lambda_1 & \beta_5 & \beta_6 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_4 & y_6 \\ \delta_1 & \delta_4 & \delta_6 \\ \beta_1 + \lambda_1 & \beta_4 & \beta_6 \end{vmatrix} = 0$$

przecinają się w punkcie Kirkmanna [1λ₁, 456], którego zrównanie było

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ b_1 + l_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

gdzie $l_1\ \lambda_1 = k$. Kładąc więc tu zamiast $y, v, \delta, d, \beta, b$ ilości $z, w, \nu, n, 1\ 1\ l_1 = q = -2 \quad k = 6$ a więc $\lambda_1 = -3$, otrzymamy dla punktu tego zrównanie 1) a dla promieni Pascala w niem się przecinających zrównania

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_4 & z_5 \\ \nu_1 & \nu_4 & \nu_5 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} z_1 & z_5 & z_6 \\ \nu_1 & \nu_5 & \nu_6 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} z_1 & z_4 & z_6 \\ \nu_1 & \nu_4 & \nu_6 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ponieważ jednak

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_4 & z_5 \\ \nu_1 & \nu_4 & \nu_5 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 + z_1 + z_5 & z_4 - z_5 & z_5 \\ \nu_1 + \nu_4 + \nu_5 & \nu_1 - \nu_5 & \nu_5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (z_1 + z_4 + z_5)(\nu_1 - \nu_5) - (z_4 - z_5)(\nu_1 + \nu_4 + \nu_5),$$

przeto zrównania tych promieni można napisać w kształcie

$$\frac{z_1 + z_4 + z_5}{\nu_1 + \nu_4 + \nu_5} = \frac{z_4 - z_5}{\nu_4 - \nu_5}, \quad \frac{z_1 + z_5 + z_6}{\nu_1 + \nu_5 + \nu_6} = \frac{z_5 - z_6}{\nu_5 - \nu_6},$$

$$\frac{z_1 + z_4 + z_6}{\nu_1 + \nu_4 + \nu_6} = \frac{z_4 - z_6}{\nu_4 - \nu_6} \qquad 2)$$

Otrzymujemy tu piętnaście punktów, których zrównania są kształtu

$$\frac{w_1 + w_2}{n_1 + n_2} = \frac{w_3 + w_4}{n_3 + n_4} = \frac{w_5 + w_6}{n_5 + n_6} \qquad 3)$$

a które odpowiadają piętnastu promieniom poprzedzających paragrafów.

Symbol więc dla punktu 3) będzie stosownie (12, 34, 56). Wziąwszy trzy punkty, których symbole mają tę samą dwójkę n. p.

(34, 26, 15), (34, 21, 65), (34, 25, 61)

i utworzywszy z nich inną grupę przez przemianę n p. indeksów 4 i 1 a więc grupę

(31, 26, 45), (31, 24, 65), (31, 25, 64)

połączmy co dwa stojące pod sobą punkty promieniem. Trzy otrzymane w ten sposób promienie będą przechodziły przez ten sam punkt Brianchona, który jeżeli ten system będziemy uważali jako system Pascala, będzie punktem Kirkmanna (3, 156). Zrównania bowiem sześciu owych punktów są

$$\frac{w_3+w_4}{n_3+n_4} - \frac{w_2+w_6}{n_2+n_6} = 0 \quad \frac{w_3+w_4}{n_3+n_4} - \frac{w_5+w_6}{n_5+n_6} = 0 \quad \frac{w_3+w_4}{n_3+n_4} - \frac{w_2+w_5}{n_2+n_5} = 0$$

$$\frac{w_2+w_6}{n_2+n_6} - \frac{w_1+w_3}{n_1+n_3} = 0 \quad \frac{w_5+w_6}{n_5+n_6} - \frac{w_1+w_3}{n_1+n_3} = 0 \quad \frac{w_2+w_5}{n_2+n_5} - \frac{w_1+w_3}{n_1+n_3} = 0 \qquad 4)$$

zrównanie zaś punktu Kirkmanna [3, 256] jest

$$\frac{w_1 + w_3}{n_1 + n_3} - \frac{w_3 + w_4}{n_3 + n_4} = 0 \qquad 5)$$

Otóż jeżeli lewą stronę tego zrównania dodamy do sumy lewych stron co dwóch zrównań poprzedzających stojących pod sobą, natenczas otrzymamy zawsze sumę identycznie równą zero. To pokazuje, że trzy powyższe promienie przechodzą przez punkt Kirkmanna [3, 256]. Wyszukajmy zrownania tych promieni.

Jak z poprzedzającego wiadomo, punkt ten leży na promieniu Calaya [256], którego zrównanie jest

$$\begin{vmatrix} z_2 & z_5 & z_6 \\ \nu_2 & \nu_5 & \nu_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad 6)$$

albo ponieważ wyznacznik

$$\begin{vmatrix} z_2 & z_5 & z_6 \\ \nu_2 & \nu_5 & \nu_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_2 - z_5 & z_5 - z_6 & z_6 \\ \nu_2 - \nu_5 & \nu_5 - \nu_6 & \nu_6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (z_2 - z_5)(\nu_5 - \nu_6) - (z_5 - z_6)(\nu_2 - \nu_5)$$

przeto zrównanie promienia Calaya [256] można napisać w kształcie

$$\frac{z_2 - z_5}{y_2 - y_5} - \frac{z_5 - z_6}{y_5 - y_6} = 0 \qquad 7)$$

Z powyższego wyznacznika 6) możnaby jednak jeszcze i te dwa kształty wyprowadzić

$$\frac{z_2 - z_6}{y_2 - y_6} - \frac{z_5 - z_6}{y_5 - y_6} = 0 \quad \frac{z_2 - z_5}{y_2 - y_5} - \frac{z_2 - z_6}{y_2 - y_6} \qquad 8)$$

Przez punkt Kirkmanna [3, 256] przechodzą jednak i promienie Pascala, których zrównania są

$$\frac{z_3 + z_2 + z_5}{y_3 + y_2 + y_5} = \frac{z_2 - z_5}{y_2 - y_5}, \quad \frac{z_3 + z_2 + z_6}{y_3 + y_2 + y_6} = \frac{z_2 - z_6}{y_2 - y_6}, \qquad 9)$$

$$\frac{z_3 + z_5 + z_6}{y_3 + y_5 + y_6} = \frac{z_5 - z_6}{y_5 - y_6}$$

Współrzędne punktu Kirkmanna [3, 256] spełniają więc i zrównanie promienia Calaya [256] i każde z trzech powyższych zrównań 9, spełnią więc i trzy owe zrównania, które otrzymamy tworząc różnicę co dwóch zrównań 9) a więc zrównanie

$$\frac{z_3 + z_2 + z_5}{y_3 + y_2 + y_5} - \frac{z_3 + z_2 + z_6}{y_3 + y_2 + y_6} = \frac{z_2 - z_5}{y_2 - y_5} - \frac{z_2 - z_6}{y_2 - y_6}$$

$$\frac{z_3 + z_2 + z_6}{y_3 + y_2 + y_6} - \frac{z_3 + z_5 + z_6}{y_3 + y_5 + y_6} = \frac{z_2 - z_6}{y_2 - y_6} - \frac{z_5 - z_6}{y_5 - y_6}$$

$$\frac{z_3 + z_5 + z_6}{y_3 + y_5 + y_6} - \frac{z_3 + z_2 + z_5}{y_3 + y_2 + y_5} = \frac{z_5 + z_6}{y_5 + y_6} - \frac{z_2 - z_5}{y_2 - y_5}$$

Ale prawe strony tych zrównań są równe zero, jeżeli w nie wstawimy współrzędne punktu [3, 256] gdyż to są lewe strony zrównań linii Calaya [256], zatem i lewe strony tych zrównań będą zawsze zero, jeżeli w nie wstawimy współrzędne punktu [3, 256] innymi słowy w punkcie [3, 256] przecinają się promienie, których zrównania są

$$\frac{z_3 + z_2 + z_5}{y_3 + y_2 + y_5} - \frac{z_3 + z_2 + z_6}{y_3 + y_2 + y_6} = 0,$$

$$\frac{z_3 + z_2 + z_6}{y_3 + y_2 + y_6} - \frac{z_3 + z_5 + z_6}{y_3 + y_5 + y_6} = 0, \qquad 10)$$

$$\frac{z_3 + z_5 + z_6}{y_3 + y_5 + y_6} - \frac{z_3 + z_2 + z_5}{y_3 + y_2 + y_5} = 0$$

Weźmy na uwagę promień trzeci, przechodzi on przez punkt Kirkmanna [3, 256], z kształtu tego zrównania wynika, że promień ten przechodzi także i przez punkt Kirkmanna [5, 236]. Jeżeli zaś uwzględnimy, że

$$(z_3 + z_5 + z_6) = -(z_1 + z_2 + z_4) \; (z_3 + z_2 + z_5) = -(z_1 + z_4 + z_6)$$
$$(y_3 + y_5 + y_6) = -(y_1 + y_2 + y_4) \; (y_3 + y_2 + y_5) = -(y_1 + y_4 + y_6)$$

natenczas zrównanie tego promienia będzie można napisać i w kształcie

$$\frac{z_1 + z_2 + z_4}{y_1 + y_2 + y_4} - \frac{z_1 + z_4 + z_6}{y_1 + y_4 + y_6} = 0 \qquad 11)$$

a z tego kształtu wynika, iż promień ten przechodzi i przez punkty Kirkmanna [1, 246] i [4, 126].

Na promieniu więc, którego zrównanie jest trzecie ze zrównań 10) albo zrównanie 11) leżą punkty Kirkmanna [3, 256], [5, 326], [1, 246], [4, 126]. Łatwo możemy udowodnić, że jest to promień, który łączy punkty (34, 26, 15) i (31, 26, 45). Jużeśmy bowiem poprzednio udowodnili, że na promieniu tym leży punkt [3, 256]. Zrównania powyższych punktów są to pierwsze zrównania ze zrównań 4). Można je jednak napisać i w kształcie

$$\frac{w_2 + w_6}{n_2 + n_6} = \frac{w_1 + w_3}{n_1 + n_3}, \quad \frac{w_4 + w_5}{n_4 + n_5} = \frac{w_2 + w_6}{n_2 + n_6}$$

Jeżeli do sumy tych zrównań dodamy zrównanie punktu Kirkmanna [5, 326] to jest zrównanie

$$\frac{w_1 + w_3}{n_1 + n_3} = \frac{w_4 + w_5}{n_4 + n_5}$$

natenczas otrzymamy sumę identycznie równą zero, co dowodzi, że na promieniu łączącym dwa powyższe punkty leży i punkt [5, 326]. Trzecie ze zrównań 10 jest więc zrównaniem promienia łączącego punkty (34, 26, 15) i (31, 26, 45). Promień ten przechodzi przez punkt Kirkmanna [3, 256], w którym się przecinają trzy promienie; zrównania tych trzech promieni są zrównania 10); na każdym z tych promieni leżą cztery punkty Brianchona czyli Kirkmanna.

Wszystkich promieni łączących co dwa z owych piętnastu punktów jest 105. Z pomiędzy nich 45 przechodzi przez punkty Brianchona, albowiem przez każdy punkt przechodzą 3 z tych promieni, ale na każdym leżą cztery punkty, wszystkich więc promieni jest $\frac{60 \,.\, 3}{4} = 45$. Pozostałych 60 promieni tworzy boki sześćdziesięciu sześcioboków Brianchona.

Pod warunkiem, że funkcye w i ilości n wypełniają zrównania

$$n_1^{\,2}\, w_1 + n_2^{\,2}\, w_2 + \ldots + n_6^{\,2}\, w_6 = 0$$
$$n_1^{\,3} + n_2^{\,3} + \ldots + n_6^{\,3} = 0$$

sześćdziesiąt tych promieni zamieni się w 6, osłaniających krzywę drugiej klasy

$$n_1\, w_1^{\,2} + n_2\, w_2^{\,2} + \ldots + n_6\, w_6^{\,2} = 0.$$

(*Dokończenie nastąpi.*)

Część ta opracowana jest głównie na podstawie rozprawy: „Neue Beiträge zur Theorie des Pascalischen Sechseckes von Otto Dziobek."

WIADOMOŚCI SZKOLNE.

Wiadomości szkolne.

I. Skład grona nauczycieli przy końcu roku szkolnego 1892.

A. Nauczyciele przedmiotów obowiązkowych:

1. *Aleksander Borkowski*, dyrektor gimnazyum, zastępca przewodniczącego Rady szkolnej okręgowej, członek rady miejskiej, uczył języka greckiego i ruskiego w kl. IV. — 7 godzin tygodniowo.
2. *Julian Lizak*, profesor, uczył matematyki w kl. Ia., Ib., II., IIIa., IIIb., V., razem 19 godz. tygodniowo.
3. *Tomasz Gawenda*, profesor, doktor filozofii, członek rady miejskiej i rady powiatowej, przewodniczący Rady szkolnej miejscowej, uczył jęz. niemieckiego w kl. IIIb. i IV., geografii i historyi w kl. IIIb. i IV., propedeutyki filozoficznej w kl. VII. i VIII, razem 19 godzin tygodniowo; także historyi krajowej jako przedmiotu nadobowiązkowego w kl. IIIb. i IV. przez 2 godz. tygodniowo.
4. *Włodzimierz Pasławski*, profesor, gospodarz klasy IIIa., zawiadowca czytelni ruskiej dla młodzieży, uczył języka łacińskiego i greckiego w kl. IIIa., ruskiego w kl. V., VI., VII. i VIII., razem 19 godzin tygodniowo.
5. *Stanisław Bednarski*, profesor, gospodarz klasy VIII., uczył języka łacińskiego w kl. VIII., greckiego w kl. V. VII. i VIII. razem 19 godz. tyg.
6. *Zygmunt Kunstmann*, profesor, kierownik uzupełniającej szkoły przemysłowej, uczył jęz. niemieckiego w kl. Ia., Ib. i IIIa., razem 16 godzin tygod.
7. *Karol Kobierski*, profesor, gospodarz klasy VI., zawiadowca biblioteki nauczycielskiej, uczył jęz. łacińskiego w kl. IV. i VI., greckiego w kl. VI., — razem 17 godzin tygodniowo; nadto kaligrafii w niższem gimnazyum po 2 godziny tyg.
8. *Antoni Pado*, profesor, gospodarz klasy Ib., uczył jęz. łacińskiego w kl. Ib. i V., polskiego w Ib., razem 17 godzin tyg.
9. *Franciszek Zych*, nauczyciel, gospodarz klasy V., członek rady miejskiej, uczył języka polskiego w kl. IIIa. i V., geografii i historyi w kl. V., VI., VII. i VIII., razem 19 godzin tygod.; także historyi krajowej jako przedmiotu nadobowiązkowego w kl. VII. przez 1 godz. tygod.

10. *Józef Przybylski*, nauczyciel, zawiadowca gabinetu przyrodniczego, uczył historyi naturalnej w kl. Ia., Ib., II., IIIa., IIIb., V. i VI., języka polskiego w kl. II. i IV., razem 20 godzin tygodniowo.
11. ***Roman Moskwa***, nauczyciel, gospodarz klasy IV., zawiadowca gabinetu fizykalnego, uczył matematyki w kl. IV., VI., VII. i VIII., fizyki w kl. IV., VII. i VIII., razem 20 godzin tygod.
12. ***Ks. Ambroży Polański***, nauczyciel religii dla uczniów obrz. gr. kat., uczył religii w kl. Iab., II., IIIab. — VIII., razem 16 godzin tygod.
13. ***Emil Bernhardt***, nauczyciel, zawiadowca zbiorów dla nauki rysunków, uczył rysunków odręcznych w kl. Ia., Ib., IIa., IIb., IIIa., IIIb. i IV., razem 28 godzin tygodn.; oprócz tego geometryi wykreślnej jako przedmiotu nadobowiązkowego przez 1½ godziny tygod.
14. ***Józef Staromiejski***, nauczyciel, gospodarz klasy VII., zawiadowca czytelni polskiej dla młodzieży i wypożyczalni dla ubogich uczniów, uczył języka łacińskiego w kl. VII. i polskiego w kl. IIIc., VI., VII. i VIII., razem 17 godzin tygod.
15. ***Ks. Bronisław Karakulski***, dr. teologii, nauczyciel religii dla uczniów obrz. rz. kat., uczył religii w kl. Iab., II., IIIab. — VIII., razem 16 godzin tygodn.
16. ***Kazimierz Grünberg***, egzam. zastępca nauczyciela, gospodarz klasy II., uczył języka niemieckiego w II., geografii w Ia., Ib., geogr. i historyi w kl. II. i IIIa., razem 18 godz. tyg.; oprócz tego historyi kraju rodzinnego jako przedmiotu nadobowiązkowego w kl. IIIa. przez 1 godzinę tygodn.
17. ***Piotr Rzepnicki***, zastępca nauczyciela, gospodarz klasy IIIb., uczył języka łac. i greckiego w kl. IIIb., ruskiegò w kl. Iab., II. i IIIab., razem 17 godzin tygod.
18. ***Aleksander Frączkiewicz***, egzam. zastępca nauczyciela, gospodarz klasy Ia., uczył jęz. łacińskiego w kl. Ia. i II., polskiego w kl. Ia., razem 19 godzin tygodniowo.
19. ***Piotr Christof***, zastępca nauczyciela, zawiadowca niemieckiej czytelni dla młodzieży, uczył języka niemieckiego w kl. V., VI., VII. i VIII., razem 16 godzin tygodniowo.

B. Nauczyciel poboczny:

Joachim Blumenblatt, uczył religii mojżeszowej w 8 oddziałach przez 8 godzin tygodniowo.

C. Nauczyciele przedmiotów nadobowiązkowych:

1. ***Maurycy Klugmann***, uczył języka francuskiego w 3 oddziałach przez 6 godzin tygodniowo.
2. ***Bazyli Stojałowski***, nauczyciel szkoły ludowej, uczył gimnastyki w 2 oddziałach przez 6 godzin tyg.
3. ***Włodzimierz Buczacki***, nauczyciel szkoły ludowej, uczył śpiewu w 4 oddziałach przez 4 godziny tygodniowo.

Zmiany w gronie nauczycieli
w ciągu roku szkolnego 1892.

1. Reskryptem z d. 24. czerwca 1891 l. 3467 nadał JExc. P. Minister W. i O. profesorowi *Antoniemu Stefanowiczowi* posadę nauczyciela przy c. k. szkole realnej w Stanisławowie, a zamianował zastępcę nauczyciela c. k. szkoły realnej w Stanisławowie *Emila Bernhardta* rzeczywistym nauczycielem w c. k. gimnazyum w Drohobyczu.
2. Reskryptem z d. 24. czerwca 1891 l. 11961 nadał JExc. Pan Minister W. i O. profesorowi *Sebastyanowi Polakowi* posadę nauczycielską w c. k. gimnazym św. Jacka w Krakowie, a zamianował zastępcę nauczyciela w c. k. gimnazyum Franciszka Józefa we Lwowie *Józefa Staromiejskiego* rzeczywistym nauczycielem w c. k. gimnazyum w Drohobyczu.
3. Reskryptem z d. 21. sierpnia 1891 l. 16.796 zamianował JExc. Pan Minister W. i O. ks. d-ra *Bronisława Karakulskiego*, kanclerza biskupiego w Przemyślu, rzeczywistym nauczycielem religii rzym. kat. w c. k. gimnazyum w Drohobyczu.
4. Reskryptem z d. 10. października 1891 l. 18605 przyznała Wys. c. k. Rada szk. kr. profesorowi *Karolowi Kobierskiemu* pierwszy dodatek pięcioletni począwszy od 1. września 1891.

II. Plan nauki.

Nauka odbywała się według planu naukowego z roku 1884, uzupełnionego rozporządzeniem JExc. Pana Ministra wyznań i oświaty z dnia 30. września 1891 do l. 1786 z tą różnicą, że języka niemieckiego uczono w I. klasie 6, w II. 5 godzin, a od III. — VIII. po 4 godziny tygodniowo i że nauka rysunków odręcznych była jako w c. k. gimnazyum realnem w 4 niższych klasach obowiązkową. Tej mianowicie nauki udzielano w I., II. i IV. klasie według nowych planów i instrukcyi, wydanych rozporządzeniem JExc. Pana Ministra wyznań i oświaty z d. 17. czerwca 1891 do l. 9193, zaś w klasie III. według dawnego planu z roku 1873 i instrukcyi z roku 1874. Wreszcie w klasie II., która mimo znacznej liczby uczniów dla braku umieszczenia nie mogła być podzieloną, odbywała się nauka rysunków w dwóch oddziałach.

Poniżej podaje się wykaz lektury łacińskiej, greckiej i niemieckiej, przerobionej w wyższych klasach. Lektura polska i ruska postępowała według przepisanych wypisów.

Lektura łacińska.

IV. kl.	Caesar de bello Gall. I. IV. VI. — Ovid. Trist. IV. 10.
V. kl.	Liv. I. c. 1. - 50., XXI. c. 1.—30. — Ovid. Metam. I. 89 — 451, II. 1. 325., Fast. II. 83—118., Trist. IV. 10.

VI. kl. Sallust. de bello Jugurt. — Cicer. orat. in Catil. I. — Vergil. Ecl. I., Laudes Italiae, Laudes vitae rusticae, Aen. I.

VII. kl. Cicer. or. pro Murena, Laelius. — Vergil. Aen. VI.

VIII. kl. Horat. Carm. I. 1. 3. 4. 7. 9. 11. 37. II. 2. 3. 7. 10. 14. 16. 18. III. 1. 13. 16. 29. 30. IV. 7. 12. Epod. 7. Epist. I. 10. II. 2. Sat. I. 6. — Tacit. Germ. c. 1. — 27, Annal. I c. 1—15, 16—49, 55—42. Hist. IV. 12—37.

Lektura grecka.

V. kl. Xenoph. Anab. I. 1; 2. 1—5; I, 3; I, 4, 1—4; 5—9; 11—19; I. 6; I, 7; I, 8; I, 9; III, 1. Cyrop. VIII. 7, 1—28. — Homer. Il. I.

VI. kl. Homer. Il. I. XVI. XXIV. — Herod. VII. 1—87. — Xenoph. Memorab. Herkules na rozstajnej drodze; Apolog. 1—10.

VII. kl. Demost. Olynt. I. II. — Homer. Odys. I. VIII. IX. X.

VIII. kl. Plat. Apol. Crit. — Sophocl. Ajas.

Lektura niemiecka.

VI. kl. Minna von Barnhelm. Emilia Galotti, Hamburg. Dramaturgie, Cid.

VII. kl. Götz von Berlichingen, Hermann und Dorothea, Egmont, Iphigenie, Tasso.

VIII. kl. Maria Stuart, Wallenstein, Jungfrau von Orleans, Braut von Messina. Faust, Wilhelm Tell.

Nauka religii mojżeszowej.

Nauki tego przedmiotu udzielano w każdej klasie po jednej godzinie tygodniowo.

I. kl. a) Religia: O religii w ogólności, o objawionej religii mojżeszowej, o artykułach wiary, o powinnościach wynikających z nauki poznania Boga w ogólności Miłość Boga i bliźniego, posłuszeństwo, wiara w opatrzność Boga.

b) Historya biblijna: Dobrodziejstwa Boga wyświadczone Izraelitom przez Mojżesza, upór i nieposłuszeństwo Izraelitów, czyny Mojżesza, Jozuego, Sędziów i Samuela; król Saul, Dawid, Salamon, powody rozpadku Palestyny.

c) Tłómaczenie: Jozue rozdz. 24., księga Sędziów rozdz. 9.

II. kl. a) Religia: Skład, podział i wartość pisma św.; ogólna treść ksiąg bibl. działu I. II. i III.; 6 artykułów wiary odnoszących się do mozaizmu, wiara w Boga, znaczenie Mesyasza, o zmartwychwstaniu umarłych, o wewnętrznej i zewnętrznej czci Boga w ogólności i szczególności.

b) Historya bibl.: Powody i skutki rozpadku Palestyny na dwa udzielne państwa; o królach państwa Izraela, stan

moralny tegoż, o prorokach Eliaha i Elis. Państwo Judy, powody jego zburzenia, o Danielu.
c) Tłómaczenie: Samuel rozdz. 24., 26., 1. i 7.

III. kl. a) Religia: Forma służby bożej od czasów Mojżesza i świątyni I. do teraz; treść wszystkich modlitw, tłómaczenie najważniejszych modlitw codziennych. Święta religijne, historyczne pomojżeszowe, posty.
b) Hist. bibl.: Stan żydów uprowadzonych do Babilionii do założenia nowej gminy w Palestynie; o Danielu, Ezdraszu i Nehemijaszu; Samarytanie i ich stosunek do nowej kolonii żydowskiej. Od Heroda do zburzenia Jerozolimy przez Tytusa.
c) Tłómaczenie: Król. I rozdz. 8., 12., 17. i 21.

IV. kl. a) Religia: Podział i znaczenie świąt historyczno-religijnych, czysto religijnych, pomojżeszowych i soboty w szczególności. Obrzędy, ceremonie, prawo potraw według biblii i tałmudu.
b) Hist. bibl.: Podział całego prawa relig. na pisane i tradycyjne; wartość moralna całego prawa. Krótki rys stanu żydów za czasu świętyni II., założenie synedryum I. i jego działania; szkoły żyd. do VII. wieku. Rozwój historyi literatury relig. w szkołach hiszpańskich, francuskich, niemieckich i polskich w ogólnym zarysie.
c) Tłómaczenie; Król. II. rozdz. 4. 5. 6. i 7.

V. kl. a) Religia i hist.: Pogląd ogólny na stan żydów od Mojżesza. Powody, cel i skutki założenia świątyni I. i II. na tle proroctw Mojżesza, Jezajasza i Jeremijasza; powody i skutki zburzenia tychże; znaczenie i dążność praw zaprowadzonych przez synedryum; wytworzenie się partyi Helenistów, później Faryzeuszów i Saduceuszów; Septuaginta i świątynia w Egipcie. Szkoły tałmud. za panowania ces. Augusta i Tyberyusza.
b) Tłómaczenie: Psalmy 8. 15. 19. 21. 23. 90. 91. 99. 104. 124.

VI. kl. a) Religia i hist.: Herod, jego życiorys, stosunek do żydów i państwa rzymskiego; powody i skutki nienawiści między Grekami i Rzymianami a żydami; Kaligula. Filon i Apion; powody i skutki powstania żydów za Nerona; Wespazyan, Tytus, Josephus Flavius; cel i dążność praw Synedryum tej epoki. Miszna co do treści, wartości naukowej i moralnej.
b) Tłómaczenie: Przypowieści Salomona 1. 2. 3. 4. 6. 14.

VII. kl. a) Religia i hist.: Tałmud, jego podział, treść, wartość moralna i zastosowania do obecnych stosunków, jego wpływ do dziś dnia. Mahomet, żydzi, szkoły. Forma i ustrój gmin żyd. szczególnie na Oryencie do VII. wieku. Życiorys i treść

dzieł rabinów: Saadja Emunot W'deol, Salomon bn Jehuda. Bachja, Jehuda Halewi Kuzari, Ibn Ezra.
b) Tłómaczenie: Jerem. rozdz. 1. 5. 14.; Ech. rozdz. 1. 2. 3. 4.

VIII. kl. a) Religia i hist.: Ogólne zapatrywanie na moralny stan żydów na wschodzie i zachodzie do pierwszej połowy XII. wieku. Okres rabinów; Maimuni, jego życiorys, wartość jego komentarza do talmudu; treść i dążność jego dzieła p. t. More nebuchim; skutki i wpływ jego pism; kabaliści i tałmudziści przeciw maimunistów. Życiorys i treść dzieł autorów kabal. Józef Kara Szulchan Aruch Mendelsohn; Chasydyzm i tałmudyzm w Polsce.
b) Tłómaczenie: Jezaj. rozdz. 1. 5. 11. 14. 31. 47.

Przedmioty nadobowiązkowej nauki.

Historya kraju rodzinnego. Naukę tę wykładano w klasie III, IV. i VII po jednej godzinie tygodniowo według planu poleconego przez Wysokie Władzy szkolne.

Geometrya wykreślna. Nauka ta odbywała się raz na tydzień po $1^1/_2$ godziny. Na podstawie podręcznika i atlasu dra Łazarskiego przerobiono materyał przeznaczony na V. klasę szkoły realnej.

Kaligrafia w 2 oddziałach przez 2 godz. tyg. Ćwiczenia w piśmie łacińskiem i gotyckiem z ciągłem uwzględnieniem prawidłowego sposobu siedzenia i kierowania ręką w czasie pisania.

Język francuski w 3 oddziałach po 2 godziny tygodn. W I. oddziale uczono wymawiania wyrazów, dalej form prawidłowych imion i czasowników Na każdą lekcyę zadania domowe, co miesiąc dwa szkolne — W II oddziale uczono nieforemności wszystkich części mowy, znaczenia i używania czasów i trybu łącznego, jakoteż galicyzmów. Zadania jak w I. oddziale. — W III. oddziale uczono składni rządu, użycia trybu bezokolicznego i imiesłowów; prowadzono konwersacyę na podstawie lektury. Zadania jak w I. oddziale. — Używano w I. i II. oddziale gramatyki Ciechomskiego; w III. nadto wypisów Amborskiego.

Gimnastyka w 2 oddziałach przez 6 godz. tyg. I. Oddział Ćwiczenia wolne w postawie, postawy, ćwiczenia ramion, tułowia, nóg, kombinacye powyższych ćwiczeń; łączenia ćwiczeń wolnych, ruchy podwójne, potrójne. Ćwiczenia wolne postępowe: Postawy, łączenie ćwiczeń wolnych z ćwiczeniami postępowemi. Musztra. Ćwiczenia jednostek, uszykowanie, wyjaśnienie rozkazów, rozstęp; ćwiczenia na miejscu: postawa, zwroty głowy, obroty ciała, chód i bieg i w miejscu. II. Oddział. Musztra. Ćwiczenia rzędu; rząd czelny, boczny, skośny, obroty jednostek, dwójek; pochody biegi, zmiany pochodów; ćwiczenia plutonu, dwurząd obrócony, skośny, dwuszereg, czwórki; ćwiczenia oddziału: szyk obrócony, dwuszereg, czwórki, kolumna, zmiany ustawień. Ćwiczenia na przyrządach a to na koniu, kozle, poręczkach, drabinach, drążku, kółkach i żerdzi.

Śpiew w 4 oddziałach po godzinie tygodniowo. Dwie godziny tygodniowo przeznaczono na naukę teoryi, a dwie na naukę śpiewu choralnego. Naukę teoryi podzielono na dwa oddziały. — W niższym uczono: o głosie, o systemie tonalnym, o piśmie muzycznem, o kluczach, o przenośnikach muzycznych, o stopniach i odległościach, o trybach, tonacyach, skalach dur i mol, o wartości dźwięków, o pauzach, rozmaitych ułatwieniach w pisowni nut, o pojedyńczym i podwójnym punkcie, o mierzeniu taktu. Ćwiczenia w trafianiu pojedyńczych tonów, sekund, tercyi i kwart na jeden i na dwa głosy.

W oddz. wyższym uczono: o skalach i tworzeniu takowych, o pokrewieństwie tonacyi; o mierzeniu taktu, o takcie pojedyńczym parzystym, złożonym parzystym i nieparzystym, o synkopach i przedtakcie o fermacie i innych przerwach w regularności tempa, o przednutkach i międzynutkach, o grupecie, trylu, o akordach, gamie, o fałszywym ruchu głosów i rozwiązywaniu akordów. Ćwiczenia w trafianiu kwart, kwint, sekst i septym na jeden i na dwa głosy; ćwiczenia w śpiewie.

Naukę śpiewu choralnego podzielono na dwa oddziały. W jednym uczono śpiewu kościelnego, a w drugim cerkiewnego.

III. Tematy do wypracowań piśmiennych

a) w języku polskim.

W V. klasie:

1) Opisać najpiękniejszy widok, podziwiany w ciągu wakacyi. (dom.)
2) Bielany. Opis na podstawie lektury szkolnej. (szk.)
3) Jakich argumentów używa Rymwid, aby Litawora odwieść od zdrady? (dom.)
4) Zasługi Fenicyan jako krzewicieli oświaty w starożytności. (szkol.)
5) Bitwa Litwinów z Krzyżakami (na podstawie Grażyny). (szk.)
6) Rynek drohobycki w dniu targowym. (dom.)
7) Igrzyska olimpijskie. (szk.)
8) Skutki wojny peloponeskiej. (dom.)
9) Pożegnanie Hektora z Andromachą. (szk.)
10) Dwór w Soplicowie — podług P. Tadeusza. (szk.)
11) Niedźwiedź „Mospanie“ — podług P. Tadeusza. (dom.)

12) Treść „Wiesława". (dom.)
13) Treść wiersza A. Asnyka p. t. „Echo Kołyski". (szk.)
14) Ogród gimnazyalny. (opis).

Franciszek Zych.

W VI. klasie:

1) Pory roku a życie człowieka. Porówn. (dom.)
2) Na czem polega spokojny żywot a kłopotliwy? (Na podst. Reja) (szk.)
3) Porównać Cezara z Pompejuszem. (dom.)
4) Jakimi przymiotami powinien się odznaczać dworzanin polski? (wedle Górnickiego).
5) Aleksander Wielki a Hannibal. (dom.)
6) Streścić Jana Kochanowskiego tren XIX. (szk.)
7) Przyjemności i zabawy młodzieży w czasie zimy. (dom.)
8) Zdać sprawę z siel. Zimorowicza p. t. Trużenicy (szkol.)
9) Co jest cenniejsze: bogactwo czy wiedza? (dom.)
10) Przedstawić rozwój zapatrywań polit. od Jana Kazimierza do Stanisława Aug. (na podstawie nauki szkolnej).

W VII. klasie.

1) Gutta cavat lapidem. (dom.)
2) Na jakie wady uderza Opaliński w sat. pod tyt: „Na tych, co się sobie mądrymi zdadzą"?
3) Jesień, jej przyjemności i przykrości. (dom.)
4) Jakich przestróg udziela młodemu Krasicki w sat. VII.?
5) O ile położenie Grecyi przyczyniło się do jej rozwoju i oświaty? (dom.)
6) Stosunki literackie za Naruszewicza. (Na podstawie sat. Chudy literat).
7) Wynalazek druku i jego znaczenie. (dom.)
8) Opis piekła wedle Wergiliusa Eneidy.
9) Wyjaśnić i uzasadnić przysłowie: Nulla virtus nisi in certamine (dom.)
10) Główne cechy okresu Stanisława Aug. (Na podstawie nauki szkolnej),

W VIII. klasie:

1) Czem skorupka za młodu nawre, tem na starość trąci. (dom.)
2) Jak powstały wil. Dziady Mickiewicza?
3) Labor non onus sed beneficium (dom.)
4) Skreślić charakter miecznika w pow. Malczewskiego p. t. Marya.
5) Skreślić charakterystykę typów szlachty zaściankowej w Radzie w P. Tad. (dom.).
6) Treść komedyi Fredry: „Nikt mnie nie zna".
7) Charakterystyka Ks. Robaka. (dom.)

8) Praca nie jest zakałą w żadnym ludzi stanie,
Lecz rzetelną zakałą bywa próżnowanie. (Myśl tę wyjaśnić i uzasadnić)

Józef Staromiejski.

b) w języku ruskim.

W V. klasie:

1) Мои вакаціѣ (описъ зъ оповѣданємъ).
2) Подати головнѣ точки договору Руси зъ Греками (szk.)
3) Описъ дому родинного.
4) Рѣка Ниль и еи значенє для старинныхъ Єгиптянъ.
5) Якѣ були первѣстнѣ селитьбы Славянъ? (пôсля землеписи Нестора) (szk.)
6) Описъ церкви св. Тройци въ Дрогобичи.
7) Панованє кн. Олега и єго походъ на Царгородъ въ р. 907 (пôсля лѣтописи Нестора). (szk.)
8) Битва пôдъ Кунаксою (пôсля Ксенофонта).
9) Якъ зображає Овідій потôпъ свѣта? (szk.)
10) Вечеръ лѣтный на селѣ (образець).
11) Перебѣгъ выправы Игоря на Половцѣвъ.

W VI. klasie.

1) Осѣнь, еи пріємности и непріємности.
2) Змѣстъ I. книги Иліяды Гомера. (szk.)
3) Скупый а марнотравный (порôвнанє).
4) Якій пожитокъ и яку шкоду приносить чоловѣкови вода?
5) Петро Могила и єго заслуги для пôднесеня просвѣты на Руси (szk.)
6. Огонь, пріятель и непріятель чоловѣка.
7) Перевести и пояснити першій уступъ Слова о полку Игоря (битва на рѣцѣ Каялѣ). (szk.)
8) Наслѣдки крестныхъ походôвъ.
9) Смерть Патрокля (пôсля Гом. Ил. кн. 16). (szk.)
10) Весѣлє. Описъ на основѣ науки шкôльнои о пѣсняхъ весѣльныхъ.
11. Розôбрати и пояснити думу народну „Про побѣгъ трьохъ братôвъ зъ Азова“. (szk.)

W VII klasie.

1) Значенє пословицѣ „Не все золото, що ся свѣтить.
2) Заслуги Ив. Котляревского для рускои літературы. (szk.)
3) Пояснити слова въ драмѣ Котляревского: „Хто живе чесно и годуєть ся трудами своими, тому и кусникъ черствого хлѣба смачнѣйшій вôдъ мягкои булки неправдою нажитои.
4) Якѣ користи завдячаємъ вынайденю штуки друкарскои?
5) Змѣстъ и тенденція повѣсти Кв. Основяненька „Салдацкій патретъ“. (szk.)

6) Пояснити значенє пословицѣ „Помагай собѣ небоже, а Богъ тобѣ допоможе“.

7) Розôбрати зъ огляду на змѣстъ и хôдъ мыслей поему Шашкевича „Погоня“. (szk.)

8) Якій зворотъ въ житю народôвъ зробили желѣзнї дороги?

9) Подати перебѣгъ мыслей поемы Шевченка „До Основяненька“. (szk.)

10) Вôйна и буря зарôвно нищать, але и приносять користи.

11) Основа и значенє поемы А. Могильницкого „Скитъ Манявскій. (szk.)

W VIII. klasie.

1) Яке значенє мають всесвѣтнї выставы для индустріѣ и торговлѣ?

2) Яке значенє могуть мати въ рускôй літературѣ О. Стороженька „Историчнї спомники столѣтного Микиты Коржа“? (szk.)

3) Потреба и значенє образованя чоловѣка.

4) Пояснити значенє пословицѣ „Carpe diem, quam minimum crede postero“.

5) Чимъ рôжнять ся повѣсти Гр. Кв. Основяненька вôдъ повѣстей М. Вовчка? (szk.)

6) Въ якій спосôбъ удержувала ся єднôсть межи грецкими державами?

7) Судъ у Запорожцѣвъ (пôсля Чорнои Рады Кулѣша). (szk.)

8) Уряджене театру у стариннихъ Грекôвъ а у насъ.

Włodzimierz Pasławski.

c) w języku niemieckim.

W V. klasie.

1) Zeus und das Pferd. Nacherzählung a. G. d. L. (dom.)
2) Das Schlangenhalsband. Inhaltsangabe a. G. d. L. (szk.)
3) Der Weinstock. Erzählung a. G. d. L. (dom.)
4) Das Labyrinth. Schilderung a. G. d. L. (szk.)
5) Jerusalem. Eine Beschreibung in Briefform a. G. d. L. (dom.)
6) Die Entstehung der Cypresse. Erzählung a. G. d. L. (szk.)
7) Kurze Inhaltsangabe des Gedichtes „Der Graf von Habsburg“. a. G. d. L. (dom.)
8) Inhaltsangabe des Lesestücks: Sullas Leichenfeier. a. G. d. L. (dom.)
9) Der Ring des Polykrates. Nacherzählung a. G. d. L. (szk.)
10) Der Baikalsee. Schilderung a. G. d. L. (dom.)
11) Die Deukalion'sche Flut ist dem Ovid nachzuerzählen. (szk.)
12) Der Schenk von Limburg. Nacherzählung a. G. d. L. (dom.)

13) Wie gedenke ich die Ferien zu verbringen? In Briefform. (szk.)

14) Ein Sommermorgen auf dem Land. Schilderung. (dom.)

W VI. klasie.

1) Der Herbst. Schilderung. (dom.)

2) Kurze Inhaltsangabe vom I. Theil des Nibelungenliedes a. G. d. L. (szk.)

3) Parziwal und die vier Ritter. a. G. d. L. (dom.).

4) Hectors Abschied im Anschluss an die Homerlectüre (szk.)

5) Kurze Inhaltsangabe des Gudrunliedes a. G. d. L. (dom.)

6) Der Waldbruder mit dem Esel. Erzählung a. G. d. L. (szk.)

7) Unser Winter Beschreibung in Briefform. (dom.)

8) Inhaltsangabe des Gedichtes „Das Lied vom braven Mann“. a. G. d. L. (dom.)

9) Der Wilde. Nacherzählung. a. G. d L. (szk.)

10) Der Krieg. Schilderung a. G. d. L. (dom.)

11) Artabanos Rede ist frei nach Herodot (B. VII.) wiederzugeben. (szk.)

12) Hüons Begegnung mit Oberon. a. G. d. L (dom.)

13) Welche Folgen hatten die Kreuzzüge? (szk.)

14) Die Vorfabel zu Lessings Emilia Galotti. (dom.)

W VII. klasie.

1) Ora et labora. Abhandlung. (dom.)

2) Die Composition der Ballade Goethes vom vertriebenen und zurückkehrenden Grafen. (szk).

3) Der Stromeslauf und das Heldenleben. Eine Parallele im Anschluss an Goethes Ged. „Mahomets Gesang“. (dom.)

4) An der Sprache erkennt man den Menschen. Abhandlung. (szk.)

5) Welchen Character offenbart der Apotheker in Goethes Hermann und Dorothea? a G. d. L. (dom.)

6) Wie lässt sich Orest's Schicksal nach Goethes Iphigenie darstellen? a. G. d. L. (dom.)

7) „Es bildet ein Talent sich in der Stille, sich ein Character in dem Strom der Welt.“ Abhandlung. (szk.)

8) Tasso und Antonio Eine Parallele a G d. L. (dom.)

9) Welche vorteilhafte Folgen hatten die Nationalspiele für die Griechen? (szk.)

10) Vis consilii expers mole ruit sua. Zu erweisen an dem Abenteuer des Odysseus mit dem Cyclopen

W VIII. klasie.

1) Was bedarf der Mensch, um glücklich zu sein? Abhandlung. (dom.)

2) Die Composition des Gedichtes „Der Graf von Habsburg.“ a. G. d. L. (szk.)

3) Einleitende Bemerkungen zu „dem Grafen von Habsburg.“

4) Ist der Tod des Marquis Posa eine dramatische Notwendigkeit? a. G. d. L. (szk.)

5) Wie verhalten sich Goethe und Schiller zur französ. Revolution? (Nachzuweisen aus der Schul- und Hauslectüre.) (dom.)

6) Welches ist die tragische Schuld in der „Braut v. Messina“? (dom.)

7) „Arbeit ist des Bürgers Zierde,
Segen ist der Mühe Preis;
Ehrt den König seine Würde,
Ehret uns der Hände Fleiss.“ (szk.)

8) Welche Vorzüge haben kleinere Staaten vor grösseren? (szk.)

9) Welches ist in wenig Zügen die Geschichte des deutschen Epos? (szk.)

Piotr Christof.

d) Do egzaminu dojrzałości.

1. Z języka łacińskiego: a) Przetłómaczyć na język polski z Liwiusa V. 29. od słów „Gallos quoque velut obstupefactos“ do słów „oneraturos inopiam armatorum.“ — b) Przetłómaczyć na język łaciński z Historyi starożytnej Zakrzewskiego Cz. I. stron. 234. od słów „Nero, osiągnąwszy cel swój“ do słów „a św. Pawła, jako obywatela rzymskiego, ścięto mieczem.“

2. Z języka greckiego: Przetłómaczyć na język polski z Platona Menexen. 10. i 11. od słów „Αἰτιασάμενος δὲ Δαρεῖος“ do słów „μὴ φοβεῖσθαι τοὺς βαρβάρους.“

3. Z języka polskiego: Rozebrać i przykładami stwierdzić zdanie Owidyusa:

Summa petit livor: perflant altissima venti,
Summa petunt dextra fulmina missa Jovis.

4. Z języka ruskiego: **Вплывъ клімату на фізичну будову и душевный розвôй народôвъ.**

5. Z języka niemieckiego: „Wie lässt sich der peloponnesische Krieg mit dem ersten punischen Kriege vergleichen?

6. Z matematyki: a) Znaleść w pierwszym ćwiercianie kąty x i y spełniające przynależne do siebie zrównania:

$$\frac{17}{58} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sin x + \cos y}}}}$$

$$\frac{105}{242} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\sin x + \cos y}}}}$$

b) Rzemieślnik w przypuszczeniu, że jeszcze przez lat 25 będzie zdolny do pracy, chce na 15 lat następnych zapewnić sobie rentę roczną w kwocie 300 złr. płatną na początku każdego roku; jakąż więc premię musi w tym celu płacić bankowi przez lat 25 na początku każdego roku, jeżeli procent jest 4%?

c) Podstawą graniastosłupa jest trójkąt, którego bok $a = 8{\cdot}5$ dm., bok $b = 4{\cdot}6$ dm., a kąt $\gamma = 78^0\ 24'\ 15{\cdot}6''$; krawiędź boczna s graniastosłupa jest równa wysokości, odpowiadającej trzeciemu bokowi podstawy i nachylona jest do podstawy pod kątem $\varepsilon = 82^{0}\ 36'\ 40{\cdot}8''$; jak wielka jest objętość graniastosłupa?

IV. Wykaz książek,

których używać się będzie w roku szk. 1893.

Religia. W I. klasie Katechizm Schustera tłómaczony dla uczniów obrz. łac. przez ks. Zielińskiego; dla uczniów obrz. gr. kat. **Христіяньско-католицкій катехизмъ** przez ks. Toruńskiego. W II. klasie: Dzieje starego zakonu ks. Dąbrowskiego i **Исторія библ. ст. зав.** ks. Toruńskiego **ч.** I. W III. klasie: Dzieje nowego zakonu ks. Dąbrowskiego i **Исторія біблійна нов. зав** ks. Toruńskiego **ч.** II. W IV. klasie: Liturgika ks. Władysława Jachimowskiego i **Литургика** ks. Toruńskiego. W V. klasie: Introdukcya do pisma św. ks. Władysława Jachimowskiego i **Учебникъ кат. религіи пôсля А. Ваплера написавъ Пелешъ.** W VI. klasie: Nauka wiary w szczególności, ks Władysława Jachimowskiego i **Вѣроученіе частне Пелеша.** W VII. klasie: Etyka katolicka ks. Soleckiego i **Учебникъ христ. кат. етики — пôсля Др. Ваплера переложивъ Б. Пюрко.** W VIII. klasie: Historya kościelna ks. Chotkowskiego i **Исторія церковна** Wapplera w opracowaniu ruskiem przez Stefanowicza.

Język łaciński. A) Gramatyka: w I. i II. kl. dr. Z. Samolewicza Zwięzła gramatyka jęz. łacińskiego: w III. i IV. kl. gramatyka jęz. łac. tegoż autora, opracowana przez T. Sołtysika; w V.—VIII. kl. dr. Samolewicza gramatyka większa. B) Ćwiczenia: w I. kl. Przykłady łacińskie na I. klasę Samolewicza-Sołtysika: w II. kl. dr. Z Samolewicza; w III. i IV. kl. Próchnickiego; w V. i VI. Trzaskowskiego część I. wydanie 2; w VII. VIII Próchnickiego. C) Autorowie: w kl. III. Żywoty Corn. Neposa wyd. Kłaka; kl. IV. Caesar de bello Gallico wyd. Bednarskiego i Ovidius wyd. Skupniewicza; w V. kl. Livius wyp. Zingerlego i Ovidius wyd. Bednarskiego; w VI kl. Sallust. Catilina wyd. Sołtysika, Vergilius wyd. Eichlera i Cicero in Catil. wyd. Sołtysika; w VII. kl. Vergilius wyd. Eichlera i Cicero de imp. Cn. Pomp., pro Archia poeta. Cato maior wyd. Sołtysika; w VII kl Horatius wyd. Petscheniga i Tacitus Germania i Annales Müllera.

Język grecki. A) Gramatyka: w III. kl. Fiderera. w IV. V. VII. kl. Hartla-Ćwiklińskiego, w VI. i VIII Curtiusa-Samolewicza; B) Ćwiczenia w III. IV. kl. Schenkla-Lewickiego. C) Autorowie: w V. kl. Chrestomatya z Xenofonta Fiderera, Homera Iliada wyd. Sołtysika; w VI. kl. Xenof. Fiderera. Homera Iliada wyd. Sołtysika, Herodot wyd. Holdera; w VII. kl. Demostenes wyd Wotkego, Homera Odyssea Paulego; w VIII. Plato Apologia wyd. Lewickiego, Sofokles Antygona wyd. Schuberta.

Język polski A) Gramatyka w całem gimnazyum A. Małeckiego wyd. 8. (lub 7). B. Wypisy: w I. kl. Próchnickiego i Wójcika, Lwów 1890.; w II. kl. Wypisy na kl. II. wyd. 5. Lwów 1884; w III. kl. Wypisy na kl. III. wyd. 5 Lwów 1889.; w IV. kl Wypisy na kl. IV. wyd. 2. Lwów 1888.; w V. kl. Wypisy Fr. Próchnickiego Lwów 1888.; w VI. kl. i VII. 1. półr. Wypisy Tarnowskiego i Wójcika Cz. I.; w VII. 2. półr. i VIII. Wypisy Tarnowskiego i Próchnickiego.

Język ruski. A) Gramatyka Ogonowskiego; B) Wypisy w I. kl. Łuczakowskiego, w II. kl. Romańczuka Czytanka część II. wydanie 2.; w III. i IV. kl. czytanki Partyckiego, w V. Chrestomatya Ogonowskiego; w VI. Chrestomatya Ogonowskiego i Czytanka Barwińskiego tom I; w VII. kl. Czytanka Barwińskiego tom II.: w VIII kl Czytanka Barwińskiego tom III.

Język niem. W kl. I.—IV. Ćwiczenia D-ra Germana i D-ra Petelenza; w kl. V. i VI. wypisy Petelenza i Wernera; w kl. VII wypisy Harwota I tom., w kl. VIII. wypisy Harwota II. tom. — Nadto w kl III i IV. Gramatyka Petelenza, a w kl. VII. i VIII. Historya niemieckiej literatury Strzemchy. Obok wypisów czytać się będzie w całości: w kl. VII. Herman und Dorothea, Götz von Berlichingen, Jungfrau von Orleans i Maria Stuart, w kl. VIII. Iphigenie auf Tauris, Julius Caesar, Torquato Tasso i Laokoon — w wydaniu Graesera.

Geografia i Historya. W I. kl. geografia Benoniego i Tatomira wyd. 5 (lub 4.); w kl. II. geografia Baranowskiego i Dziedzickiego wyd 5. (lub 4.); historya powszechna Weltera w przekładzie Sawczyńskiego część I wyd. 5.; w III. kl. geografia jak w kl. II.. historya Weltera-Sawczyńskiego część II. wyd. 5.; w kl. IV. Weltera-Sawczyńskiego Dzieje nowożytne, wyd. 5. Statystyka monarchii austr. węg. D-ra Iz. Szaraniewicza wyd 3.; w kl. V. Zakrzewskiego Historya powszechna Cz. I.; w kl. VI Zakrzewskiego Historya powszechna Cz. I. i Gindelego Dzieje średniowieczne; w kl. VII. Gindelego Dzieje nowożytne, Lewickiego Zarys dziejów Polski i krajów ruskich; w kl. VIII Hannaka-Lenicka Historya i statystyka monarchii austryacko-węgierskiej, Lewickiego Zarys dziejów Polski.

Matematyka W I.—IV. kl. Arytmetyka Dr. Wł. Zajączkowskiego; w I. II geometrya Mocnika w przekładzie G. Maryniaka część I. wyd. 6; w III. kl. i IV. geometrya Mocnika w przekładzie G. Maryniaka, część II. wyd. 3. i 4.;

w całem wyższem gimnazyum geometrya Mocnika w przekładzie Staneckiego, w V. kl algebra Baranieckiego, w VI. Dziwińskiego, w kl. VII. i VIII. Mocnika-Bodyńskiego. — Logarytmy w kl. VI. Adama, w kl. VII i VIII. Bremikera.

Historya naturalna. W I. i II. kl. Zoologia Nowickiego; w II. kl. botanika Rostafińskiego; w III. mineralogia Łomnickiego, w V. kl. botanika Rostafińskiego; mineralogia Łomnickiego; w VI. kl. zoologia dla klas wyższych dr. Petelenza.

Fizyka. W III., IV., VII i VIII. kl Soleskiego, Chemia Freunda.

Propedeutyka filozofii. W VII. kl. Logika Kozłowskiego; w VIII. klasie psychologia Dr. Crügera w przekładzie Sawczyńskiego.

V. Zbiory naukowe.

1. Do biblioteki nauczycielskiej przybyły w r. szk. następujące ważniejsze dzieła:

a) przez kupno: Muzeum r. 1892., Przewodnik bibliograficzny r. 1892., Przewodnik higijeniczny r. 1892., Warszawska Biblioteka r. 1892., Zeitschrift für das Gymnasialwesen r. 1892., Berliner philologische Wochenschrift r. 1892, Geographische Mittheilungen r. 1892., Geogr. Rundschau r 1892., Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik r. 1892., Rethwisch Jahresberichte über das höhere Schulwesen IV. Jahrg, Учитель r. 1892., Oesterreich in Wort u Bild (ciąg dalszy), Левицкій Библіографія (ciąg dalszy), Frick Lehrproben und Lehrgänge (ciąg dalszy), Müllers Alterthumswissenschaften (ciąg dalszy). Ackermann, Pädagogische Fragen; Herbart, Allgemeine Paedagogik: Willmann, Didaktik; Willmann, Paedagogische Vortraege; Ufer, Vorschule der Paedagogik: Sammlung pädagogischer Abhandlungen I. IV.; Rothfuchs, Zur Methodik des altsprachlichen Unterrichtes; Waldeck. Anleitung zum Unterricht in der lat. Grammatik: Detto, Horaz und seine Zeit; Kiessling, Horatius Fl. Oden, Epoden und Satyren; Koch Xenophonssätze; Fügner. Caesarsätze; Boehme. Nepossätze: Tegge, Lat. Schulphraseologie; Lehmann, Der deutsche Unterricht; Carlyle, Über Helden, Heldenverehrung und das Heldenthümliche in der Geschichte; Kern. Zur Methodik des deutschen Unterrichtes: Paul, Principien der Sprachgeschichte; Frick und Pollack, Epische und lyrische Dichtungen erläutert für die Oberclassen; Korzon, Historya nowożytna t. I.; Brettschneider. Historischer Wandatlas, Karte 3 4. 7; Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen; Meyer, Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung; Jahrbuch der Naturwissenschaften

1890—1891.; Барвѣньскій, Руска истор. бібліотека т. I — VI.; Гомер. Одисея Байди; Житецкій, Очеркъ литер. мало-рускои рѣчи.

b) z darowizny: Bieżące wydawnictwa Akademii Umiejętności w Krakowie; Przegląd polski; Akta grodzkie i ziemskie wydane staraniem Wydziału krajowego; Rutowski, Rocznik statystyki Galicyi 1889—1891.; Wiadomości statystyczne o stosunkach krajowych dra Pilata; Dickstein, Geometrya elementarna; Benndorff, Wiener Vorlegeblätter für archäologische Übungen. — Kasa pomocy im. Mianowskiego w Warszawie nadesłała w darze 39 tomów rozmaitej treści.

2 Do biblioteki dla młodzieży zakupiono: Biblioteka dla młodzieży tom. 1—6.; Majewski, Dr. Muchołapski; Sienkiewicza pisma t. 1—5, 16 - 18; Hoffmanna Powiastki t. 1—8, 10—20.; Житє Ив Котляревского, Лѣкарь Исаакъ, Оржешковои Низины, Іокай Новый дѣдичь, Короленка Слѣпый музика, Еркмана Панѣ Тереса, Еберса Homo sum, Севера Задля святои землѣ, Яковъ Кукъ, Юрко Стефенсонъ, Григ. Квѣтка; D'Albon, Kronprinz Rudolf; Cramer Caesar und seine Zeit: Nieritz, der Kuhhirte: Schwarz, Neu Oesterreich; Smolle, Auf Feldern der Ehre: Werra und Wacker, Aus allen Jahrhunderten; Waspero. Aegypten und Assyrien; Kühn, Auf der Steppe. — Duncker, Das Buch von Vater Radetzky (dar nakładcy); Coopers Lederstrumpf-Erzählungen (dar ucznia V. klasy Arnolda Segala); Julius Verne. Abenteuer von drei Russen und drei Engländern in Süd-Africa (dar ucznia V. klasy Isaaka Gottlieba).

3. Do biblioteki dla ubogich uczniów zakupiono książek szkolnych za 80 złr. 60 ct. w. a.

4. Do gabinetu fizykalnego zakupiono: Wagę lyońską. przyrząd Ampera do doświadczeń elektrodynamicznych, metalowy termometr do oznaczenia największej i najmniejszej temperatury, przyrząd Hofmanna do równoczesnego rozkładu wody, kwasu solnego i amoniaku; jednostkę oporu Siemensa, półkule magdeburskie, przyrząd de la Rive-a do wykazania wpływu magnesu na prąd świetlny, cztery elementa Smeego.

5. Do gabinetu historyi naturalnej zakupiono: Mustela martes, Dasypus novemcinctus, Rhinolophus hippocrepis Canis vulpes, Sorex vulgaris, Lepus timidus, Lutra vulgaris, Spermophilus citillus, Ciconia alba, Podiceps cristatus, Turdus pilaris, Loxia curvirostra, Fringilla coelebs, Fringilla carduelis, Regulus cristatus, Crex pratensis, Sterna hirundo, — wszystkie okazy wypchane. Królik (inic.) Salmo Furio (rozwój), Esox luc., Anodonta cygnea — Equisetum arvense. — Leutemanna ścienne tablice kolorowe do zoologii (dwie serye); Atlas z rybami; Hochstekera ścienne tablice do geologii. — W darze od Wysokiego c. k. Ministerstwa W. i O. otrzymał zakład 10 tablic „Pflanzenwandbilder zum naturgeschichtlichen Unterrichte“.

6. Do zbiorów dla nauki rysunków zakupiono Hausera tablice do studyum najważniejszych form architektonicznych i Laufbergera wzory do dekoracyi sgraffito. — W darze otrzymał zakład od Wydziału krajowego: Zabytki artystycznego przemysłu w Polsce.

VI. Fundusze na zakupienie zbiorów naukowych.

1) Datki 382 uczniów na zbiory naukowe . .	382	złr.	— ct.
2) Taksy wstępne od 112 uczniów . . .	235	„	20 „
3) Taksy za duplikaty świadectw szkolnych .	18	„	— „
4) Nadzwyczajna subwencya dla gabinetu historyi naturalnej	100	„	— „
razem .	735	złr.	20 ct.

VII. Fundusze na wsparcie ubogich uczniów.

1. Odsetki z fundacyi ś. p. Rozalii Jachniewiczówny, wynoszącej w nominalnej wartości kwotę 400 złr. m. k., a przeznaczonej na zakupno książek szkolnych dla ubogich uczniów, wynosiły . . . . . . 10 złr. 62½ ct.

Uwaga. Jedna obligacya indemn. galic. wschod. w nominalnej wartości 350 złr., została wylosowana, a odsetki od listopada 1891. r. dotąd niepobrane.

2. Na wsparcie ubogich uczniów bez różnicy wyznania religijnego wpłynęły na ręce dyrekcyi w r. szk. 1892. następujące datki:

Od Wej Pani Harlenderowej	3	złr.	— ct.
„ „ „ Jakóbowej Lindenbaumowej .	20	„	— „
zaś z przeznaczeniem na wsparcie ubogich uczniów chrześcijańskich od Wej Pani Żółkiewskiej	6	„	81 „
razem .	29	złr.	81 ct.

Wymienionym Dobrodziejkom składa dyrekcya w imieniu młodzieży szkolnej najgorętsze podziękowanie.

3. Z datków, wrzucanych do puszki przez Profesorów i uczniów po egzortach i po lekcyach religii mojżeszowej, wpłynęło .	26	złr.	80½ ct.
4. Pozostało z roku szk. 1891.	102	„	47½ „

Kwoty pod 1—4 wyszczególnione wynoszą razem . 169 złr. 71½ ct.

Z tego użyto na zakupno książek szkolnych do księgozbioru ubogiej młodzieży	80 złr. 60 ct.
na uzupełnienie opłaty szkolnej i zapomogi dla 12 uczniów	37 „ 50 „
razem .	118 złr. 10 ct.
Zostaje zatem na rok następny . .	51 złr. 61 ½ ct.

5. Stypendya wynosiły w całym roku szkolnym ogólną kwotę 1124 złr. 45 ct., a pobierało je 8 uczniów, mianowicie:

Kusznir Mikołaj z kl Ib. z fundacyi im. Kossaka 31 złr. 50 cnt.

Łopuszański Jan z II. kl. z funduszu nadwyżek karnych 100 złr.

Kobryn Piotr z kl. IIIa. z fundacyi Rostockiego 370 złr.

Kwieciński Jan z kl. III a z fundacyi miasta Mikołajowa 70 złr.

Jachno Jakób z VI. kl. z fundacyi im. Kossaka 45 złr. 45 ct.

Gottlieb Szaja z VII. kl. z fundacyi Drohobyckiej Imienia Najjaśniejszego Cesarza Franciszka Józefa I. 150 złr.

Towarnicki Bazyli z VII. kl. z fundacyi Dr. Jana Towarnickiego 200 złr.

Grodzki Zdzisław z VIII. kl. z fundacyi Samuela Głowińskiego 157 złr. 59 ct

6. Od roku 1881. istnieje w Drohobyczu stowarzyszenie „Бурса св. Іоанна Крестителя въ Дрогобичи“, którego celem jest wspieranie ubogiej młodzieży ruskiej. Dnia 1. lipca b. r. wynosił majątek tego towarzystwa 2684 złr. 74 ct. w. a W roku szk. 1892. udzieliło towarzystwo z odsetków kapitału 19 uczniom zapomogi w łącznej kwocie 123 złr.

7. Dnia 21. grudnia 1891. r. zawiązało się towarzystwo „Bursy dla młodzieży polskiej imienia Adama Mickiewicza pod wezwaniem św. Stanisława Kostki“. Towarzystwo to, jak i powyżej wspomniane ma zamiar po uzyskaniu dostatecznego funduszu wybudować dom, w którymby ubodzy uczniowie mogli pod nadzorem prefekta oddawać się nauce wolni od niebezpieczeństw, zagrażających ich cnocie. Towarzystwo chociaż jest dopiero w zawiązku, wspierało już ubogą młodzież polską doraźnymi datkami.

8. Odezwą, wystosowaną do dyrekcyi gimnazyalnej d 23. stycznia b r., ofiarowało towarzystwo „Żydowska kuchnia ludowa w Drohobyczu“ ubogim uczniom bez różnicy wyznania religijnego bezpłatne obiady, składające się z rosołu, mięsa i chleba, a to w własnych lokalnościach i w osobnych dla uczniów wyznaczonych godzinach. Z tej jednak, z największą uprzejmością ofiarowanej, pomocy nie korzystał w ubiegłym roku szkolnym żaden uczeń. Mimo to dyrekcya składa na tem miejscu Wydziałowi Towarzystwa najszczersze podziękowanie za okazaną gotowość do przyjścia z pomocą ubogiej młodzieży szkolnej.

VIII. Statystyka uczniów.

	W klasie										Razem
	Ia.	Ib.	IIa.	IIb.	III.	IV.	V.	VI.	VII	VIII	
I. Frekwencya w ogólności.											
1. Przy końcu roku szk 1891. było .	37	32	36	28^{1}	41^{2}	36^{1}	28^{1}	22	15	17^{1}	292^{6}
	Ia	Ib	II	IIIa	IIIb	IV	V	VI	VII	VIII	
2. Publicznych uczniów na początku roku szkol. 1892. było	51	51	61	32	29	41	39	31	24	18	377
3. Przyjęto w ciągu 1. półr 1892. . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4. Między nimi było:											
a) z innych zakładów α) z promocyą	41	38	2	1	2	2	1	3	3	1	94
β) repetentów	3	1	—	2	—	4	3	1	3	1	18
b) z tutejszego zakładu α) z promocyą	—	—	46	27	23	33	27	23	17	15	211
β) repetentów	7	12	13	2	4	2	8	4	1	1	54
5. Ustąpiło w ciągu 1. półrocza 1892	1	6	4	2	—	1	2		—	1	17
6. Pozostało przy końcu 1. półrocza	50	45	57	30	29	40	37	31	24	17	360
7. Przyjęto w ciągu 2. półrocza . . .		2	2	—	—		—	—	—	—	4
8. Ustąpiło w ciągu 2. półrocza . .	6	12	14	2	3	3	9	5	3	4	58
9. Pozostało przy końcu 2. półrocza .	41	35	45	28	26	37	31	26	21	13	306
10. Prywatnych uczniów było w I. półroczu 1891.	—	—	1			1	—		—	—	2
11. w II półroczu	-	—	1	—	—	1	—	—	—	—	2
II. Frekwencya przy końcu II. pół.											
1. Według miejsca pobytu rodziców.											
a. z Drohobycza było uczniów . .	28	23	27^{1}	17	23	4^{1}	18	18	12	8	188^{2}
b. z Drohobyckiego powiatu . . .	9	11	13	8	3	17	9	4	5	—	79
c. z Samborskiego „ . . .	—	—	—		—	—	2	—	—	1	3
d. z Stryjskiego „ . . .	—	—	—	1	—	2	2	—	1	—	6
e. z Rudeckiego „ . . .	1	—	2	—	—	—	—	1	—	1	5
f. z innych powiatów	6	1	3	2	—	4	—	3	3	3	25
2. Według miejsca urodzenia uczniów.											
z Drohobycza i Drohobyckiego powiatu.	31	27	28^{1}	15	20	21	17	19	11	8	197^{1}
z innych powiatów Galicyi	12	7	17	12	6	15	13	7	10	5	104
z Morawii, Krainy, Styrii, z Węgier, z Rosyi	1	1	-	1	—	1^{1}	1	—	—	—	5^{1}
3. Według wyznania religijnego uczniów.											
Rzymsko-katolickiego wyznania . . .	16	12	15	15	5	10	12	8	8	2	103
Grecko-katolickiego	9	9	18	11	2	12	10	7	8	3	89
Ewangelików		2	—	—	—	1	1	—	1	—	5
Innych akatolików	—	1	1	—	—	—	—	—	—	—	2
Mojżeszowego wyznania	9	11	11^{1}	2	19	14^{1}	8	11	4	8	107^{2}
4. Według języka ojczystego											
Polski język za ojczysty uznało . . .	35	23	27	17	24	24	20	19	12	10	211^{1}
Ruski język „ „ . . .	9	9	17	11	2	12	10	7	8	3	88
Niemiecki „ „ „ . . .	—	3	1	—	—	1	1	—	1	—	7
Węgierski	—	—	—	—	—	0^{1}	—	—	—		0^{1}
5. Według wieku uczniów.											
11 lat miało	12	9	—	—	—	—	—	—	—		21
12 „ „	7	8	7	—	—	—	—	—	—		22
13 „ „	11	8	10	8	3	—	—	—	—	—	40^{1}
14 „ „	10	4	14	7	4	6^{1}	—	—	—	—	45^{1}
15 „ „	4	5	7	6	6	7	5	1	—	—	41

	W klasie Ia	Ib	II	IIIa	IIIb	IV	V	VI	VII	VIII	Razem
16 lat miało	—	1	3	5	9	7	5	3	2	—	35
17 „ „	—	—	3	2	3	11	6	2	5	—	32
18 „ „	—	—	—	—	1	3	7	11	5	3	31
19 „ „	—	—	—	—	—	1	4	3	3	4	15
20 „ „	—	—		—	—	1	2	4	3	2	12
21 „ „	—	—	—	—	—	1	1	—	1	2	5
22 „ „	—	—	—	—	—	—	1	1	2	2	6
23 „ „	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1
Razem .	44	35	45^{1}	28	26	37^{1}	31	26	21	13	306^{2}

b. Frekwencya przy końcu 2. półr. na przedmioty względnie obowiązkowe i nadobowiązkowe:

	Ia	Ib	II	IIIa	IIIb	IV	V	VI	VII	VIII	Razem
a. na naukę języka ruskiego . . .	11	12	17	13	3	14	10	8	8	3	99
b. „ „ historyi kraju rodzinnego	—	—	—	28	26	37	—		21	—	112
c. „ „ języka francuskiego . .	—	—	6	1	8	6	1	5	2	—	29
d. „ „ geometryi wykreślnej . .	—	—	—	—	—	—	10	—	—	—	10
e. „ „ kaligrafii	24	14	22	10	10	6	—	—	—	-	86
f. „ „ gimnastyki	26	15	16	12	19	9	11	4	2	—	120
g. „ „ śpiewu	11	15	19	17	3	14	19	9	11	3	121

III. Klasyfikacya.

a. Odnośnie do r. szk. 1891.

	Ia	Ib	IIa	IIb	III	IV	V	VI	VII	VIII	
do poprawczego egzaminu przeznaczono	7	5	4	8^{1}	14	7	3^{1}	3	2	—	53^{2}
zdało poprawczy egzamin	7	5	4	8^{1}	13	6	3^{1}	3	2	—	51^{2}
nie zdało poprawczego egzaminu . .	—	—	—		1	1	—	—	—	—	2

b. Ostateczny zatem wynik klasyfikacyi za 2. półrocze r. szk. 1891.

	Ia	Ib	IIa	IIb	III	IV	V	VI	VII	VIII	
celujący stopień otrzymało	3	2	5	4	5	3	2	—	2	1	27
pierwszy „ „	24	18	23	18^{1}	29^{1}	29^{1}	20^{1}	18	13	16^{1}	208^{5}
drugi „ „	4	4	4	5	5^{1}	3	4	2	—	—	31^{1}
trzeci „ „	6	8	4	1	2	1	2	2	—	—	26
Razem .	37	32	36	28^{1}	41^{2}	36^{1}	28^{1}	22	15	17^{1}	292^{6}

c. Z końcem roku szk. 1892.

	Ia	Ib	II	IIIa	IIIb	IV	V	VI	VII	VIII	
celujący stopień otrzymało	3	3	4	4	3	4	—	1	1	1	24
pierwszy „ „	24	24	18^{1}	16	12	21^{1}	20	18	12	10	175^{2}
drugi „ „	3	3	5	—	4	2	4	2	2	—	25
trzeci „ „	5	3	11	4	2	4	1	—	—	—	30
do poprawczego egzaminu przeznaczono	9	2	7	4	4	6	6	5	6	2	51
do uzupełniającego „ „	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1
Razem .	44	35	45^{1}	28	26	37^{1}	31	26	21	13	306^{2}

IV. Opłata szkolna.

	Ia	Ib	II	IIIa	IIIb	IV	V	VI	VII	VIII	
1. Płaciło całą opłatę w 1. półroczu .	25	29	19^{1}	11	12	24^{1}	15	16·5	10	7	168·5
„ „ „ „ 2. „ .	15	12	25^{1}	11	13	25^{1}	8	11	14	9	143^{2}
2. Uwolnionych od całej opłaty w 1 pół.	23	17	40	19	17	17	23	14·5	14	10	194·5
„ „ „ „ „ 2 „	29	24	22	17	13	12	24	17	9	5	172

	W klasie Ia.	Ib.	II.	IIIa.	IIIb.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	Razem
3. Opłata szkolna wynosiła w 1. półr.. . .	375·	435·	285·	165·	180·	375·	165·	247·5	150	105·	2482·5
„ 2 „ . . .	225·	180·	390·	165·	195·	390·	120·	165	210·	135·	2175
Razem .	600·	615·	675·	330·	375·	765·	285·	412·5	360·	240·	4657·5
4. Taksy wstępne wynosiły	71·4	71·4	10·5	—		2·1	12·6	4·2	6·3	10·5	4·2	193·2
5. Datki na zbiory naukowe	51·	53·	63·	32·	29·	42·	39·	31·	24·	18·	382·
6. Taksy za wydane duplikaty	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	18·

Co do stanu rodziców było między uczniami przy końcu II. półrocza.

synów księży grecko-katol.	19
„ adwokatów	4
„ lekarzy	1
„ urzędników publicznych	30
„ urzędników prywatnych	9
„ właścicieli i dzierzawców większych posiadłości .	5[1]
„ właścicieli realności	6
„ kapitalistów, przemysłowców i kupców . . .	73
„ nauczycieli szkół ludowych	11
„ nauczycieli gimnazyalnych	3
„ rzemieślników	26
„ włościan i rolników	37
„ sług publicznych i prywatnych	46[1]
„ zarobników	6
sierót	30
Razem	306[2]

IX. Ważne rozporządzenia.

1 Wysoka c. k. Rada szk. kr. wydała dnia 26. października 1891. l. 21132 plan nauki gramatyki języka ruskiego.

2. J. Excl. P. Minister W. i O. reskryptem z d. 30. września 1891. l. 1786. zarządził, co następuje: a) łacińskie i greckie wypracowania domowe w wyższych klasach mają ustać; b) liczba zadań szkolnych w jednem półroczu ustanawia się w języku łacińskim na pięć, w języku greckim na cztery; c) lekturę prywatną z języka łacińskiego i greckiego należy przy egzaminie dojrzałości uwzględnić o tyle, że każdy abituryent może prosić aby mu zadano także pytanie z jego lektury prywatnej, jeżeli się spodziewa, iż przez to poprawi swą cenzurę; musi jednak wykazać się prywatną lekturą taką, która pod względem rozmiarów odpowiada całorocznej lekturze szkolnej.

3. Okólnikiem z d. 11. lutego 1892. l. 2162 poleca Wysoka c. k. Rada szk. kr. posługiwać się przy nauce rysunków odręcznych jedynie środkami naukowymi wyszczególnionymi w wykazie wydanym przez Wys. c. k. Ministerstwo W. i O. d. 15. grudnia 1891. l. 26765.

4. Okólnikiem z d. 21. maja 1892. l. 10122 wydała Wysoka c. k. Rada szk. kr. przepisy co do udzielania nauki języka łacińskiego w krajowych gimnazyach.

5. Okólnikiem z d. 5. maja 1892. l. 4405. poleciła Wysoka c. k. Rada szk. kr. „Prawidła pisowni polskiej", przyjęte przez Akademię Umiejętności w Krakowie i Komisyę powołaną przez Radę szkolną krajową.

6. JExc P. Minister W. i O. oznajmił reskryptem z d. 14. maja 1892. l. 212., że postanowienie, tyczące się uwolnienia od połowy opłaty szkolnej, nie może być zastosowane do odroczenia opłaty szkolnej w 1. półroczu I klasy. W rysunkach odręcznych, o ile one są przedmiotem obowiązkowej nauki, potrzebny jest w celu uzyskania odroczenia opłaty szkolnej równie jak we wszystkich innych przedmiotach postęp dobry; natomiast postęp w nauce kaligrafii i gimnastyki nie ma na to żadnego wpływu nawet wtedy, gdyby te przedmioty były obowiązkowymi.

7. Wysoka c. k. Rada szk. kr. wydała dnia 16. czerwca 1892. l. 581. plan nauki języka niemieckiego dla szkół średnich z językiem wykładowym polskim i ruskim, oraz instrukcyę dla tej nauki w klasach niższych.

X. Sprawa fizycznego rozwoju młodzieży,

poruszona reskryptem JExc. P. Ministra W. i O. z d. 15. września 1890. l. 19097. i okólnikiem Wys. c. k. Rady szk. kr. z d. 17. października 1890. l. 17498., w ubiegłym roku szkolnym nie postąpiła bynajmniej naprzód w stosunku do roku poprzedniego, czyli raczej do lat poprzednich.

Kąpieli miasto nie posiada; również nie ma miejsc wygodnych i stosownych do gry w piłkę lub innych zabaw; nawet i ślizgawce ostatnia zima nie sprzyjała.

Ograniczyć się tedy z konieczności wypadło do nauki gimnastyki, która w braku sali gimnastycznej także nie może być udzielaną tak skutecznie, jakby sobie życzyć należało.

Nadto w czasie przerw 10-minutowych wypróżnia młodzież sale szkolne i pod nadzorem nauczycieli używa swobodnego ruchu w przyległym obszernym ogrodzie.

W jesieni zaś, na wiosnę i w lecie odbywają uczniowie w towarzystwie nauczycieli wycieczki za miasto częścią w celach naukowych częścią dla przyjemności.

Dnia 2. czerwca po południu urządzono wspólną wycieczkę wszystkiej młodzieży w towarzystwie grona nauczycielskiego do pobliskiego lasku, gdzie kilka godzin przepędzono na odpowiednich wiekowi zabawach. Następnego dnia była młodzież wolna od lekcyi przedpołudniowych.

XI. Kronika Zakładu.

Wpisy uczniów do zakładu odbyły się 29. 30. i 31. sierpnia 1891. Egzamina wstępne do I. klasy odbyły się przed feryami 15 i 16. lipca, po feryach 1. i 2. września. W pierwszym terminie zdawało egzamin 61, w drugim 32. razem 93 uczniów. Reprobowano 12.

W dniach 1. i 2. września odbyły się także egzamina poprawcze i wstępne do klas wyższych.

D. 3. września 1891. odprawiono uroczyste nabożeństwo w kościele parafialnym, wspólne dla młodzieży katolickiej obu obrządków.

W d. 4. października, jako w dniu Imienin Najj. Pana, i w d. 19. listopada, jako w dniu Imienin Najj. Pani, brała młodzież wraz z gronem nauczycielskiem udział w uroczystych nabożeństwach, odprawionych w kościele i w cerkwi na intencyę Najjaśniejszych Państwa. Również brała młodzież gimnazyalna udział w nabożeństwie żałobnem d. 4. maja za duszę ś. p. Cesarzowej Maryi Anny i d. 27. czerwca 1892. za duszę ś. p. Cesarza Ferdynanda I.

D. 12. grudnia 1891. urządziła młodzież gimnazyalna za zezwoleniem dyrekcyi wieczorek muzykalno-deklamacyjny ku uczczeniu pamięci Adama Mickiewicza w miejskiej sali gimnastycznej, którą Świetna Zwierzchność gminna z wszelką gotowością bezinteresownie odstąpiła na ten cel, za co też niechaj na tem miejscu będzie jej wyrażone w imieniu zakładu gorące podziękowanie.

Dnia 11. stycznia 1892. zmarł na tyfus uczeń IV. klasy Piotr Kuzyk. W myśl obowiązujących przepisów nie brała młodzież udziału w pogrzebie.

W ciągu roku szkolnego zwidzał c. k. inspektor krajowy Wny Pan Jan Lewicki dwukrotnie tutejszy zakład, mianowicie w dniach 11. i 12. września 1891., a po raz drugi w d. 1. do 9. kwietnia 1892

D. 10. maja o godz. 7. odbyło się za staraniem grona nauczycielskiego żałobne nabożeństwo w tutejszym kościele parafialnym za spokój duszy ś. p. Ks. Andrzeja Drążka. W nabożeństwie tem wzięła udział także młodzież gimnazyalna

Od 16. do 21. maja włącznie odbywał się piśmienny, a od 10 do 23. czerwca włącznie ustny egzamin dojrzałości pod przewodnictwem c. k. Inspektora krajowego Wgo Pana Jana Lewickiego. Dnia 13. czerwca po południu nastąpiło rozdanie świadectw abituryentom.

W ciągu roku szkolnego przystępowała młodzież katolicka trzy razy do spowiedzi i komunii św.

Rok szkolny zakończono 15. lipca 1892. dziękczynnem nabożeństwem w cerkwi parafialnej i rozdaniem świadectw szkolnych.

XII. Klasyfikacya uczniów

za drugie półrocze 1892.

(Nazwiska uczniów celujących odznaczone grubszymi czcionkami).

Klasa Ia.

Aksler Henryk
Bardach Mojżesz
Bromowicz Stanisław
Cieśliński Bolesław
Eisenstein Leizor
Gartenberg Izaak
Gelehrter Władysław
Grodzki Czesław
Hamerschmidt Chaim
Hoffmann Hersch
Hrycaj Jan
Josefsberg Michał
Koestlich Roman
Kunawiec Stefan
Łancucki Erazm
Marków Józef
Mendelsohn Mojżesz
Nikolak Michał
Pomeranz Salomon
Pyszyński Stanisław
Rothenberg Mojżesz
Schreyer Meyer
Watzlawik Ludwik
Weingarten Benisch
Zeimer Chaim
Zeimer Schaje
Żurawski Edward
Stopień drugi otrzymało 3
Stopień trzeci 5
Do poprawczego egzaminu przeznaczono 9

Klasa Ib.

Apfel Jerzy
Dorociński Eugeniusz
Friedman Eliasz
Haas Pinkas
Kawecki Lech
Klober Bronisław
Klugman Izydor
Kobryn Włodzimierz
Korpak Szymon
Krysko Włodzimierz
Kulczycki Stanisław
Kusznir Mikołaj
Kwaśniewski Kazimierz
Lazarów Jan
Łukasiewicz Augustyn
Mazur Franciszek
Muller Jakób
Platz Gustaw
Puszkar Mikołaj
Ringel Michał
Sanocki Karol
Sternbach Izrael
Szych Ignacy
Twerdochleb Meliton
Wolański Onufry
Zebrowski Mieczysław
Stopień drugi otrzymało 3
Stopień trzeci „ 3
Do poprawczego egzaminu przeznaczono 2

Klasa II.

Apfel Natan
Backenroth Abraham
Hryniewiecki Eugeniusz
Hnicki Aleksander
Iwasiówka Bazyli
Janicki Franciszek
Kiedacz Mikołaj
Kindij Włodzimierz
Kobryn Leon
Krajczyk Bazyli
Łopuszański Jan
Mandel Izaak
Młynarz Ludwik
Pichowicz Michał
Rapaport Mojżesz
Redka Konstanty
Róg Stanisław
Róg Władysław
Rubin Meier

Streimer Chaim
Strzelelski Maryan
Tugendhaft Jakób
Stopień drugi otrzymało 5
Stopień trzeci otrzymało 11
Do egzaminu poprawczego przeznaczono 7

Klasa III.

Berkowicz Michał
Boroński Karol
Gawenda Mieczysław
Gottlieb Hersch
Iwasik Eugeniusz
Janowski Janusz
Kindij Michał
Klajewicz Michał
Kobryn Piotr
Komarnicki Michał
Kuzłów Grzegorz
Kwieciński Jan
Mielnik Stanisław
Pichowicz Jan
Przybyłowicz Przemysław
Szych Teodozy
Tulej Bolesław
Wiśniewski Maryan
Wolski Władysław
Wołoszyn Michał
Stopień trzeci otrzymało 4
Do poprawczego egzaminu przeznaczono 4

Klasa III.

Bienstock Majer
Czerwiński Michał
Garbowski Mikołaj
Goldhammer Leib
Herschdörfer Jona
Hryczajlik Maryan
Klein Abraham
Klinghoffer Markus
Liebermann Marek
Lill Antoni
Łukasiewicz Bronisław
Rosenberg Majer
Ruhrberg Peisech
Schwarz Szymon
Unger Stanisław
Stopień drugi otrzymało 4
Stopień trzeci „ 2
Do poprawczego egzaminu przeznaczono 4
Do uzupełniającego egzaminu przeznaczony 1

Klasa IV.

Becher Osias
Bickel Leizor
Busek Egon
Erdheim Pinkas
Friedberg Henryk
Hornicki Aleksander
Jarecki Kazimierz
Jurków Michał
Kornhaber Jakób
Kreisberg Izaak
Kuntsman Jan
Langrock Izydor
Langrock Gedalius
Lauterbach Joachim
Łodyński Tomasz
Mryc Włodzimierz
Reich Józef
Schor Ignacy
Schreier Leizor
Seif Aron
Sternbach Mej'ech
Szymański Stanisław
Terlecki Michał
Wittemberski Mieczysław
Zintel Rudolf
Stopień drugi otrzymało 2
Stopień trzeci 4
Do poprawczego egzaminu przeznaczono 6

Klasa V.

Badecki Józef
Cymbrykiewicz Józef
Feniak Michał
Gottlieb Izaak
Hennefeld Pinkas
Hnicki Zenobi
Kawecki Zygmunt
Kobyłecki Jan
Korolewicz Michał
Kozaniewicz Maryan
Lachowicz Kazimierz
Lewiński Grzegorz
Liebermann Pinkas
Makuch Jan
Michač Bazyli
Rappaport Majer
Schanek Ksawery
Stauffer Henryk
Stria Bolesław
Strzetelski Juliusz
Wiesenberg Leizor
Stopień drugi otrzymało 4
Stopień trzeci „ 1
Do egzaminu poprawczego przeznaczono 6

Klasa VI.

Aberbach Mechel
Arnold Chaim
Auslaender Selig
Boelke Emil
Diaków Teodor

Erdkeim Jakób
Friedberg Juliusz
Gulla Antoni
Huczyński Karol
Jachno Jakób
Kleinberg Süssie
Kutschera Franciszek
Lachowicz Jan
Lis Mordche
Łopuszański Juliusz
Pitułej Piotr
Rappaport Juliusz
Świtalski Roman
Wolski Zygmunt
Stopień drugi otrzymało 2
Do egzaminu poprawczego przeznaczono 5

Klasa VII.

Bałanda Wiktor
Gottlieb Szaje
Hutowicz Dymitr
Kozak Karol
Krwawicz Michał
Piechna Stanisław
Rosenberg Dawid
Rosenwiesen Salomon
Rudawski Miron
Szwarz Jan
Siokało Julian
Stauffer Adolf
Waluch Jan
Stopień drugi otrzymało 2
Do egzaminu poprawczego przeznaczono 6

Klasa VIII.

Frey Izrael
Grodzki Zdzisław
Kleinberg Abel
Lieberman Samuel
Lis Izaak
Manasterski Dymitr
Martowicz Aleksander
Rappaport Abraham
Stefanyk Bazyli
Sternbach Dawid
Tiegerman Mojżesz (właśc. Rothenberg)
Do egzaminu poprawczego przeznaczono 2

Wynik egzaminu dojrzałości:

Zgłosiło się do egzaminu uczniów publicznych . . . . 11; wszyscy zdawali egzamin po raz pierwszy.

Uznano za

a) dojrzałego z odznaczeniem . . . 1
b) dojrzałych 7
c) niedojrzałych z poprawką 2
d) niedojrzałego i reprobowano na rok 1

Świadectwo dojrzałości otrzymali:

Frey Izrael
Grodzki Zdzisław
Lis Izaak
Manasterski Dymitr
Martowicz Aleksander
Rothenberg Mojżesz
Stefanyk Bazyli
Sternbach Dawid

Do rodziców i opiekunów.

Wpisy uczniów do gimnazyum na r. szk. 1892/3 odbędą się d. 29. 30 i 31. sierpnia 1892. Późniejsze zgłoszenia do zapisu mogą być uwzględnione tylko w wyjątkowych wypadkach.

Uczniowie zgłaszać się mają osobiście w towarzystwie ojca, matki lub opiekuna, przyczem mają przedłożyć świadectwo szkolne z ostatniego półrocza i wypełnioną kartę wpisową.

Uczniowie nowo wstępujący mają przedłożyć:

a) metrykę chrztu lub urodzenia, bez której żaden uczeń do zakładu przyjęty nie będzie;

b) świadectwo szkolne tego zakładu, w którym dotychczas pobierali naukę, z potwierdzeniem dyrekcyi, że można ich przyjąć do innego zakładu. Przy wpisie zapłacić mają taksę wstępną 2 złr. 10 ct.

Każdy uczeń bez wyjątku ma złożyć 1 zł. na zbiory naukowe.

Opłata szkolna, która na jedno półrocze wynosi 15 złr., ma być złożona najdalej do 15. października.

Uczniowie klasy I. mogą już w 1. półroczu uzyskać uwolnienie od opłaty szkolnej, jeżeli uczynią zadość przepisom wydanym przez Wys. Ministerstwo W. i O. d. 6. maja 1890 l. 8836. Prośbę o uwolnienie winni wnieść do 8 dni po rozpoczęciu roku szkolnego.

Ponieważ nie może być rzeczą obojętną ani dla zakładu ani dla rodziców, u kogo uczniowie mają mieszkać, przeto zechcą rodzice i opiekunowie co do mieszkania synów lub pupilów porozumieć się poprzednio z dyrekcyą.

Podobnie zechcą rodzice i opiekunowie w własnym interesie porozumiewać się z dyrekcyą co do wyboru domowych nauczycieli czyli korepetytorów.

Rodzice i opiekunowie zechcą przy wpisie oświadczyć dyrekcyi, czy sobie życzą, aby ich synowie lub pupile pobierali naukę w przedmiotach nadobowiązkowych. Kto naukę tę rozpocznie, nie wolno mu przerywać bez zezwolenia dyrekcyi.

Częste porozumiewanie się szkoły z rodzicami, opiekunami i nadzorem domowym jest rzeczą nader pożądaną. Co drugą niedzielę więc od godziny 10—11 znajdować się będą dyrektor i profesorowie w kancelaryi gimnazyalnej dla udzielania rodzicom, opiekunom i nadzorom domowym wiadomości o p stępie w naukach i prowadzeniu się uczniów.

Egzamina wstępne do klasy I. odbywają się w dwóch terminach, t. j. przed feryami 15 i 16., a w razie potrzeby także 17. lipca i po feryach d. 1. i 2., a w razie potrzeby także 3. września. Wybór jednego z tych terminów pozostawia się rodzicom. W każdym z tych terminów rozstrzyga się o przyjęciu lub nieprzyjęciu ucznia do klasy I. stanowczo, a powtórzenie egzaminu wstępnego ani w tym samym ani w innym zakładzie nie jest dozwolone.

Egzamina wstępne do klas II—VIII., tudzież egzamina poprawcze odbywać się będą w części piśmiennej d. 31. sierpnia, w ustnej zaś d. 1 i 2. września.

Nabożeństwo wstępne odbędzie się d. 3. września, poczém d 4. września rozpocznie się prawidłowa nauka szkolna.

Aleksander Borkowski
dyrektor.

До родичѣвъ и опѣкунôвъ.

Записы ученикôвъ до гімназіѣ на р. шк. 1893. вôдбудуть ся дня 29. 30. и 31. серпня 1892. Пôзнѣйшî зголошеня до запису можна буде увзглядити хиба вымково.

Ученики мають зголошувати ся особисто зъ вôтцемъ, матерію або опѣкуномъ, выказати ся свѣдоцтвомъ шкôльнымъ зъ остатнього пôвроку и вôддати якъ слѣдъ выповнену картку вписову.

Тû, що вперве вступають до сеи гімназіѣ, мають выказати ся:

а) метрикою хрещеня чи то родинъ,

б) свѣдоцтвомъ тои школы, де доси побирали науку, зъ потверджененъ дирекціѣ, що можна ихъ приняти до иншои школы. — При записѣ мають зложити 2 зр. 10 кр. вписового.

Кождый ученикъ безъ рôжницѣ має зложити 1 зр. на приборы науковû.

Оплата шкôльна выносить пôврôчно 15 зр. и має бути зложена за 1. пôврôкъ найдальше до 15. жовтня.

Ученики I. клясы можуть вже въ I. пôвроцѣ узыскати увôльнене вôдъ оплаты шкôльнои, коли вдоволять вымогамъ розпорядженя Выс. Мініст. зъ д. 6. мая 1890. Ч. 8836. Прозьбу о увôльнене треба подати до 8 днѣвъ по записахъ.

Такъ для школы якъ и для родичѣвъ не може бути рôвнодушно, у кого ученики мають мешкати; длятого зволять родичѣ и опѣкуны що до мешканя сынôвъ чи выхованкôвъ поперѣдъ порадити ся зъ дирекціею.

Такъ само схотять родичѣ и опѣкуны для власного добра завсѣгды радити ся дирекціѣ, коли ходить о выбôръ домового учителя.

Родичѣ и опѣкуны зволять при записѣ заявити дирекціѣ, якои науки надобовязковои желають собѣ для своихъ сынôвъ чи выхованкôвъ. Хто таку науку зъ волѣ родичѣвъ розпôчне, тому не вôльно перерывати ѣѣ безъ дозволу дирекціѣ.

Частû зносины школы зъ родичами, опѣкунами и надзоромъ домовымъ суть для обопôльного добра дуже пожаданû. На те-жь що другои недѣлѣ вôдъ годины 10—11. збирають ся въ канцеляріи гімназіяльнôй директоръ и професоры, щобы родичѣвъ, опѣкунôвъ и надзоры домовû повѣдомляти о успѣхахъ въ науцѣ и о поведеню ученикôвъ.

Испыты вступнû до I. клясы вôдбувають ся въ двохъ речинцяхъ: разъ передъ вакаціями 15. и 16. а въ разѣ потребы ще и 17. липня; другій разъ по вакаціяхъ 1. и 2., а въ разѣ потребы ще и 3. вересня. Выбôръ одного зъ тыхъ речинцѣвъ лишає ся родичамъ; однако въ кождôмъ зъ нихъ рѣшає ся о принятю ученика до I. клясы такъ, що повторене испыту на сей рôкъ не дозволене анѣ въ тôй самôй анѣ въ иншôй школѣ.

Испыты вступнû до клясъ II—VIII., такожъ испыты поправчû будуть вôдбувати ся въ части письменнôй д. 31. серпня, а въ части устнôй дня 1. и 2. вересня.

Служба Божа зъ возванемъ св. Духа вôдправить ся дня 3. вересня, а 4. вересня розпôчне ся правильна наука шкôльна.

Александеръ Борковскій,
директоръ.