SPRAWOZDANIE

DYREKCYI C. K. GIMNAZYUM

W BOCHNI

ZA ROK SZKOLNY

1903.

TREŚĆ:

O najmniejszych powierzchniach. Napisał Roman Jamrógiewicz.
Wiadomości szkolne.

KRAKÓW.
NAKŁADEM FUNDUSZU NAUKOWEGO.
W DRUKARNI W. L. ANCZYCA I SPÓŁKI.
1903.

O najmniejszych powierzchniach.

(Główniejsze definicye i pojęcia).

Teorya powierzchni najmniejszych należy w dzisiejszych czasach do najciekawszych i najbardziej zajmujących dziedzin geometryi, zawdzięcza zaś to licznym węzłom, jakie ją łączą z najrozmaitszemi gałęziami wiedzy matematycznej (np. teoryą funkcyi, rachunkiem waryacyjnym, fizyką matematyczną i t. p.). Początek teoryi tej datuje się od lat 1760—61, pierwszy bowiem impuls dał jej Lagrange w dziele swem: Miscellanea Taurinensia.

Jak już sama nazwa wskazuje będzie tą minimalną powierzchnią powierzchnia najmniejsza z pośród wszystkich, pewnym warunkom zadość czyniących, czyli jest to — jak mówi Bianchi [1] — powierzchnia o najmniejszem polu (Flächeninhalt, l'aire) w porównaniu z innemi sąsiedniemi, nieskończenie blizkiemi, ograniczonemi pewną krzywą (C).

§ 1.

Przedewszystkiem tedy ważnym jest dla nas sposób (wzór) obliczania powierzchni. Przypomnijmy go sobie [2]).

Przyjmujemy układ trzech współrzędnych prostokątnych.

Równanie powierzchni wogóle jest:

$$z = \varphi(x, y)$$

Na tej powierzchni zauważmy mały element jej, a raczej rzut tegoż na płaszczyznę XY, t. zn. prostokąt zamknięty np. dwiema prostemi równoległemi do osi YY^now i dwiema krzywemi. Gdy więc wzrośnie X (odcięta) o dx, a Y (rzędna) o dy, to te nieskończenie małe przyrosty utworzą prostokąt o bokach: dx i dy. Prostokąt ten

[1]) Bianchi Luigi: Vorlesungen über Differentialgeometrie Autorisierte deutsche Übersetzung v. Max Lukat, Oberlehrer in Hamburg. Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig 1896 8. I. Str. 357.

[2]) Por. Schlömilch Lehrbuch d. höh. Analysis I. Str. 363.

uważać możemy jako rzut małego kawałka (elementu) powierzchni — nazwijmy go σ, a jeśli kąt, jaki ten nieskończenie mały element σ z płaszczyzną XY zawiera, czyli kąt między płaszczyzną styczną do σ, a płaszczyzną XY nazwiemy α, to oczywiście:

$$dx\,dy = \sigma \cos\alpha, \quad \text{a stąd}$$

$$\sigma = \frac{dx\,dy}{\cos\alpha}.$$

α jest to kąt zawarty pomiędzy dwiema płaszczyznami, równa się tedy kątowi, jakie zamykają proste normalne do tych płaszczyzn. Jest to więc kąt zawarty pomiędzy normalną do powierzchni w odnośnym punkcie, a osią Z (normalną do płaszczyzny XY). Wiemy zaś [1]), że dostawa tego kąta, a więc:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}, \quad \text{a więc}$$

$$\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dx\,dy,$$

a gdy zsumujemy te elemenciki, nadając x i y kolejno wszelkie możliwe wartości, otrzymamy na wielkość (S) powierzchni wzór:

$$S = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dx\,dy,$$

albo, — wprowadzając znaki Monge'go [2]), tj. kładąc

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q \quad \text{— otrzymamy}$$

$$S = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}.\, dx\,dy.$$

Wedle prawideł rachunku waryacyjnego będzie powierzchnia S najmniejszą, jeżeli waryacya

$$\delta S = \iint \left| \frac{\delta F}{dz} - \frac{d}{dx}\frac{dF}{dp} - \frac{d}{dy}\frac{dF}{dq} \right| \delta z\, dx\,dy = 0 \text{ [3]}).$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{d}{dx}\frac{dF}{dp} + \frac{d}{dy}\frac{dF}{dq} = 0, \quad \text{czyli, — ponieważ w przykładzie naszym}$$

$$F = \sqrt{1+p^2+q^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left|\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right| + \frac{d}{dy}\left|\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right| = 0, \quad \text{czyli}$$

[1]) Por. Schlömilch l. c. str. 121.

[2]) Bianchi l. c. str. 114. $\left| \frac{dz}{dx} = p;\ \frac{dz}{dy} = q;\ \frac{d^2z}{dx^2} = r;\ \frac{d^2z}{dx\,dy} = s;\ \frac{d^2z}{dy^2} = t \right|$.

[3]) Jest to znany wzór Delaunay'a.

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot r - p\,\dfrac{pr+qs}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{1+p^2+q^2}+\frac{\sqrt{1+p^2+x^2}\cdot t - q\,\dfrac{ps+qt}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{1+p^2+q^2}=0.$$

Po uwolnieniu od mianownika

$$\sqrt{1+p^2+q^2}\,\Big|r+t\Big| - \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\Big|p^2r+2pqs+q^2t\Big| = 0.$$

$$(1+p^2+q^2)\,(r+t) - (p^2r+2pqs+q^2t) = 0.$$

$$r+p^2r+q^2r+t+p^2t+q^2t - p^2r - 2pqs - q^2t = 0.$$

$$r+q^2r - 2pqs+t+p^2t = 0,\ \text{czyli}\ r(1+q^2) - 2pqs+t(1+p^2) = 0. \quad (a)$$

§ 2.

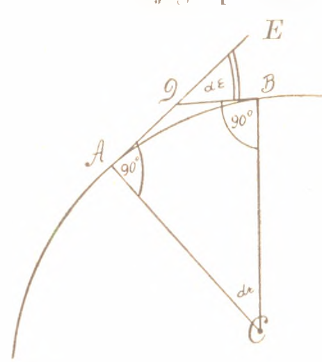
Chcąc poznać właściwe znaczenie tego równania *(a)*, musimy wprzód urobić sobie niektóre pojęcia.

Mówi się o większej lub mniejszej k r z y w i ź n i e linii krzywej. Cóż to jest ta krzywizna i jak się ją mierzy?

Każdą linię możemy nazwać śladem punktu poruszającego się. Jeśli punkt porusza się nie zmieniając kierunku, śladem jego jest linia prosta, jeżeli zaś punkt zmienia kierunek poruszając się i to zmienia ciągle, śladem jego jest linia krzywa. Im łagodniejszem jest to zbaczanie punktu, tem mniejszą jest krzywizna linii krzywej w ten sposób powstałej, — a im to zbaczanie punktu poruszającego się jest gwałtowniejsze, tem większą jest ta krzywizna.

Koło ma tem większą krzywiznę (est plus courbé), im mniejszym jest jego promień. Rozumie się więc samo przez się, że miarą krzywizny koła jest odwrotność jego promienia: $\frac{1}{R}$. Jeżeli zaś mamy jakąś krzywę, to będzie można w każdym jej elemencie zakreślić koło ściśle styczne (osculateur, Schmiegungs- oder Osculationskreis), a więc i w tym wypadku miarą krzywizny linii krzywej będzie krzywizna koła ściśle stycznego, a więc odwrotność jego promienia.

Do tego samego rezultatu można dojść w inny jeszcze sposób:



Weźmy pod uwagę łuk koła $\overline{AB}$. W punktach A i B poprowadźmy styczne AE i DB i promienie AC i BC. Kąt zawarty pomiędzy stycznemi tj.

$$\sphericalangle\ EDB = \sphericalangle\ ACB$$

nazywa się k ą t e m s t y c z n o ś c i (l'angle de contingence); nazwijmy go dε.

Z planimetryi wiadomo, że

$\sphericalangle$ ACB = AC = $\overset{\frown}{AB}$, stąd, jeżeli nazwiemy krótko $\overset{\frown}{AB}$ = ds; AC = ρ, to

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

Możemy więc stosunek $\frac{d\varepsilon}{ds}$ uważać jako miarę krzywizny łuku $\overset{\frown}{AB}$.

W analogiczny sposób zauważmy dwa nieskończenie blizkie punkty M i M_1 jakiejś (dowolnej) krzywej. Jeśli kąt, zawarty pomiędzy stycznemi tejże krzywej w tych punktach wystawionemi (nazwijmy go $\triangle\varepsilon$), podzielimy przez długość łuku $\overset{\frown}{MM_1}$, to wskutek nieskończonego zbliżania się punktów M i M_1 dąży iloraz $\frac{\triangle\varepsilon}{MM_1}$ do pewnej stałej granicy, którą (przez analogię) nazywamy miarą krzywizny krzywej w punkcie M (erste Krümmung, Biegung oder Flexion, la courbure) i znaczymy ją przez $\frac{1}{\rho}$, gdzie ρ jest promieniem krzywizny (Radius der ersten Krümmung, rayon de courbure).

Oprócz tej krzywizny i niezawiśle od tej posiadają krzywe przestrzenne inną jeszcze krzywiznę, którą nazywamy s k r ę c e n i e m (zweite Krümmung, la torsion). Krzywizna ta zależy od (większego lub mniejszego) oddalania się krzywej od płaszczyzny ściśle stycznej. W analogiczny zupełnie jak poprzednio sposób otrzymamy jako miarę tej krzywizny granicę, do jakiej zdąża iloraz $\frac{\triangle\omega}{\triangle s}$ przy nieskończonem zbliżaniu się dwóch bezpośrednio sąsiednich, a więc nieskończenie blizkich punktów. $\triangle\omega$ bowiem jest kątem zawartym między ściśle stycznemi płaszczyznami w dwóch sąsiednich punktach do krzywej wyprowadzonemi, a więc jest kątem skręcenia, $\triangle s$ zaś jest łukiem danej krzywej, łączącym dwa punkty.

§ 3.

Analogicznie mówi się o k r z y w i ź n i e p o w i e r z c h n i. Krzywizny tej nie można określić jednem słowem.

Chcąc poznać krzywiznę powierzchni w jakimś punkcie, prowadzimy w tym punkcie normalną do powierzchni i przeprowadzamy przez tę normalną wszelkie możliwe płaszczyzny. Każda z nich przetnie daną powierzchnię w linii krzywej, każdą zaś z tych krzywych nazywamy c i ę c i e m n o r m a l n e m powierzchni. Każda więc z tych krzywych, przecięć normalnych, posiada pewną krzywiznę (w każdym punkcie inną), a prawo, według którego zmienia się krzywizna poszczególnych krzywych przecięcia, gdy z jednej przechodzimy do drugiej, — prawo to jest **wyrazem krzywizny** powierzchni.

W ten sposób określają zgodnie wszyscy autorowie to pojęcie [1], co się zaś tyczy analitycznego przedstawienia sprawy, to każdy używa nieco odmiennego sposobu. Najjaśniejszego sposobu użył **Schlömilch**, a to mniej więcej następującego:

Chcemy zbadać zmiany zachodzące w krzywiźnie przecięć normalnych powierzchni przy przejściu do coraz to innej krzywej przecięcia. Krzywe te otrzymujemy wskutek przecinania się powierzchni badanej z płaszczyznami przez normalną powierzchni w punkcie M(xyz) poprowadzonemi.

Normalną w punkcie M(xyz) określają równania:

$$\left.\begin{aligned} (\xi - x) + p(\zeta - z) &= 0 \\ (\eta - q) + q(\zeta - z) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (a)^{2)}$$

Równanie dowolnej płaszczyzny jest:

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 1 \qquad (b)$$

Jeśli płaszczyzna *(b)* ma przechodzić przez normalną *(a)*, musi równanie *(b)* sprawdzać się i wtedy, gdy w niem zamiast ξ i η wstawimy wartości z równania *(a)*. Postąpiwszy w ten sposób otrzymujemy:

$$(\gamma - \alpha p - \beta q)\zeta + \alpha x + \beta y + (\alpha p + \beta q) z = 1.$$

Równanie to spełni się dla każdego (dowolnego) ζ tylko wtedy, jeżeli równocześnie będzie:

$$\gamma = \alpha p + \beta q \qquad (c)$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 1 \qquad (d)$$

Tak oznaczona płaszczyzna, przechodząca przez normalną, przecina powierzchnię w krzywej, zwanem przecięciem normalnem.

Eliminując z równania *(d)* i z równania powierzchni

$$z = \varphi(xy) \qquad (e)$$

raz ξ, raz y, otrzymamy równanie przecięcia tego, promień zaś krzywizny (ρ) określamy równaniem

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\left(\frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{dx^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2}{\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx^2}\right)^3} \qquad (\alpha)$$

[1]) Por. **Bianchi** l. c. I. Str. 103; **Laurent** Traite d'analyse, Str. 425 i n., 431—443, 457. **Darboux** Theorie des surfaces. Str. 97—106. **Schlömilch** l. c. Str. 123—130.

[2]) NB.: p, q etc. są to znaki wprowadzone przez **Mongego**.

Zadaniem naszem obecnie: znaleźć wartość dla $\frac{1}{\rho^2}$.

W tym celu zróżniczkujmy równania *(d)* i *(e)*:

$$\left.\begin{aligned} \alpha dx + \beta dy + \gamma dz &= 0 \\ dz = \frac{d\varphi}{dx} dx &+ \frac{d\varphi}{dy} dy \\ &= pdx + qdy. \end{aligned}\right| \qquad (f)$$

Różniczkując powtórnie i uwzględniając $d^2x = 0$ otrzymujemy:

$$\left.\begin{aligned} \beta d^2y + \gamma d^2z &= 0 \\ d^2z = rdx^2 + 2sdxdy &+ tdy^2 + qd^2y \end{aligned}\right| \qquad (g)$$

Z równań *(f)* napisanych w sposób:

$$\left.\begin{aligned} \alpha dx + \beta dy + \gamma dz &= 0 \\ pdx + qdy - dz &= 0 \end{aligned}\right| \qquad (h)$$

otrzymujemy (dodawszy do pierwszego drugie, pomnożone przez γ):

$$(\alpha + \gamma p) dx + (\beta + \gamma q) dy = 0, \quad \text{a stąd}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha + \gamma p}{\beta + \gamma q} \qquad (i)$$

a dodawszy do pierwszego, pomnożonego przez: $+q$ drugie, pomnożone przez $(-\beta)$:

$$-(\beta p - \alpha q) dx + (\beta + \gamma q) dz = 0, \quad \text{skąd:}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\beta p - \alpha q}{\beta + \gamma q} \qquad (k)$$

Aby otrzymać drugie pochodne podzielmy równanie *g* przez dx^2:

$$\beta \frac{d^2y}{dx^2} + \gamma \frac{d^2z}{dx^2} = 0$$

$$r + 2s \frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + q \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2z}{dx^2} = 0,$$

nazwawszy zaś — dla krótkości —

$$r + 2s \frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = M \quad \text{otrzymamy równa-}$$

nia *(g)* w postaci:

$$\left.\begin{aligned} \beta \frac{d^2y}{dx^2} + \gamma \frac{d^2z}{dx^2} &= 0 \\ M + q \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2z}{dx^2} &= 0 \end{aligned}\right| \qquad (l)$$

Dodawszy do pierwszego drugie, pomnożone przez γ, otrzymujemy:

$$M\gamma + (\beta + \gamma q) \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \text{a stąd}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M\gamma}{\beta + \gamma q} \qquad (m)$$

dodawszy zaś do pierwszego, pomnożonego przez $(+q)$ drugie pomnożone przez $(-\beta)$ otrzymujemy

$$(\gamma q + \beta)\frac{d^2z}{dx^2} - M\beta = 0, \quad \text{a stąd:}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{M\beta}{\gamma q + \beta} \qquad (n)$$

Wskutek tych wartości *(i)* i *(k)* będzie:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

$$= 1 + \left(\frac{\alpha + \gamma p}{\beta + \gamma q}\right)^2 + \left(\frac{\beta p - \alpha q}{\beta + \gamma q}\right)^2, \quad \text{czyli:}$$

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx^2} = \frac{(\beta + \gamma q)^2 + (\alpha + \gamma p)^2 + (\beta p - \alpha q)^2}{(\beta + \gamma q)^2} \qquad (o)$$

Ale:

$$(\beta + \gamma q)^2 + (\alpha + \gamma p)^2 + (\beta p - \alpha q)^2 =$$

$$= \beta^2 + 2\beta\gamma q + \gamma^2 q^2 + \alpha^2 + 2\alpha\gamma p + \gamma^2 p^2 + \beta^2 p^2 - 2\alpha\beta pq + \alpha^2 q^2$$

$$= \alpha^2(1+q^2) + \beta^2(1+p^2) + \gamma^2(p^2+q^2) + 2(\beta q + \alpha p)\gamma - 2\alpha\beta pq$$

$$= \alpha^2(1+p^2+q^2) + \beta^2(1+p^2+q^2) + \gamma^2(1+p^2+q^2) + 2(\beta q - \alpha p)\gamma - 2\alpha\beta pq -$$
$$- \alpha^2 p^2 - \beta^2 q^2 - \gamma^2$$

$$= (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(1+p^2+q^2) + 2(\beta q + \alpha p) - 2\alpha\beta pq - \alpha^2 p^2 - \beta^2 q^2 - \gamma^2 \ ^{1)}$$

$$= (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(1+p^2+q^2) + 2\alpha^2 p^2 + 2\beta^2 q^2 + 4\alpha\beta pq - 2\alpha\beta pq - \alpha^2 p^2 -$$
$$- \beta^2 q^2 - \alpha^2 p^2 - 2\alpha\beta pq - \beta^2 q^2$$

$$= (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(1+p^2+q^2)$$

Wracając zatem do równania *(o)* mamy:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx^2} = \frac{(1+p^2+q^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{(\beta + q\gamma)^2} \qquad (p)$$

Uwzględniając równania *(i)*, *(k)*, *(m)*, *(n)*, otrzymujemy

$$\frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{dx^3} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$= -\frac{\alpha + \gamma p}{\beta + \gamma q}\cdot\frac{M\beta}{\beta + \gamma q} + \frac{\beta p - \alpha q}{\beta + \gamma q}\cdot\frac{M\gamma}{\beta + \gamma q}$$

$$= -\frac{M}{(\beta + \gamma q)^2}\left|\alpha\beta + \beta\gamma p - \beta p\gamma + \alpha q\gamma\right|$$

$$= -\frac{M}{(\beta + \gamma q)^2}\left|\beta + \gamma q\right|\alpha, \quad \text{czyli ostatecznie:}$$

$$\frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{dx^3} = -\frac{M\alpha}{\beta + \gamma q} \qquad (r)$$

---

[1]) Wstawiamy: $\gamma = \alpha p + \beta q$ (równanie *c* str. 5).

Wstawiając tedy w równanie (α) wartości z równań *(r)*, *(m)*, *(n)*, *(p)*, otrzymujemy:

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\left(\frac{M\alpha}{\beta+\gamma q}\right)^2 + \left(\frac{M\gamma}{\beta+\gamma q}\right)^2 + \left(\frac{M\beta}{\beta+\gamma q}\right)^2}{\frac{(1+p^2+q^2)^3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3}{(\beta+\gamma q)^6}}$$

Pomnożywszy zaś licznik i mianownik przez $(\beta+\gamma q)^6$:

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(\beta+\gamma q)^4\,[M^2\alpha^2+M^2\beta^2+M^2\gamma^2]}{(1+p^2+q^2)^3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3} \quad \text{albo}$$

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{M^2(\beta+\gamma q)^4}{(1+p^2+q^2)^3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}$$

Albo — nazwawszy $1+p^2+q^2 = N^2$

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{M^2(\beta+\gamma q)^4}{N^6(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2} \quad \text{skąd}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(\beta+\gamma q)^2}{N^3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)} \quad \text{jako wyraz krzywizny przecięcia normalnego.}$$

Z równania *(p)* atoli mamy:

$$\frac{1+p^2+q^2}{(\beta+\gamma q)^2} = \frac{N^2}{(\beta+\gamma q)^2} = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dx^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}, \quad \text{a stąd}$$

$$\left(\frac{\beta+\gamma q}{N}\right)^2 = \frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)dx^2}{dx^2+dy^2+dz^2}, \quad \text{a że nadto}$$

$$M = r+2s\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2, \quad \text{więc}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{N}\cdot\frac{1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cdot\frac{(\beta+\gamma q)^2}{N^2}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r+2s\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{N(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}\cdot\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)dx^2}{dx^2+dy^2+dz^2}, \quad \text{czyli}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r+2s\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{N\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]}, \quad \text{a że według równania } (f)$$

$dz = pdx+qdy$, czyli

$$\frac{dz}{dx} = p+q\frac{dy}{dx}, \quad \text{przeto — znacząc krótko } \frac{dy}{dx} = y' \text{ —}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r+2sy'+ty'^2}{N\,[1+y'+(p+qy')^2]}$$

Ale p, q, r, s, t zawisłe są jedynie od natury powierzchni. Dla pewnej powierzchni tedy nie zmieniają one swej wartości, bez względu na to, jakie przecięcia poprowadzilibyśmy.

Tak więc jest $\frac{1}{\rho}$ funkcyą samego tylko y', a że

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha+\gamma p}{\beta+\gamma q} = -\frac{\alpha+(\alpha p+\beta q)p}{\beta+(\alpha p+\beta q)q}$$

$$= -\frac{\alpha+\alpha p^2+\beta pq}{\beta+\alpha pq+\beta q^2}$$

$$= -\frac{1+p^2+\frac{\beta}{\alpha}pq}{\frac{\beta}{\alpha}+pq+\frac{\beta}{\alpha}q^2}$$

$$= -\frac{(1+p^2)+\frac{\beta}{\alpha}pq}{pq+\frac{\beta}{\alpha}(1+q^2)}$$

a więc to y' jest funkcyą stosunku: $\frac{\beta}{\alpha}$, przeto i $\frac{1}{\rho}$ t. j. krzywizna przecięcia normalnego zmienia-się li tylko ze zmianą stosunku $\frac{\beta}{\alpha}$.

Tak więc można krzywiznę $\frac{1}{\rho}$ uważać za funkcyę pochodnej $y' = \frac{dy}{dx}$.

Według zasad rachunku całkowego wzrastać będzie funkcya $\frac{1}{\rho}$, jak długo $\frac{d}{dy'}\left(\frac{1}{\rho}\right) > 0$ będzie, będzie zaś maleć skoro $\frac{d}{dy'}\left(\frac{1}{\rho}\right) < 0$.

Gdy więc $\frac{d}{dy'}\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$ następuje zmiana krzywizny.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r+2sy'+ty'^2}{N[1+y'^2+(p+qy')^2]}, \text{ a więc } \frac{d}{dy'}\left(\frac{1}{\rho}\right) =$$

$$= \frac{2N[1+y'^2+(p+qy')^2](s+ty')-2N[r+2sy'+ty'^2][y'+(p+qy')q]}{N^2[1+y'^2+(p+qy')^2]^2}$$

$\frac{d}{dy'}\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$, jeżeli licznik równa się zeru tj. jeżeli:

$$2N[1+y'^2+(p+qy')^2][s+ty']-2N[r+2sy'+ty'^2][y'+(p+qy')q] = 0,$$

czyli: $[1+y'^2+(p+qy')^2](s+ty')-[r+2sy'+ty'^2][y'+(p+qy')q] = 0$ I.

Wykonawszy działania otrzymujemy:

$$s+sy'^2+p^2s+2pqsy'+q^2sy'^2+ty'+ty'^3+p^2ty'+2pqty'^2+tq^2y'^3-ry'-$$
$$-2sy'^2-ty'^3-pqr-2pqsy'-pqty'^2-q^2ry'-2q^2sy'^2-tq^2y'^3 = 0.$$

Czyli po zredukowaniu:

$$s+p^2s+ty'+p^2ty'+pqty'^2-ry'-sy'-pqr-q^2ry'-q^2sy'^2=0$$

Uporządkujmy równanie według potęg y':

$$-[(1+q^2)s-pqt]y'^2-[(1+q^2)r-(1+p^2)t]y'-[pqr-(1+p^2)s]=0$$

albo

$$[(1+q^2)s-pqt]y'^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]y'+[pqr-(1+p^2)s]=0 \qquad \text{II.}$$

Powiedzieliśmy powyżej, że funkcya $\frac{1}{\rho}$ rośnie, gdy

$$\frac{d}{dy'}\left(\frac{1}{\rho}\right)>0,$$

maleje zaś, gdy

$$\frac{d}{dy'}\left(\frac{1}{\rho}\right)<0.$$

Skoro więc $\frac{d}{dy'}\left(\frac{1}{\rho}\right)=0$, następuje zmiana.

Jak to rozumieć?

Znaczy to, że gdy $\frac{d}{dy'}\left(\frac{1}{\rho}\right)=0$, to $\frac{1}{\rho}$ przestaje wzrastać (wzgl. maleć), a więc, że $\frac{1}{\rho}$ posiada dla $\frac{d}{dy'}\left(\frac{1}{\rho}\right)=0$ największą (względnie najmniejszą) wartość.

A co oznacza $\frac{1}{\rho}$?

$\frac{1}{\rho}$ oznacza krzywiznę normalnego przecięcia, a więc równanie II podaje te wartości na y', dla których przecięcie normalne posiada największą (względnie najmniejszą) krzywiznę; a że równanie II jest — ze względu na y' — stopnia drugiego, widocznie więc istnieją dwa przecięcia normalne różniące się od innych tem, że jedno będzie miało największy, drugie najmniejszy promień krzywizny. Takie przecięcia nazywamy **głównemi**, a odpowiednie promienie ρ **głównymi promieniami krzywizny** (rayons de courbure principaux) [1]).

§ 5.

Weźmy pod uwagę znane nam już równanie:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{r+2sy'^2+ty'^2}{N[1+y'^2+(p+qy')^2]}$$

$$[1+y'^2+(p+qy')^2](s+ty')-[r+2sy'+ty'^2]\cdot[y'+(p+qy')q]=0$$

[1]) Laurent l. c. Str. 427.

i napiszmy je w postaci:

$$\frac{N}{\rho} = \frac{r+2sy'+ty'^2}{1+y'^2+(p+qy')^2} = \frac{1}{\lambda} \qquad (1)$$

$$\frac{s+ty'}{pq+(1+q^2)y'} = \frac{r+2sy'+ty'^2}{1+y'^2+(p+qy')^2} = \frac{1}{\lambda} \qquad (2)$$

Z pierwszego:

$$1+y'^2+(p+qy')^2 = \lambda(r+2sy'+ty'^2), \quad \text{czyli}$$

$$1+y'^2+p^2+2pqy'+q^2y'^2 = \lambda(r+2sy'+ty'^2) \quad \text{albo}$$

$$(1+p^2)+2pqy'+(1+q^2)y'^2 = \lambda(r+2sy'+ty'^2) \qquad (3)$$

Z drugiego:

$$pq+(1+q^2)y' = \lambda(s+ty') \qquad (4)$$

Pomnożywszy równanie (4) przez y' dostajemy:

$$pqy'+(1+q^2)y'^2 = \lambda(sy'+ty'^2) \qquad (5)$$

Odjąwszy zaś równanie (5) od (3)-go:

$$(1+p^2)+pqy' = \lambda(r+sy'), \quad \text{a stąd:}$$

$$y' = \frac{\lambda r-(1+p^2)}{pq-\lambda s} \qquad \text{Z równania zaś 4 go:}$$

$$y' = \frac{pq-\lambda s}{\lambda t-(1+q^2)} \qquad \text{Z tych dwóch równań:}$$

$$[\lambda r-(1+p^2)][\lambda t-(1+q^2)] = (pq-\lambda s)^2, \quad \text{czyli}$$

$$\lambda^2rt-\lambda r(1+q^2)-\lambda t(1+p^2)+(1+p^2)(1+q^2) = p^2q^2-2pq\lambda s+\lambda^2s^2$$

albo $$\lambda^2[rt-s^2]-\lambda[r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)]+(1+p^2+q^2) = 0 \qquad (6)$$

Ponieważ atoli $\lambda = \frac{\rho}{N}$,

$1+p^2+q^2 = N^2$, więc równanie (6) podać możemy w postaci:

$$(rt-s^2)\rho^2-[r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)]N\rho+N^4 = 0, \qquad \text{czyli}$$

$$\rho^2 - \frac{r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)}{rt-s^2} N\cdot\rho + \frac{N^4}{rt-s^2} = 0$$

Stąd — opierając się na własnościach współczynników stopnia drugiego — otrzymujemy (nazywając jeden pierwiastek ρ_1, drugi ρ_2):

$$\rho_1+\rho_2 = \frac{r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)}{rt-s^2} N$$

$$\rho_1\rho_2 = \frac{N^4}{rt-s^2}, \quad \text{a stąd}$$

$$K = \frac{1}{\rho_1\rho_2} = \frac{rt-s^2}{N^4}$$

$$\left.\begin{array}{l} H = \dfrac{1}{\rho_1} + \dfrac{1}{\rho_2} = \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \\ = \dfrac{r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)}{N^3} \end{array}\right| \quad \text{III.}$$

Równania te III są bardzo ważne: Wyrażenie

$$K = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}$$

nazywamy krzywizną powierzchni.

Tę krótką nazwę spotykamy u Laurent'a [1]), Schlömilcha [2]), podczas gdy Bianchi [3]) daje temu wyrażeniu nazwę: »miara krzywizny«, »krzywizna Gaussa« (Krümmungsmass, totale oder Gaussische Krümmung) i odróżnia tę, całkowitą krzywiznę od krzywizny innej, którą nazywa średnią (mittlere Krümmung der Fläche), a której miarą jest

$$H = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \ ^{4})$$

Porównajmy to wyrażenie dopiero co otrzymane tj.

$$H = \frac{r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)}{N^3}$$

z równaniem powierzchni najmniejszej:

$$r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2) = 0$$

to przekonamy się, że **H** $= 0$ tj. że:

A) Powierzchnia najmniejsza charakteryzuje się tem, że w każdym jej punkcie jest średnia jej krzywizna równą zeru.

Jeśli atoli $H = \dfrac{1}{\rho_1} + \dfrac{1}{\rho_2} = \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} = 0$, to musi

$$\rho_1 + \rho_2 = 0 \quad \text{t. zn. że}$$

B) W każdym punkcie powierzchni najmniejszej jest suma jej promieni krzywizny równą zeru czyli, że $\rho_1 = -\rho_2$ tj.

C) W każdym punkcie powierzchni najmniejszej są główne promienie krzywizny równe co do bezwzględnej wartości, ale o przeciwnych znakach [5]).

[1]) l. c. str. 403.

[2]) l. c. str. 305.

[3]) Bianchi l. c. Str. 130.

[4]) Bianchi ibid. Str. 105.

[5]) Tak interpretuje równanie to Bianchi l. c. str. 357, idąc w tym względzie śladem Meusniera, podczas gdy interpretacyę *B)* znajdujemy u Darboux'a l. c. str. 283.

Zanim przejdziemy do innego zdefiniowania tej własności powierzchni minimalnej, zauważyć musimy, że te napozór identyczne definicye *A)* i *B)* w gruncie rzeczy nie są zupełnie równoważne, lecz, że nawet nie są obie w jednej mierze wystarczające.

Pierwsza z nich tj. definicya *A)* charakteryzuje powierzchnie najmniejsze w zupełności, nie można tego atoli powiedzieć o definicyi drugiej; jest ona koniecznym, ale nie ogólnym, zawsze wystarczającym (nécessaire, mais ne toujours suffisante pas) warunkiem, aby powierzchnia jakaś była najmniejszą.

Aby to wykazać musimy nasze równanie:

$$r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)=0$$

przekształcić.

§ 6.

Weźmy pod uwagę element powierzchni dS. Nazwijmy kąty, jakie element ten z płaszczyznami XY, YZ, ZX tworzy, kolejno przez α, β i γ, to jasnem jest, że rzuty tego elementu powierzchni na każdą z tych płaszczyzn będą mieć wartości:

$$\left.\begin{aligned} dX\,dY &= dS\cos\alpha; \\ dY\,dZ &= dS\cos\beta; \\ dZ\,dX &= dS\cos\gamma; \end{aligned}\right| \qquad (\alpha)$$

przyczem $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$ $\qquad (\beta)$

Eliminując z równań (α) i (β) dostawy otrzymamy równanie:

$$dS^2=(dX\,dY)^2+(dY\,dZ)^2+(dZ\,dX)^2 \qquad (\gamma)$$

Na powierzchni obieramy dowolny punkt $M(x\,y\,z)$. Obrawszy na tejże powierzchni drugi punkt $M'(X\,Y\,Z)$ o λ od pierwszego oddalony, i jeśli odcinek ten λ zawiera z osiami XX, YY, ZZ kąty α_1, β_1, γ_1, to nazwawszy

$$\cos\alpha_1=c \qquad \cos\beta_1=c' \qquad \cos\gamma_1=c''$$

otrzymamy dla współrzędnych punktu M' wartości

$$X=x+c\lambda \qquad Y=y+c'\lambda \qquad Z=z+c''\lambda \qquad (\delta)$$

Ale my wiemy, że powierzchnię dwojako można określić, tj. albo jej równaniem, tj. związkiem, jaki zachodzi między współrzędnemi dowolnego jej punktu, albo przez wyrażenie współrzędnych dowolnego punktu powierzchni jako funkcye dwóch niezawisłych zmiennych *u* i *v*. Nie potrzeba dodawać, że ten drugi sposób jest ogólniejszym, jeśli bowiem temi dwoma niezawisłemi zmiennemi będą dwie współrzędne punktu, to wyrażając trzecią współrzędną jako funkcyę dwóch poprzednich, podamy tem samem i owo równanie.

Każdej szczególowej wartości tego *u* lub *v* odpowiada pewna krzywa, określona związkami:

$$x = f_1(u, v_1), \quad y = f_2(u, v_1), \quad z = f_3(u, v_1), \qquad \text{względnie}$$
$$x = f_1(u_1, v), \quad y = f_2(u_1, v), \quad z = f_3(u_1, v)$$

(w pierwszym wypadku u jest zmienną, a v_1 stałą, w drugim wypadku odwrotnie).

Jeśli zaś tym u i v nadamy równocześnie wartości ściśle określone, wtedy związki powyższe określą punkt powierzchni, punkt przecięcia się owych krzywych:

$$u = u_1, \qquad v = v_1.$$

Z tego powodu nazywamy: $u = u_1$, $v = v_1$, albo ogólniej

$$u = \text{constans} \qquad v = \text{const.}$$

krzywolinijnemi współrzędnemi, albo współrzędnemi Gaussa.

Wróćmy obecnie do związków (δ) i pomyślmy te współrzędne jako funkcye dwóch zmiennych u i v, to otrzymamy po zróżniczkowaniu:

$$\begin{aligned}
dX &= \left|\frac{dx}{du} + c\frac{d\lambda}{du} + \lambda\frac{dc}{du}\right| du + \left|\frac{dx}{dv} + c\frac{d\lambda}{dv} + \lambda\frac{dc}{dv}\right| dv \\
dY &= \left|\frac{dy}{du} + c'\frac{d\lambda}{du} + \lambda\frac{dc'}{du}\right| du + \left|\frac{dy}{dv} + c'\frac{d\lambda}{dv} + \lambda\frac{dc'}{dv}\right| dv \qquad (1) \\
dZ &= \left|\frac{dz}{du} + c''\frac{d\lambda}{du} + \lambda\frac{dc''}{du}\right| du + \left|\frac{dz}{dv} + c''\frac{d\lambda}{dv} + \lambda\frac{dc''}{dv}\right| dv
\end{aligned}$$

Aby równaniu nadać prostszą formę, przyjmijmy parametry linii krzywizny jako współrzędne krzywolinijne[1]). Wskutek tego otrzymamy:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dv} + R\frac{dc}{dv} = 0 \qquad \frac{dy}{du} + R\frac{dc'}{du} = 0 \qquad \frac{dz}{du} + R\frac{dc''}{du} = 0 \\
&\frac{dx}{dv} + R'\frac{dc}{dv} = 0 \qquad \frac{dy}{dv} + R'\frac{dc'}{dv} = 0 \qquad \frac{dz}{dv} + R'\frac{dc''}{dv} = 0
\end{aligned} \qquad (2)$$

Wstawiwszy tedy za $\frac{dx}{du}\dots$, $\frac{dx}{dv}\dots$, wartości z równań (2) otrzymane z równania (1) otrzymamy:

$$\begin{aligned}
dX &= (\lambda - R)\frac{dc}{du}du + (\lambda - R')\frac{dc}{dv}dv + c\left|\frac{d\lambda}{du}du + \frac{d\lambda}{dv}dv\right| \\
dY &= (\lambda - R)\frac{dc'}{du}du + (\lambda - R')\frac{dc'}{dv}dv + c'\left|\frac{d\lambda}{du}du + \frac{d\lambda}{dv}dv\right| \\
dZ &= (\lambda - R)\frac{dc''}{du}du + (\lambda - R')\frac{dc''}{dv}dv + c''\left|\frac{d\lambda}{du}du + \frac{d\lambda}{dv}dv\right|
\end{aligned}$$

---

[1]) Linią krzywizny powierzchni jest krzywa, wzdłuż której wyprowadzone normalne do powierzchni tworzą powierzchnię linijną (rozwijalną). Jeśli wprowadzamy dwie zmienne: u i v, to dla analitycznego określenia krzywej potrzeba jedną z nich uczynić stałą, a więc $u = \text{const.}$ albo $v = \text{const.}$

Wartości te wstawić musimy w równanie (γ):

$$dS^2 = (dX\,dY)^2 + (dY\,dZ) + (dZ\,dX)^2.$$

W tym celu utwórzmy sobie iloczyny $dX\,dY$.....

$$dX\,dY = (\lambda - R)^2 \frac{dc}{du}\frac{dc'}{du} du^2 + (\lambda - R)(\lambda - R')\frac{dc}{du}\frac{dc'}{dv} du\,dv +$$
$$+ c'(\lambda - R)\frac{dc}{du}\left|\frac{d\lambda}{du}du^2 + \frac{d\lambda}{dv}du\,dv\right| + (\lambda - R)(\lambda - R')\frac{dc}{dv}\frac{dc'}{du}du\,dv +$$
$$+ (\lambda - R')^2\frac{dc}{dv}\frac{dc'}{dv}dv^2 + c'(\lambda - R')\frac{dc}{dv}\left|\frac{d\lambda}{du}du\,dv + \frac{d\lambda}{dv}dv^2\right| +$$
$$+ c(\lambda - R)\frac{dc'}{du}\left|\frac{d\lambda}{du}du^2 + \frac{d\lambda}{dv}du\,dv\right| + c(\lambda - R')\frac{dc'}{dv}\left|\frac{d\lambda}{du}du\,dv + \frac{d\lambda}{dv}dv^2\right| +$$
$$+ c\,c'\left|\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2 du^2 + 2\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}du\,dv + \left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 dv^2\right|$$

$$dy\,dZ = (\lambda - R)^2\frac{dc'}{du}\frac{dc''}{du}du^2 + (\lambda - R)(\lambda - R')\frac{dc'}{du}\frac{dc''}{dv}du\,dv +$$
$$+ c''(\lambda - R)\frac{dc'}{du}\left|\frac{d\lambda}{du}du^2 + \frac{d\lambda}{dv}du\,dv\right| + (\lambda - R)(\lambda - R')\frac{dc'}{dv}\frac{dc''}{du}du\,dv +$$
$$+ (\lambda - R')^2\frac{dc'}{dv}\frac{dc''}{dv}dv^2 + c''(\lambda - R')\frac{dc'}{dv}\left|\frac{d\lambda}{du}du\,dv + \frac{d\lambda}{dv}dv^2\right| +$$
$$+ c'(\lambda - R)\frac{dc''}{du}\left|\frac{d\lambda}{du}du^2 + \frac{d\lambda}{dv}du\,dv\right| + c'(\lambda - R')\frac{dc''}{dv}\left|\frac{d\lambda}{du}du\,dv +\right.$$
$$\left. + \frac{d\lambda}{dv}dv^2\right| + c'c''\left|\left(\frac{d\lambda}{du}\right)du^2 + 2\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}du\,dv + \left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 dv^2\right|$$

$$dZ\,dX = (\lambda - R)^2\frac{dc''}{du}\frac{dc}{du}du^2 + (\lambda - R)(\lambda - R')\frac{dc''}{du}\frac{dc}{dv}du\,dv +$$
$$+ c(\lambda - R)\frac{dc''}{du}\left|\frac{d\lambda}{du}du^2 + \frac{d\lambda}{dv}du\,dv\right| + (\lambda - R)(\lambda - R')\frac{dc''}{dv}\frac{dc}{du}du\,dv +$$
$$+ (\lambda - R')^2\frac{dc''}{dv}\frac{dc}{dv}dv^2 + c(\lambda - R')\frac{dc''}{dv}\left|\frac{d\lambda}{du}du\,dv + \frac{d\lambda}{dv}dv^2\right| +$$
$$+ c''(\lambda - R)\frac{dc}{du}\left|\frac{d\lambda}{du}du^2 + \frac{d\lambda}{dv}du\,dv\right| + c''(\lambda - R')\frac{dc}{dv}\left|\frac{d\lambda}{du}du\,dv +\right.$$
$$\left. + \frac{d\lambda}{dv}dv^2\right| + c''c\left|\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2 du^2 + 2\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}du\,dv + \left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 dv^2\right|$$

Szukając wartości dla drugiej potęgi każdego z tych iloczynów opuszczamy te wyrazy, w których będzie: du^4, dv^4, du^3dv, $du\,dv^3$, a więc zachowamy te tylko, w których będzie du^2dv^2. W tym celu uporządkujmy stosownie wyrazy dX dY...., zanim szukać będziemy wartości $dX^2 dY^2$....

Otrzymamy tedy:

$$\begin{aligned}
dX\,dY = du^2 \Big| & (\lambda-R)^2 \frac{dc}{du}\frac{dc'}{du} + c'(\lambda-R)\frac{dc}{du}\frac{d\lambda}{du} + c(\lambda-R)\frac{dc'}{du}\frac{d\lambda}{du} + \\
& + cc'\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2 \Big| + dv^2 \Big| (\lambda-R')^2 \frac{dc}{dv}\frac{dc'}{dv} + c'(\lambda-R')\frac{dc}{dv}\frac{d\lambda}{dv} + \\
& + c(\lambda-R')\frac{dc'}{dv}\frac{d\lambda}{dv} + cc'\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 \Big| + du\,dv \Big| (\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc}{du}\frac{dc'}{dv} + \\
& + c'(\lambda-R)\frac{dc}{du}\frac{d\lambda}{dv} + (\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc}{dv}\frac{dc'}{du} + c'(\lambda-R')\frac{dc}{dv}\frac{d\lambda}{du} + \\
& + c(\lambda-R)\frac{dc'}{du}\frac{d\lambda}{dv} + c(\lambda-R')\frac{dc'}{dv}\frac{d\lambda}{du} + 2cc'\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv} \Big|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dY\,dZ = du^2 \Big| & (\lambda-R)^2 \frac{dc'}{du}\frac{dc''}{du} + c''(\lambda-R)\frac{dc'}{du}\frac{d\lambda}{du} + c'(\lambda-R)\frac{dc''}{du}\frac{d\lambda}{du} + \\
& + c'c''\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2 \Big| + dv^2 \Big| (\lambda-R')^2 \frac{dc'}{dv}\frac{dc''}{dv} + c''(\lambda-R')\frac{dc'}{dv}\frac{d\lambda}{dv} + \\
& + c'(\lambda-R')\frac{dc''}{dv}\frac{d\lambda}{dv} + c'c''\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 \Big| + du\,dv \Big| (\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc'}{du}\frac{dc''}{dv} + \\
& + c''(\lambda-R)\frac{dc'}{du}\frac{d\lambda}{dv} + (\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc'}{dv}\frac{dc''}{du} + c''(\lambda-R')\frac{dc'}{dv}\frac{d\lambda}{du} + \\
& + c'(\lambda-R)\frac{dc''}{du}\frac{d\lambda}{dv} + c'(\lambda-R')\frac{dc''}{dv}\frac{d\lambda}{du} + 2c'c''\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv} \Big|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dZ\,dX = du^2 \Big| & (\lambda-R)^2 \frac{dc''}{du}\frac{dc}{du} + c(\lambda-R)\frac{dc''}{du}\frac{d\lambda}{du} + c''(\lambda-R)\frac{dc}{du}\frac{d\lambda}{du} + \\
& + c''c\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2 \Big| + dv^2 \Big| (\lambda-R')^2 \frac{dc''}{dv}\frac{dc}{dv} + c(\lambda-R')\frac{dc''}{dv}\frac{d\lambda}{dv} + \\
& + c''(\lambda-R')\frac{dc}{dv}\frac{d\lambda}{dv} + c''c\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 \Big| + du\,dv \Big| (\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc''}{du}\frac{dc}{dv} + \\
& + c(\lambda-R)\frac{dc''}{du}\frac{d\lambda}{dv} + (\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc''}{dv}\frac{dc}{du} + c(\lambda-R')\frac{dc''}{dv}\frac{d\lambda}{du} + \\
& + c''(\lambda-R)\frac{dc}{du}\frac{d\lambda}{dv} + c''(\lambda-R')\frac{dc}{dv}\frac{d\lambda}{du} + 2c''c\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv} \Big|
\end{aligned}$$

Ponieważ z kwadratu tych iloczynów uwzględniamy tylko współczynnik przy $du^2 dv^2$, przeto podnosząc każdy z tych 3 iloczynów do drugiej potęgi uwzględnimy podwójny iloczyn pierwszego wyrazu przez drugi i kwadrat trzeciego wyrazu, a resztę opuścimy.

Otrzymamy tedy

$$dX^2\,dY^2 = du^2\,dv^2 \Big| 2(\lambda-R)^2(\lambda-R')^2 \frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv} +$$

$$+2c'(\lambda-R)^2(\lambda-R')\frac{dc}{du}\frac{dc'}{du}\frac{dc}{dv}\frac{d\lambda}{dv} + 2(\lambda-R)^2(\lambda-R')c\frac{dc}{du}\frac{dc'}{dv}\frac{dc'}{du}\frac{d\lambda}{dv} +$$

$$+2cc'(\lambda-R)^2\frac{dc}{du}\frac{dc'}{du}\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 + 2c'(\lambda-R)(\lambda-R')^2\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\frac{dc'}{dv}\frac{d\lambda}{du} +$$

$$+2c'^2(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv} + 2cc'(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc}{du}\frac{dc'}{dv}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv} +$$

$$+2cc'^2(\lambda-R)\frac{dc}{du}\frac{d\lambda}{du}\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 + 2c(\lambda-R)(\lambda-R')^2\frac{dc}{dv}\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\frac{d\lambda}{du} +$$

$$+2cc'(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc'}{du}\frac{dc}{dv}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv} + 2c^2(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv} +$$

$$+2c^2c'(\lambda-R)\frac{dc'}{du}\frac{d\lambda}{du}\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 + 2cc'(\lambda-R')^2\frac{dc}{dv}\frac{dc'}{dv}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2 +$$

$$+2cc'^2(\lambda-R')\frac{dc}{dv}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2\frac{d\lambda}{dv} + 2c^2c'(\lambda-R')\frac{dc'}{dv}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2\frac{d\lambda}{dv} +$$

$$+2c^2c'^2\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 + (\lambda-R)^2(\lambda-R')^2\left(\frac{dc}{du}\right)^2\left(\frac{dc'}{dv}\right)^2 +$$

$$+c'^2(\lambda-R)^2\left(\frac{dc}{du}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 + (\lambda-R)^2(\lambda-R')^2\left(\frac{dc}{dv}\right)^2\left(\frac{dc'}{du}\right)^2 +$$

$$+c'^2(-R')^2\left(\frac{dc}{dv}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2 + c^2(\lambda-R)^2\left(\frac{dc'}{du}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 +$$

$$+c^2(\lambda-R')^2\left(\frac{dc'}{dv}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2 + 4c^2c'^2\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 +$$

$$+2c'(\lambda-R)^2(\lambda-R')\left(\frac{dc}{du}\right)^2\frac{dc'}{dv}\frac{d\lambda}{dv} + 2(\lambda-R)^2(\lambda-R')^2\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv} +$$

$$+2c'(\lambda-R)(\lambda-R')^2\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\frac{dc'}{dv}\frac{d\lambda}{du} + 2c(\lambda-R)^2(\lambda-R')\frac{dc}{du}\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\frac{d\lambda}{dv} +$$

$$+2(\lambda-R)(\lambda-R')^2\frac{dc}{du}\left(\frac{dc'}{dv}\right)^2\frac{d\lambda}{du} + 4cc'(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc}{du}\frac{dc'}{dv}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv} +$$

$$+2c'(\lambda-R)^2(\lambda-R')\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\frac{dc'}{du}\frac{d\lambda}{dv} + 2c'^2(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv} +$$

$$+2cc'(\lambda-R)^2\frac{dc}{du}\frac{dc'}{du}\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 + 2cc'(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc}{du}\frac{dc'}{dv}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv} +$$

$$+4cc'^2(\lambda-R)\frac{dc}{du}\frac{d\lambda}{dv}\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 + 2c'(\lambda-R)(\lambda-R')^2\left(\frac{dc}{dv}\right)^2\frac{dc'}{du}\frac{d\lambda}{du} +$$

$$+2c(\lambda-R)^2(\lambda-R')\frac{dc}{dv}\left(\frac{dc'}{du}\right)^2\frac{d\lambda}{dv}+2c(\lambda-R)(\lambda-R')^2\frac{dc}{dv}\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\frac{d\lambda}{du}+$$

$$+4cc'(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc'}{du}\frac{dc}{dv}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}+2cc'(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc}{du}\frac{dc'}{dv}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}+$$

$$+2cc'(\lambda-R')^2\frac{dc}{dv}\frac{dc'}{dv}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2+4cc'^2(\lambda-R')\frac{dc}{dv}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2\frac{d\lambda}{dv}+$$

$$+2c^2(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}+4c^2c'(\lambda-R)\frac{dc'}{du}\frac{d\lambda}{du}\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2+$$

$$+4c^2c'(\lambda-R')\frac{dc'}{dv}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2\frac{d\lambda}{dv}\Bigg|$$

$$dY^2dZ^2=du^2dv^2\Bigg|2(\lambda-R)^2(\lambda-R')^2\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}+$$

$$+2c''(\lambda-R)^2(\lambda-R')\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\frac{dc''}{du}\frac{d\lambda}{dv}+2c'(\lambda-R)^2(\lambda-R')\frac{dc'}{du}\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{d\lambda}{dv}+$$

$$+2c'c''(\lambda-R)^2\frac{dc'}{du}\frac{dc''}{du}\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2+2c''(\lambda-R)(\lambda-R')^2\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\frac{dc''}{dv}\frac{d\lambda}{du}+$$

$$+2c'c''(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}+2c'c''(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc'}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}+$$

$$+2c'c''^2(\lambda-R)\frac{dc'}{du}\frac{d\lambda}{du}\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2+2c'(\lambda-R)(\lambda-R')^2\frac{dc'}{du}\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{d\lambda}{du}+$$

$$+2c'c''(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc'}{dv}\frac{dc''}{du}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}+2c'^2(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}+$$

$$+2c'^2c''\frac{dc''}{du}\frac{d\lambda}{du}\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2+2c'c''(\lambda-R')^2\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2+$$

$$+2c'c''^2(\lambda-R')\frac{dc'}{dv}\frac{d\lambda}{dv}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2+2c'^2c''(\lambda-R')\frac{dc''}{dv}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2\frac{d\lambda}{dv}+$$

$$+2c'^2c''^2\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2+(\lambda-R)^2(\lambda-R')^2\left(\frac{dc'}{du}\right)^2\left(\frac{dc''}{dv}\right)^2+$$

$$+c''^2(\lambda-R)^2\left(\frac{dc'}{du}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2+(\lambda-R)^2(\lambda-R')^2\left(\frac{dc'}{dv}\right)^2\left(\frac{dc''}{du}\right)^2+$$

$$+c''^2(\lambda-R')^2\left(\frac{dc'}{dv}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2+c'^2(\lambda-R)^2\left(\frac{dc''}{du}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2+$$

$$+c'^2(\lambda-R')^2\left(\frac{dc''}{dv}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2+4c'^2c''^2\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2+$$

$$+2c''(\lambda-R)^2(\lambda-R')\left(\frac{dc'}{du}\right)^2\frac{dc''}{dv}\frac{d\lambda}{dv}+2(\lambda-R)^2(\lambda-R')^2\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}+$$

$$+2c''(\lambda-R)(\lambda-R')^2\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\frac{dc''}{dv}\frac{d\lambda}{du}+2c'(\lambda-R)^2(\lambda-R')\frac{dc'}{du}\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{d\lambda}{dv}+$$

$$
\begin{aligned}
&+2c'(\lambda-R)(\lambda-R')^2\frac{dc'}{du}\left(\frac{dc''}{dv}\right)^2\frac{d\lambda}{du}+4\,c'c''\frac{dc'}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}+\\
&+2c''(\lambda-R)^2(\lambda-R')\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\frac{dc''}{du}\frac{d\lambda}{dv}+2c''^2(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}+\\
&+2c'c''(\lambda-R)^2\frac{dc'}{du}\frac{dc''}{du}\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2+2c'c''(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc'}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}+\\
&+4c'c''^2(\lambda-R)\frac{dc'}{du}\frac{d\lambda}{du}\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2+2c''(\lambda-R)(\lambda-R')^2\left(\frac{dc'}{dv}\right)^2\frac{dc''}{du}\frac{d\lambda}{du}+\\
&+2c'(\lambda-R)^2(\lambda-R')\frac{dc'}{dv}\left(\frac{dc''}{du}\right)^2\frac{d\lambda}{dv}+2c'(\lambda-R)(\lambda-R')^2\frac{dc'}{dv}\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{d\lambda}{du}+\\
&+4c'c''(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc'}{dv}\frac{dc''}{du}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}+\\
&+2c'c''(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc'}{dv}\frac{dc''}{du}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}+2c'c''(\lambda-R')^2\frac{dc'}{dv}\frac{dc''}{dv}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2+\\
&+4c'c''^2(\lambda-R')\frac{dc'}{dv}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2\frac{d\lambda}{dv}+4c'^2c''(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}+\\
&+4c'^2c''(\lambda-R)\frac{dc''}{du}\frac{d\lambda}{du}\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2+4c'^2c''(\lambda-R')\frac{dc''}{dv}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2\frac{d\lambda}{dv}\Big|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dZ^2\,dX^2 = du^2\,dv^2\Big|\,&2(\lambda-R)^2(\lambda-R')^2\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}+\\
&+2c(\lambda-R)^2(\lambda-R')\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{dc}{du}\frac{d\lambda}{dv}+2c''(\lambda-R)^2(\lambda-R')\frac{dc''}{du}\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\frac{d\lambda}{dv}+\\
&+2c''c(\lambda-R)^2\frac{dc''}{du}\frac{dc}{du}\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2+2c(\lambda-R)(\lambda-R')^2\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{dc}{dv}\frac{d\lambda}{du}+\\
&+2c^2(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}+2c''c(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc''}{du}\frac{dc}{dv}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}+\\
&+2c''c^2(\lambda-R)\frac{dc''}{du}\frac{d\lambda}{du}\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2+2c''(\lambda-R)(\lambda-R')^2\frac{dc''}{dv}\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\frac{d\lambda}{du}+\\
&+2cc''(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc''}{dv}\frac{dc}{du}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}+2c''^2(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}+\\
&+2c''^2c(\lambda-R)\frac{dc}{du}\frac{d\lambda}{du}\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2+2\,c''c(\lambda-R')^2\frac{dc''}{dv}\frac{dc}{dv}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2+\\
&+2\,c''c^2(\lambda-R')\frac{dc''}{dv}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2\frac{d\lambda}{dv}+2\,c''^2c(\lambda-R')\frac{dc}{dv}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2\frac{d\lambda}{dv}+\\
&+2c''^2c^2\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2+(\lambda-R)^2(\lambda-R')^2\left(\frac{dc''}{du}\right)^2\left(\frac{dc}{dv}\right)^2+\\
&+c^2(\lambda-R)^2\left(\frac{dc''}{du}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2+(\lambda-R)^2(\lambda-R')^2\left(\frac{dc''}{dv}\right)^2\left(\frac{dc}{du}\right)^2+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+c^2(\lambda-R')^2\left(\frac{dc''}{dv}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2+c''^2(\lambda-R)^2\left(\frac{dc}{du}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2+\\
&+c''^2(\lambda-R')^2\left(\frac{dc}{dv}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2+4c''^2c^2\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2+\\
&+2c(\lambda-R)^2(\lambda-R')\left(\frac{dc''}{du}\right)^2\frac{dc}{dv}\frac{d\lambda}{dv}+2(\lambda-R)^2(\lambda-R')^2\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}+\\
&+2c(\lambda-R)(\lambda-R')^2\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{dc}{dv}\frac{d\lambda}{du}+2c''(\lambda-R)^2(\lambda-R)\frac{dc''}{du}\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\frac{d\lambda}{dv}+\\
&+2c''(\lambda-R)(\lambda-R')^2\frac{dc''}{du}\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\frac{d\lambda}{dv}+4c''c(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc''}{du}\frac{dc}{dv}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}+\\
&+2c(\lambda-R)^2(\lambda-R')\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{dc}{du}\frac{d\lambda}{dv}+2c^2(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}+\\
&+2c''c(\lambda-R)^2\frac{dc''}{du}\frac{dc}{du}\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2+2c''c(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc''}{du}\frac{dc}{dv}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}+\\
&+4c''c^2(\lambda-R)\frac{dc''}{du}\frac{d\lambda}{du}\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2+2c(\lambda-R)(\lambda-R')\left(\frac{dc''}{dv}\right)^2\frac{dc}{du}\frac{d\lambda}{du}+\\
&+2c''(\lambda-R)^2(\lambda-R')\frac{dc''}{dv}\left(\frac{dc}{du}\right)^2\frac{d\lambda}{dv}+2c''(\lambda-R)(\lambda-R')^2\frac{dc''}{dv}\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\frac{d\lambda}{du}+\\
&+4c''c(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc''}{dv}\frac{dc}{du}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}+2c''c(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc''}{dv}\frac{dc}{du}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}+\\
&+2c''c(\lambda-R')^2\frac{dc''}{dv}\frac{dc}{dv}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2+4c''c^2(\lambda-R')\frac{dc''}{dv}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2\frac{d\lambda}{dv}+\\
&+2c''^2(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}+4c''^2c(\lambda-R)\frac{dc}{du}\frac{d\lambda}{du}\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2+\\
&+4c''^2c(\lambda-R')\frac{dc}{dv}\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2\frac{d\lambda}{dv}\Bigg|
\end{aligned}
$$

Te trzy sumy mamy dodać, aby, według wzoru (γ), otrzymać wartość na element powierzchni:

$$dS^2 = dX^2dY^2 + dY^2dZ^2 + dZ^2dX^2.$$

Lecz zanim to uczynimy, wprowadźmy pewne uproszczenia. Przedewszystkiem zauważyć musimy, że jeśli w równaniach (2) przedstawionych w kształcie:

$$
\frac{dx}{du}=-R\frac{dc}{du}\qquad\frac{dy}{du}=-R\frac{dc'}{du},\qquad\frac{dz}{du}=-R\frac{dc''}{du}
$$

$$
\frac{dx}{dv}=-R'\frac{dc}{dv}\qquad\frac{dy}{dv}=-R'\frac{dc'}{dv}\qquad\frac{dz}{dv}=-R'\frac{dc''}{dv}
$$

pomnożymy kolejno równania nad sobą stojące:

$$\frac{dx}{du}\cdot\frac{dx}{dv}=RR'\frac{dc}{du}\,\frac{dc}{dv}$$

$$\frac{dy}{du}\,\frac{dy}{dv}=RR'\frac{dc'}{du}\,\frac{dc'}{dv}$$

$$\frac{dz}{du}\,\frac{dz}{dv}=RR'\frac{dc''}{du}\,\frac{dc''}{dv},$$ to dodawszy te trzy równania otrzymujemy:

$$\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv}+\frac{dy}{du}\frac{dy}{dv}+\frac{dz}{du}\frac{dz}{dv}=RR'\left(\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}+\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}+\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\right)$$

Układ współrzędnych jest prostokątny, wskutek tego

$$\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv}+\frac{dy}{du}\frac{dy}{dv}+\frac{dz}{du}\frac{dz}{dv}=0;$$

uwzględniając to otrzymujemy:

$$\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}+\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}+\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}=0 \qquad (A)$$

Połóżmy nadto:

$$\left.\begin{array}{ll}\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2=E^2 & \left(\frac{dx}{dv}\right)^2+\left(\frac{dy}{dv}\right)^2+\left(\frac{dz}{dv}\right)^2=G^2\\ \left(\frac{dc}{du}\right)^2+\left(\frac{dc'}{du}\right)^2+\left(\frac{dc''}{du}\right)^2=e^2 & \left(\frac{dc}{dv}\right)^2+\left(\frac{dc'}{dv}\right)^2+\left(\frac{dc''}{dv}\right)^2=g^2\end{array}\right| \qquad (B)$$

wskutek czego:

$$e^2g^2=\left(\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\right)^2+\left(\frac{dc}{du}\frac{dc'}{dv}\right)^2+\left(\frac{dc}{du}\frac{dc''}{dv}\right)^2+\left(\frac{dc'}{du}\frac{dc}{dv}\right)^2+\left(\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\right)^2+$$
$$+\left(\frac{dc'}{du}\frac{dc''}{dv}\right)^2+\left(\frac{dc''}{du}\frac{dc}{dv}\right)^2+\left(\frac{dc''}{du}\frac{dc'}{dv}\right)^2+\left(\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\right)^2 \qquad (C)$$

a ponieważ: $c^2+c'^2+c''^2=1$, więc

$$c\frac{dc}{du}+c'\frac{dc'}{du}+c''\frac{dc''}{du}=0 \quad \text{i}$$

$$c\frac{dc}{dv}+c'\frac{dc'}{dv}+c''\frac{dc''}{dv}=0$$

Mając to dodajmy powyższe trzy sumy: $dX^2\,dY^2\ldots$: Współczynnikiem przy $(\lambda-R)^2(\lambda-R')^2$ będzie:

$$\left|2\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}+\left(\frac{dc}{du}\right)^2\left(\frac{dc'}{dv}\right)^2+\left(\frac{dc}{dv}\right)^2\left(\frac{dc'}{du}\right)^2+2\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}+\right.$$
$$+2\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}+\left(\frac{dc''}{du}\right)^2\left(\frac{dc}{dv}\right)^2+\left(\frac{dc''}{dv}\right)^2\left(\frac{dc}{du}\right)^2+2\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}+$$
$$\left.+2\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}+\left(\frac{dc'}{du}\right)^2\left(\frac{dc''}{dv}\right)^2+\left(\frac{dc'}{dv}\right)^2\left(\frac{dc''}{du}\right)^2+2\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\right|=$$

$$= e^2 g^2 - \left(\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\right)^2 - \left(\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\right)^2 - \left(\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\right)^2 + 4\left[\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv} + \right.$$

$$\left. + \frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv} + \frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\right]$$

$$= e^2 g^2 - 3\left[\left(\frac{dc}{du}\frac{dc}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\right)^2\right]$$

Ponieważ bowiem: $\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv} + \frac{dc'}{du}\cdot\frac{dc'}{dv} + \frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv} = 0$, przeto po podniesieniu obu stron do drugiej potęgi

$$2\left(\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv} + \frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv} + \frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\right) =$$

$$= -\left[\left(\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\right)^2\right]$$

a

$$4\left[\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv} + \frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv} + \frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\right] =$$

$$= -2\left[\left(\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\right)^2\right]$$

Współczynnik przy $2(\lambda - R)^2(\lambda - R')\frac{d\lambda}{dv}$:

$$c'\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\frac{dc'}{du} + c\frac{dc}{du}\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv} + c'\left(\frac{dc}{du}\right)^2\frac{dc'}{dv} + c\frac{dc}{du}\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv} + c'\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\frac{dc'}{du} +$$

$$+ c\frac{dc}{dv}\left(\frac{dc'}{du}\right)^2 + c''\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\frac{dc''}{du} + c'\frac{dc}{du}\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv} + c''\left(\frac{dc'}{du}\right)^2\frac{dc''}{dv} +$$

$$+ c'\frac{dc'}{du}\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv} + c''\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\frac{dc''}{du} + c'\frac{dc'}{dv}\left(\frac{dc''}{du}\right)^2 + c\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{dc}{du} +$$

$$+ c''\frac{dc''}{du}\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv} + c\left(\frac{dc''}{du}\right)^2\frac{dc}{dv} + c''\frac{dc''}{du}\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv} + c\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\frac{dc}{du} +$$

$$+ c''\frac{dc''}{dv}\left(\frac{dc}{du}\right)^2 =$$

$$= c\frac{dc}{dv}\left[\left(\frac{dc'}{du}\right)^2 + \left(\frac{dc''}{du}\right)^2\right] + c'\frac{dc'}{dv}\left[\left(\frac{dc}{du}\right)^2 + \left(\frac{dc''}{du}\right)^2\right] + c''\frac{dc''}{dv}\left[\left(\frac{dc}{du}\right)^2 + \left(\frac{dc'}{du}\right)^2\right] +$$

$$+ 2c\frac{dc}{du}\left[\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv} + \frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\right] + 2c'\frac{dc'}{du}\left[\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv} + \frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\right] +$$

$$+ 2c''\frac{dc''}{du}\left[\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv} + \frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\right] =$$

$$= c\frac{dc}{dv}\left[e^2 - \left(\frac{dc}{du}\right)^2\right] + c'\frac{dc'}{dv}\left[e^2 - \left(\frac{dc'}{du}\right)^2\right] + c''\frac{dc''}{dv}\left[e^2 - \left(\frac{dc''}{du}\right)^2\right] +$$

$$+ 2c\frac{dc}{du}\left[-\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\right] + 2c'\frac{dc'}{du}\left[-\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\right] + 2c''\frac{dc''}{du}\left[-\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\right] =$$

$$= e^2\left|c\frac{dc}{dv}+c'\frac{dc'}{dv}+c''\frac{dc''}{dv}\right|-c\left(\frac{dc}{du}\right)^2\frac{dc}{dv}-c'\left(\frac{dc'}{du}\right)^2\frac{dc'}{dv}-c''\left(\frac{dc''}{du}\right)^2\frac{dc''}{dv}-$$

$$-2c\left(\frac{dc}{du}\right)^2\frac{dc}{dv}-2c'\left(\frac{dc'}{du}\right)^2\frac{dc'}{dv}-2c''\left(\frac{dc''}{du}\right)^2\frac{dc''}{dv}=$$

$$=-3\left|c\left(\frac{dc}{du}\right)^2\frac{dc}{dv}+c'\left(\frac{dc'}{du}\right)^2\frac{dc'}{dv}+c''\left(\frac{dc''}{du}\right)^2\frac{dc''}{dv}\right| \quad \text{albowiem}$$

$$c\frac{dc}{dv}+c'\frac{dc'}{dv}+c''\frac{dc''}{dv}=0$$

W analogiczny zupełnie sposób otrzymamy jako współczynnik przy $2(\lambda-R)(\lambda-R')^2\frac{d\lambda}{du}$:

$$-3\left|c\frac{dc}{du}\left(\frac{dc}{dv}\right)^2+c'\frac{dc'}{du}\left(\frac{dc'}{dv}\right)^2+c''\frac{dc''}{du}\left(\frac{dc''}{dv}\right)^2\right|$$

Współczynnik przy $(\lambda-R)^2\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2$:

$$2cc'\frac{dc}{du}\frac{dc'}{du}+c'^2\left(\frac{dc}{du}\right)^2+c^2\left(\frac{dc'}{du}\right)^2+2cc'\frac{dc}{du}\frac{dc'}{du}+2c'c''\frac{dc'}{du}\frac{dc''}{du}+$$

$$+c''^2\left(\frac{dc'}{du}\right)^2+c'^2\left(\frac{dc''}{du}\right)^2+2c'c''\frac{dc'}{du}\frac{dc''}{du}+2c''c\frac{dc''}{du}\frac{dc}{du}+c^2\left(\frac{dc''}{du}\right)^2+$$

$$+c''^2\left(\frac{dc}{du}\right)^2+2c''c\frac{dc''}{du}\frac{dc}{du}=$$

$$=\left(\frac{dc}{du}\right)^2\left|c'^2+c''^2\right|+\left(\frac{dc'}{du}\right)^2\left|c''^2+c^2\right|+\left(\frac{dc''}{du}\right)^2\left|c^2+c'^2\right|+$$

$$+2c\frac{dc}{du}\left|c'\frac{dc'}{du}+c''\frac{dc''}{du}\right|+2c'\frac{dc'}{du}\left|c\frac{dc}{du}+c''\frac{dc''}{du}\right|+$$

$$+2c''\frac{dc''}{du}\left|c\frac{dc}{du}+c'\frac{dc'}{du}\right|=$$

$$=\left(\frac{dc}{du}\right)^2\left|1-c^2\right|+\left(\frac{dc'}{du}\right)^2\left|1-c'^2\right|+\left(\frac{dc''}{du}\right)^2\left|1-c''^2\right|+2c\frac{dc}{du}\left|-c\frac{dc}{du}\right|+$$

$$+2c'\frac{dc'}{du}\left|-c'\frac{dc'}{du}\right|+2c''\frac{dc''}{du}\left|-c''\frac{dc''}{du}\right|=$$

$$=\left(\frac{dc}{du}\right)^2+\left(\frac{dc'}{du}\right)^2+\left(\frac{dc''}{du}\right)^2-3c^2\left(\frac{dc}{du}\right)^2-3c'^2\left(\frac{dc'}{du}\right)^2-3c''^2\left(\frac{dc''}{du}\right)^2=$$

$$=e^2-3\left|\left(c\frac{dc}{du}\right)^2+\left(c'\frac{dc'}{du}\right)^2+\left(c''\frac{dc''}{du}\right)^2\right|$$

I znowu w sposób zupełnie analogiczny otrzymamy jako współczynnik przy $(\lambda-R')^2\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2$:

$$g^2 = 3\left\{\left(c\frac{dc}{dv}\right)^2+\left(c'\frac{dc'}{dv}\right)^2+\left(c''\frac{dc''}{dv}\right)^2\right\}$$

Zastanówmy się obecnie nad współczynnikiem przy

$$4(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}:$$

Będzie nim wyraz:

$$c'^2\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}+2cc'\frac{dc}{du}\frac{dc'}{dv}+2cc'\frac{dc'}{du}\frac{dc}{dv}+c^2\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}+$$

$$+c''^2\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}+2c'c''\frac{dc'}{du}\frac{dc''}{dv}+2c'c''\frac{dc''}{du}\frac{dc'}{dv}+c'^2\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}+$$

$$+c^2\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}+2c''c\frac{dc''}{du}\frac{dc}{dv}+2c''c\frac{dc}{du}\frac{dc''}{dv}+c''^2\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}=$$

$$=c^2\left\{\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}+\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\right\}+c'^2\left\{\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}+\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\right\}+c''^2\left\{\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}+\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\right\}+$$

$$+2c\frac{dc}{du}\left\{c'\frac{dc'}{dv}+c''\frac{dc''}{dv}\right\}+2c'\frac{dc'}{du}\left\{c''\frac{dc''}{dv}+c\frac{dc}{dv}\right\}+2c''\frac{dc''}{du}\left\{c\frac{dc}{dv}+c'\frac{dc'}{dv}\right\}=$$

$$=-c^2\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}-c'^2\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}-c''^2\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}-2c^2\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}-2c'^2\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}-$$

$$-2c''^2\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}$$

$$=-3\left\{c^2\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}+c'^2\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}+c''^2\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\right\}$$

Współczynnik przy $2(\lambda-R')\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2\frac{d\lambda}{dv}$:

$$cc'^2\frac{dc}{dv}+c^2c'\frac{dc'}{dv}+2cc'^2\frac{dc}{dv}+2c^2c'\frac{dc'}{dv}+c'c''^2\frac{dc'}{dv}+c'^2c''\frac{dc''}{dv}+$$

$$+2c'c''^2\frac{dc'}{dv}+2c'^2c''\frac{dc''}{dv}+c''c^2\frac{dc''}{dv}+c''^2c\frac{dc}{dv}+2c''c^2\frac{dc''}{dv}+2c''^2c\frac{dc}{dv}=$$

$$=3cc'^2\frac{dc}{dv}+3c^2c'\frac{dc'}{dv}+3c'c''^2\frac{dc''}{dv}+3c'^2c''\frac{dc''}{dv}+3c''c^2\frac{dc''}{dv}+3c''^2c\frac{dc}{dv}$$

$$=3\left\{c\frac{dc}{dv}(c'^2+c''^2)+c'\frac{dc'}{dv}(c''^2+c^2)+c''\frac{dc''}{dv}(c^2+c'^2)\right\}$$

Analogicznie znajdziemy współczynnik przy

$$2(\lambda-R)\frac{d\lambda}{du}\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2$$

$$3\left\{c\frac{dc}{du}(c'^2+c''^2)+c'\frac{dc'}{du}(c''^2+c^2)+c''\frac{dc''}{du}(c^2+c'^2)\right\}$$

Współczynnikiem przy $\left(\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}\right)^2$ będzie:

$$2c^2c'^2 + 4c^2c'^2 + 2c'^2c''^2 + 4c'^2c''^2 + 2c''^2c^2 + 4c''^2c'^2 =$$
$$= 6(c^2c'^2 + c'^2c''^2 + c''^2c^2)$$

Ponieważ atoli

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1 \qquad \text{przeto}$$
$$(c^2 + c'^2 + c''^2)^2 = c^4 + c'^4 + c''^4 + 2c^2c'^2 + 2c^2c''^2 + 2c'^2c''^2 = 1$$

stąd: $\qquad 2(c^2c'^2 + c^2c''^2 + c'^2c''^2) = 1 - (c^4 + c'^4 + c''^4)$

czyli $\qquad 6(c^2c'^2 + c^2c''^2 + c'^2c''^2) = 3[1 - (c^4 + c'^4 + c''^4)]$

Współczynnik tedy przy $\left(\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}\right)^2$ będzie:

$$3[1 - (c^4 + c'^4 + c''^4)].$$

Sumując tedy otrzymujemy:

$$dS^2 = dX^2dY^2 + dY^2dZ^2 + dZ^2dX^2 =$$
$$= du^2dv^2 \Bigg\{ (\lambda - R)^2(\lambda - R')^2 \left| e^2g^2 - 3\left(\left(\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\right)^2\right) - \right.$$
$$- 6(\lambda - R)^2(\lambda - R') \left| c\left(\frac{dc}{du}\right)^2\frac{dc}{dv} + c'\left(\frac{dc'}{du}\right)^2\frac{dc'}{dv} + c''\left(\frac{dc''}{du}\right)^2\frac{dc''}{dv}\right| \frac{d\lambda}{dv} -$$
$$- 6(\lambda - R)(\lambda - R')^2 \left| c\left(\frac{dc}{dv}\right)^2\frac{dc}{du} + c'\left(\frac{dc'}{dv}\right)^2\frac{dc'}{du} + c''\left(\frac{dc''}{dv}\right)^2\frac{dc''}{du}\right| \frac{d\lambda}{du} +$$
$$+ (\lambda - R)^2\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 \left| e^2 - 3\left(\left(c\frac{dc}{du}\right)^2 + \left(c'\frac{dc'}{du}\right)^2 + \left(c''\frac{dc''}{du}\right)^2\right)\right| +$$
$$+ (\lambda - R')^2\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2 \left(g^2 - 3\left|\left(c\frac{dc}{dv}\right)^2 + \left(c'\frac{dc'}{dv}\right)^2 + \left(c''\frac{dc''}{dv}\right)^2\right|\right) -$$
$$- 12(\lambda - R)(\lambda - R')\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv} \left| c^2\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv} + c'^2\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv} + c''^2\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\right| +$$
$$+ 6(\lambda - R')\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2\frac{d\lambda}{dv} \left| c\frac{dc}{dv}(c'^2 + c''^2) + c'\frac{dc'}{dv}(c''^2 + c^2) + \right.$$
$$\left. + c''\frac{dc''}{dv}(c' + c'^2)\right| + 6(\lambda - R)\frac{d\lambda}{du}\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 \left| c\frac{dc}{dv}(c'^2 + c''^2) + \right.$$
$$\left. + c'\frac{dc'}{dv}(c''^2 + c^2) + c''\frac{dc''}{dv}(c^2 + c'^2)\right| + 3\left(\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 \left| 1 - (c^4 + c'^4 + c''^4)\right|$$

Albo:

$$dS^2 = du^2dv^2 \left| (\lambda - R)^2(\lambda - R')^2e^2g^2 + (\lambda - R)^2e^2\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 + (\lambda - R')^2g^2\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2\right| +$$
$$+ 3\,A\,du\,dv^2$$

gdzie A oznacza resztę współczynników.

Zajmijmy się teraz współczynnikiem A:

$$A = -(\lambda-R)^2(\lambda-R')^2\left|\left(\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\right)^2+\left(\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\right)^2+\left(\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\right)^2\right| -$$

$$-2(\lambda-R)^2(\lambda-R')\frac{d\lambda}{dv}\left|c\left(\frac{dc}{du}\right)^2\frac{dc}{dv}+c'\left(\frac{dc'}{du}\right)^2\frac{dc'}{dv}+c''\left(\frac{dc''}{du}\right)^2\frac{dc''}{dv}\right| -$$

$$-2(\lambda-R)(\lambda-R')^2\frac{d\lambda}{du}\left|c\frac{dc}{du}\left(\frac{dc}{dv}\right)^2+c'\frac{dc'}{du}\left(\frac{dc'}{dv}\right)^2+c''\frac{dc''}{du}\left(\frac{dc''}{dv}\right)^2\right| -$$

$$-(\lambda-R)^2\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2\left|\left(c\frac{dc}{du}\right)^2+\left(c'\frac{dc'}{du}\right)^2+\left(c''\frac{dc''}{du}\right)^2\right| -$$

$$-(\lambda-R')^2\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2\left|\left(c\frac{dc}{dv}\right)^2+\left(c'\frac{dc'}{dv}\right)^2+\left(c''\frac{dc''}{dv}\right)^2\right| -$$

$$-4(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}\left|c^2\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}+c'^2\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}+c''^2\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\right| +$$

$$+2(\lambda-R')\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2\frac{d\lambda}{dv}\left|c\frac{dc}{dv}(c'^2+c''^2)+c'\frac{dc'}{dv}(c''^2+c^2)+\right.$$

$$\left.+c''\frac{dc''}{dv}(c^2+c'^2)\right|+2(\lambda-R)\frac{d\lambda}{du}\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2\left|c\frac{dc}{du}(c'^2+c''^2)+\right.$$

$$\left.+c'\frac{dc'}{du}(c''^2+c^2)+c''\frac{dc''}{du}(c^2+c'^2)\right|+\left(\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}\right)^2-$$

$$-\left(\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}\right)^2(c^4+c'^4+c''^4)$$

W sumie tej wyłączmy w wyrazie 2gim i 3cim w co dwóch kolejno branych dodajnikach wspólne części za nawias, a otrzymamy:

$$-2(\lambda-R)(\lambda-R')\left|c\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}\left((\lambda-R)\frac{dc}{du}\frac{d\lambda}{dv}+(\lambda-R')\frac{dc}{dv}\frac{d\lambda}{du}\right)+\right.$$

$$+c'\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}\left((\lambda-R)\frac{dc'}{du}\frac{d\lambda}{dv}+(\lambda-R')\frac{dc'}{dv}\frac{d\lambda}{du}\right)+$$

$$\left.+c''\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\left((\lambda-R)\frac{dc''}{du}\frac{d\lambda}{dv}+(\lambda-R')\frac{dc''}{dv}\frac{d\lambda}{du}\right)\right| \qquad (\alpha)$$

Podobnie postąpiwszy z wyrazami: 4tym, 5tym i połową 6tego wyrazu otrzymujemy:

$$-\left\{(\lambda-R)^2\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2\left|\left(c\frac{dc}{du}\right)^2+\left(c'\frac{dc'}{du}\right)^2+\left(c''\frac{dc''}{du}\right)^2\right|+\right.$$

$$+(\lambda-R')^2\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2\left|\left(c\frac{dc}{dv}\right)^2+\left(c'\frac{dc'}{dv}\right)^2+\left(c''\frac{dc''}{dv}\right)^2\right|+$$

$$\left.+2(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}\left|c^2\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}+c'^2\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}+c''^2\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}\right|\right\} -$$

$$= -\Big\{ c^2\Big|(\lambda-R)\frac{d\lambda}{dv}\frac{dc}{du}+(\lambda-R')\frac{d\lambda}{du}\frac{dc}{dv}\Big|^2 + c'^2\Big|(\lambda-R)\frac{d\lambda}{dv}\frac{dc'}{du}+$$

$$+(\lambda-R')\frac{d\lambda}{du}\frac{dc'}{dv}\Big|^2 + c''^2\Big|(\lambda-R)\frac{d\lambda}{dv}\frac{dc''}{du}+(\lambda-R')\frac{d\lambda}{du}\frac{dc''}{dv}\Big|^2 \qquad (b)$$

Uwzględniając 1szy wyraz sumy $A = \ldots$ i wyrazy *(a)* i *(b)* piszemy sumę ich w postaci:

$$-\Big\{(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}+c\Big|(\lambda-R)\frac{d\lambda}{dv}\frac{dc}{du}+(\lambda-R')\frac{d\lambda}{du}\frac{dc}{dv}\Big|\Big\}^2 -$$

$$-\Big\{(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}+c'\Big|(\lambda-R)\frac{d\lambda}{dv}\frac{dc'}{du}+(\lambda-R')\frac{d\lambda}{du}\frac{dc'}{dv}\Big|\Big\}^2 - \qquad (c)$$

$$-\Big\{(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}+c''\Big|(\lambda-R)\frac{d\lambda}{dv}\frac{dc''}{du}+(\lambda-R'')\frac{d\lambda}{du}\frac{dc''}{dv}\Big|\Big\}^2$$

Uwzględniając równanie: $c^2+c'^2+c''^2=1$, możemy wyraz 7my i 8my w sumie $A = \ldots$ przekształcić, a mianowicie:

$$2(\lambda-R')\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2\frac{d\lambda}{dv}\Big|c\frac{dc}{dv}(c'^2+c''^2)+c'\frac{dc'}{dv}(c''^2+c^2)+c''\frac{dc''}{dv}(c^2+c'^2)\Big|+$$

$$+2(\lambda-R)\frac{d\lambda}{du}\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2\Big|c\frac{dc}{du}(c'^2+c''^2)+c'\frac{dc'}{du}(c''^2+c^2)+c''\frac{dc''}{du}(c^2+c'^2)\Big|=$$

$$=2\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}\Big\{\Big|(\lambda-R')\frac{d\lambda}{du}\frac{dc}{dv}+(\lambda-R)\frac{d\lambda}{dv}\frac{dc}{du}\Big|c(c'^2+c''^2)+\Big|(\lambda-R')\frac{d\lambda}{du}\frac{dc'}{dv}+$$

$$+(\lambda-R)\frac{d\lambda}{dv}\frac{dc'}{du}\Big|c'(c''^2+c^2)+\Big|(\lambda-R')\frac{d\lambda}{du}\frac{dc''}{dv}+$$

$$+(\lambda-R)\frac{d\lambda}{dv}\frac{dc''}{du}\Big|c''(c+c'^2)\Big\}=$$

$$=2\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}\Big\{\Big|(\lambda-R')\frac{d\lambda}{du}\frac{dc}{dv}+(\lambda-R)\frac{d\lambda}{dv}\frac{dc}{du}\Big|c(1-c^2)+\Big|(\lambda-R')\frac{d\lambda}{du}\frac{dc'}{dv}+$$

$$+(\lambda-R)\frac{d\lambda}{dv}\frac{dc'}{du}\Big|(c'(1-c'^2)+\Big|(\lambda-R')\frac{d\lambda}{du}\frac{dc''}{dv}+$$

$$+(\lambda-R)\frac{d\lambda}{dv}\frac{dc''}{du}\Big|c''(1-c''^2)\Big\}=$$

$$=2\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}\Big\{(\lambda-R')\frac{d\lambda}{du}\Big|c\frac{dc}{dv}+c'\frac{dc'}{dv}+c''\frac{dc''}{dv}\Big|+$$

$$+(\lambda-R)\frac{d\lambda}{dv}\Big|c\frac{dc}{du}+c'\frac{dc'}{du}+c''\frac{dc''}{du}\Big|\Big\}-$$

$$-2\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}\left\{c^3\left|(\lambda-R')\frac{d\lambda}{du}\frac{dc}{dv}+(\lambda-R)\frac{d\lambda}{dv}\frac{dc}{du}\right|+c'^3\left|(\lambda-R')\frac{d\lambda}{du}\frac{dc'}{dv}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(\lambda-R)\frac{d\lambda}{dv}\frac{dc'}{du}\right|+c''^3\left|(\lambda-R')\frac{d\lambda}{du}\frac{dc''}{dv}+(\lambda-R')\frac{d\lambda}{dv}\frac{dc''}{du}\right|\right\}=$$

$$=-2\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}\left\{c^3\left|(\lambda-R')\frac{d\lambda}{du}\frac{dc}{dv}+(\lambda-R)\frac{d\lambda}{dv}\frac{dc}{du}\right|+c'^3\left|(\lambda-R')\frac{d\lambda}{du}\frac{dc'}{dv}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(\lambda-R)\frac{d\lambda}{dv}\frac{dc'}{du}\right|+c''^3\left|(\lambda-R')\frac{d\lambda}{du}\frac{dc''}{dv}+(\lambda-R)\frac{d\lambda}{dv}\frac{dc''}{du}\right|\right\} \qquad (d)$$

Weźmy pod uwagę wyrazy: *(c)*, *(d)*, drugą połowę 6tego wyrazu sumy *A* i ostatni wyraz sumy *(A)* tj. wyraz:

$$-\left(\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}\right)^2\left|c^4+c'^4+c''^4\right|,$$

to możemy napisać je w postaci:

$$\left.\begin{array}{l}
-\left\{(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}+c\left|(\lambda-R)\frac{d\lambda}{dv}\frac{dc}{du}+(\lambda-R')\frac{d\lambda}{du}\frac{dc}{dv}\right|+c^2\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}\right\}^2- \\
-\left\{(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc'}{du}\frac{dc'}{dv}+c'\left|(\lambda-R)\frac{d\lambda}{dv}\frac{dc'}{du}+(\lambda-R')\frac{d\lambda}{du}\frac{dc'}{dv}\right|+c'^2\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}\right\}^2- \\
-\left\{(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc''}{du}\frac{dc''}{dv}+c''\left|(\lambda-R)\frac{d\lambda}{dv}\frac{dc''}{du}+(\lambda-R')\frac{d\lambda}{du}\frac{dc''}{dv}\right|+c''^2\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}\right\}^2
\end{array}\right\} (e)$$

Ale poprzednio mieliśmy: $X = x + c\lambda$, stąd

$$\frac{dX}{du}=\frac{dx}{du}+\lambda\frac{dc}{du}+c\frac{d\lambda}{du}=-R\frac{dc}{du}+\lambda\frac{dc}{du}+c\frac{d\lambda}{du}=(\lambda-R)\frac{dc}{du}+c\frac{d\lambda}{du}$$

$$\frac{dX}{dv}=\frac{dx}{dv}+\lambda\frac{dc}{dv}+c\frac{d\lambda}{dv}=-R'\frac{dc}{dv}+\lambda\frac{dc}{dv}+c\frac{d\lambda}{dv}=(\lambda-R')\frac{dc}{dv}+c\frac{d\lambda}{dv}$$

A stąd:
$$\left.\begin{array}{l}(\lambda-R)\frac{dc}{du}=\frac{dX}{du}-c\frac{d\lambda}{du}\\[2ex](\lambda-R')\frac{dc}{dv}=\frac{dX}{dv}-c\frac{d\lambda}{dv}\end{array}\right\}(f)$$

a więc

$$(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{dc}{du}\frac{dc}{dv}=\frac{dX}{du}\frac{dX}{dv}-c\frac{dX}{dv}\frac{d\lambda}{du}-c\frac{dX}{du}\frac{d\lambda}{dv}+c^2\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv} \qquad (\alpha)$$

Pomnożywszy pierwsze z równań *f* przez $c\frac{d\lambda}{dv}$, a drugie przez $c\frac{d\lambda}{du}$ i dodawszy otrzymamy:

$$e\left|(\lambda-R)\frac{de}{du}\frac{d\lambda}{dv}+(\lambda-R')\frac{de}{dv}\frac{d\lambda}{du}\right|=e\frac{dX}{du}\frac{d\lambda}{dv}+e\frac{dX}{dv}\frac{d\lambda}{du}-2e^2\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}\qquad(\beta)$$

a że
$$e^2\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}=e^2\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}\qquad(\gamma)$$

przeto dodawszy trzy te równania: (α), (β), (γ):

$$\left\{(\lambda-R)(\lambda-R')\frac{de}{du}\frac{de}{dv}+e\left|(\lambda-R)\frac{de}{du}\frac{d\lambda}{dv}+(\lambda-R')\frac{de}{dv}\frac{d\lambda}{du}\right|+\right.$$
$$\left.+e^2\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}\right\}=\frac{dX}{du}\frac{dX}{dv}$$

Postąpiwszy analogicznie z dwoma dalszymi wyrazami w równaniu *(e)* otrzymujemy zamiast niego wyraz:

$$-\left(\frac{dX}{du}\frac{dX}{dv}\right)^2-\left(\frac{dY}{du}\frac{dY}{dv}\right)^2-\left(\frac{dZ}{du}\frac{dZ}{dv}\right)^2,\quad \text{a więc}$$

$$A=\left(\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}\right)^2-\left|\left(\frac{dX}{du}\frac{dX}{dv}\right)^2+\left(\frac{dY}{du}\frac{dY}{dv}\right)^2+\left(\frac{dZ}{du}\frac{dZ}{dv}\right)^2\right|$$

Ale
$$\frac{dX}{du}\frac{dX}{dv}+\frac{dY}{du}\frac{dY}{dv}+\frac{dZ}{du}\frac{dZ}{dv}=\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv},\quad \text{więc}$$

$$A=\left(\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}\right)^2-\left\{\left(\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv}\right)^2-2\left|\frac{dX}{du}\frac{dX}{dv}\frac{dY}{du}\frac{dY}{dv}+\frac{dY}{du}\frac{dY}{dv}\frac{dZ}{du}\frac{dZ}{dv}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{dZ}{du}\frac{dZ}{dv}\frac{dX}{du}\frac{dX}{dv}\right|\right\}$$

$$A=2\left|\frac{dX}{du}\frac{dX}{dv}\frac{dY}{du}\frac{dY}{dv}+\ldots\ldots\right|,$$ czyli zaniedbując tak małe wyrazy, jakie tu mamy po prawej stronie, możemy (niewielki popełniając błąd) położyć $A=0$, wskutek czego:

$$dS^2=\left|(\lambda-R)^2(\lambda-R')^2e^2g^2+g^2(\lambda-R')^2\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2+e^2(\lambda-R)^2\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2\right|du^2dv^2$$

albo:

$$dS^2=(\lambda-R)^2(\lambda-R')^2e^2g^2\left|1+\frac{\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2}{e^2(\lambda-R)^2}+\frac{\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2}{g^2(\lambda-R')^2}\right|du^2dv^2$$

Ponieważ atoli $E^2=e^2R^2$, skąd $e^2=\dfrac{E^2}{R^2}$

$G^2=g^2R'^2$ » $g^2=\dfrac{G^2}{R'^2}$, więc:

$$dS^2 = E^2G^2\left(1-\frac{\lambda}{R}\right)^2\left(1-\frac{\lambda}{R'}\right)^2\left\{1+\frac{\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2}{E^2\left(1-\frac{\lambda}{R}\right)^2}+\frac{\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2}{G^2\left(1-\frac{\lambda}{R'}\right)^2}\right\}du^2dv^2$$

a ostatecznie

$$dS = EG\left(1-\frac{\lambda}{R}\right)\left(1-\frac{\lambda}{R'}\right)\cdot\sqrt{1+\frac{\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2}{E^2\left(1-\frac{\lambda}{R}\right)^2}+\frac{\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2}{G^2\left(1-\frac{\lambda}{R'}\right)^2}}\cdot du\,dv$$

Ale: $\left(1-\frac{\lambda}{R}\right)\left(1-\frac{\lambda}{R'}\right)=1-\lambda\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)+\lambda^2\cdot\frac{1}{RR'}$

$$\sqrt{1+\frac{\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2}{E^2\left(1-\frac{\lambda}{R}\right)^2}+\frac{\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2}{G^2\left(1-\frac{\lambda}{R'}\right)^2}}=\left[1+\frac{\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2}{E^2\left(1-\frac{\lambda}{R}\right)^2}+\frac{\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2}{G^2\left(1-\frac{\lambda}{R'}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=1+\tfrac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2}{E^2\left(1-\frac{\lambda}{R}\right)^2}+\frac{\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2}{G^2\left(1-\frac{\lambda}{R'}\right)^2}\right]$$

jeśli zaniedbamy dalszych potęg. Ponadto

$$\frac{1}{R^2\left(1-\frac{\lambda}{R}\right)^2}=\frac{1}{(R-\lambda)^2}=(R-\lambda)^{-2}$$

$$=R^{-2}+2R^{-3}\lambda+3R^{-4}\lambda^2+4R^{-5}\lambda^3+\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{R'^2\left(1-\frac{\lambda}{R'}\right)^2}=\frac{1}{(R'-\lambda)^2}=(R'-\lambda)^2$$

$$=R'^{-2}+2R'^{-3}\lambda+3R'^{-4}\lambda^2+4R'^{-5}\lambda^3+\ldots\ldots$$

A zaniedbując i tu potęgi wyższe — od trzeciej począwszy — otrzymujemy:

$$\frac{1}{(R-\lambda)^2}=\frac{1}{R^2};\qquad\frac{1}{(R'-\lambda)^2}=\frac{1}{R'^2}$$

a wskutek tego:

$$dS=EG\left|1-\lambda\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)+\frac{\lambda^2}{RR'}\right|\cdot\left|1+\frac{\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2}{2E^2R^2}+\frac{\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2}{2G^2R'^2}\right|du\,dv$$

$$dS=EG\,du\,dv-EG\lambda\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)du\,dv+EG\left|\frac{\lambda^2}{RR'}+\frac{\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2}{2E^2}+\frac{\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2}{2G^2}\right|du\,dv$$

(opuszczając resztę) a stąd

$$S = \iint E G\, du\, dv - \iint E G \lambda \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) du\, dv +$$

$$+ \iint E G \left[\frac{\lambda^2}{RR'} + \frac{\left(\frac{d\lambda}{du}\right)^2}{2 E^2} + \frac{\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2}{2 G^2}\right] du\, dv$$

§ 7.

Zanim pójdziemy o krok naprzód, nadmienić wypada, że powierzchnie minimalne określić można jeszcze w inny, korzystniejszy sposób.

Na początku poprzedniego § wspomnieliśmy, że powierzchnię określić można w ten sposób, że współrzędne punktu uważa się jako funkcye dwóch dowolnych parametrów; w dalszym zaś ciągu przekonaliśmy się, że parametry te, któreśmy przez u i v naznaczyli, są dwiema krzywemi. Mając tedy jakąkolwiek powierzchnię można ją formalnie zasłać całą siecią krzywych, równolegle do pewnych dwóch poprowadzonych. Krzywe te są tedy podzielone na dwie gromady takie, że gdy owe dwie krzywe są: φ i ψ, to gromady te będą:

$$\varphi, \quad \varphi + d\varphi, \quad \varphi + 2d\varphi, \ldots\ldots,$$
$$\psi, \quad \psi + d\psi, \quad \psi + 2d\psi, \ldots\ldots$$

Opierając się na tem możemy podać taką definicyę powierzchni najmniejszych (minimalnych):

Powierzchnia jest najmniejszą, jeśli krzywe na powierzchni równolegle do dwóch danych krzywych poprowadzone tworzą sieć sprzężoną, a są krzywemi minimalnemi, lub — jak je matematycy nazywają — długości zero.

Krzywe nazywamy minimalnemi, jeśli assymptoty ich przecinają koło (urojone) w nieskończoności [1]). One mają tworzyć sieć sprzężoną. Co to znaczy?

Dwie gromady krzywych, poprowadzonych na powierzchni, są wtedy — podług Dupina [2]) — sprzężone, jeśli styczne do dwóch krzywych (z tych gromad), przez dowolny punkt poprowadzone, są sprzężone. Styczne zaś (czyli proste) są wtedy sprzężone, jeśli są izotropicznemi [3]), tj. jeśli ich współczynnik kątowy jest: $\pm i = \pm\sqrt{-1}$.

[1]) Por. Darboux Théorie des surfaces. I. Str. 100, albo Bianchi l. c. Str. 71.

[2]) Darboux l. c.

[3]) Laurent l. c. Str. 72.

Równanie więc takiej prostej, przechodzącej przez punkt $(\alpha\beta)$, jest:

$$(y-\beta)+i(x-\alpha)=\theta \quad \text{albo}$$
$$(y-\beta)-i(x-\alpha)=\theta$$

Są to więc — jak widać — proste sprzężone, obie określone są jednem równaniem:

$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\theta$, tworzą tedy koło, którego promień $r=\theta$, a którego środek jest w punkcie $(\alpha\beta)$.

Jak wyrazić (analitycznie) definicyę krzywych sprzężonych?

Niech u i v będą parametrami dwóch gromad krzywych. Przypuśćmy, że umiemy wyrazić współrzędne dowolnego punktu po wierzchni jako funkcye tych u i v.

Równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $M(x, y, z)$ do powierzchni będzie:

(1) $$(Z-z)=p(X-x)+q(Y-y),$$ gdzie X, Y, Z, są współrzędne bieżące, a $p=\frac{dz}{dx}$, $q=\frac{dz}{dy}$ (znaki Mongego).

Równanie przecięcia płaszczyzny stycznej z płaszczyzną nieskończenie bliską wyrazi się równaniami:

(1) $$(Z-z)=p(X-x)+q(Y-y) \quad \text{i}$$

(2) $$\frac{dp}{du}(X-x)+\frac{dq}{du}(Y-y)=\theta,$$ które otrzymujemy z równania 1go. Zróżniczkowawszy równanie (1) otrzymujemy:

$$\frac{dz}{du}=\frac{dp}{du}(X-x)+\frac{dq}{du}(Y-y)-p\frac{dx}{du}-q\frac{dy}{du}, \quad \text{ale}$$

$$\frac{dz}{du}=p\frac{dx}{du}+q\frac{dy}{du}, \quad \text{wstawiwszy to mamy:}$$

(2) $$\frac{dp}{du}(X-x)+\frac{dq}{du}(Y-y)=\theta$$

Aby wyrazić, że krzywe u i v są sprzężone, trzeba powiedzieć, że równania (1) i (2) sprawdzą się, gdy za

$(X-x)$, $(Y-y)$, $(Z-z)$ wstawimy

$\frac{dx}{dx}$, $\frac{dy}{dv}$, $\frac{dz}{dv}$, a wtedy dostaniemy

(3) $$\left|\begin{array}{l} \frac{dz}{dv}=p\frac{dx}{dv}+q\frac{dy}{dv} \\ \frac{dp}{dx}\frac{dx}{dv}+\frac{dq}{du}\frac{dy}{dv}=\theta \end{array}\right.$$

Pierwsze z tych równań (3) powiada, że styczna do krzywej $u = \text{const.}$ leży na płaszczyźnie stycznej. Równanie drugie możemy napisać w postaci:

$$z = \varphi(x\,y) \quad \text{a więc:}$$

$$\frac{dz}{dv} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dv} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dv} = p\frac{dx}{dv} + q\frac{dy}{dv}, \quad \text{a więc}$$

$$\frac{d^2z}{du\,dv} = \frac{dp}{du}\frac{dx}{dv} + p\frac{d^2x}{du\,dv} + \frac{dq}{du}\frac{dy}{dv} + q\frac{d^2y}{du\,dv} \quad \text{czyli}$$

$$\frac{dp}{du}\frac{dx}{dv} + \frac{dq}{du}\frac{dy}{dv} = \frac{d^2z}{du\,dv} - p\frac{d^2x}{du\,dv} - q\frac{d^2y}{du\,dv} = 0$$

Równania (3) przybiorą zatem kształt:

$$(3') \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{dz}{dv} - p\dfrac{dx}{dv} - q\dfrac{dy}{dv} = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2z}{du\,dv} - p\dfrac{d^2x}{du\,dv} - q\dfrac{d^2y}{du\,dv} = 0, \end{array} \right.$$

do tych zaś dwóch równań dołączamy — znane już nam — trzecie równanie:

$$\frac{dz}{du} - p\frac{dx}{du} - q\frac{dy}{du} = 0$$

Równania te są współczesne ze względu na: 1, p, q, a wyrazem tej współczesności:

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \dfrac{d^2x}{du\,dv} & \dfrac{dx}{du} & \dfrac{dx}{dv} \\[2ex] \dfrac{d^2y}{du\,dv} & \dfrac{dy}{du} & \dfrac{dy}{dv} \\[2ex] \dfrac{d^2z}{du\,dv} & \dfrac{dz}{du} & \dfrac{dz}{dv} \end{vmatrix} = 0$$

Rozwiązując to równanie ze względu na jakąś zmienną — którą dla ogólności nazwijmy φ — otrzymamy:

$$\frac{d^2\varphi}{du\,dv} - A\frac{d\varphi}{du} - B\frac{d\varphi}{dv} = 0$$

Równanie to powiada, że gromady krzywych:

$$u = \text{const.} \qquad v = \text{const.}$$

są sprzężone.

Mamy tedy równania:

$$(5) \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{d\alpha\,d\beta} - A\dfrac{dx}{d\alpha} - B\dfrac{dx}{d\beta} = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2y}{d\alpha\,d\beta} - A\dfrac{dy}{d\alpha} - B\dfrac{dy}{d\beta} = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2z}{d\alpha\,d\beta} - A\dfrac{dz}{d\alpha} - B\dfrac{dz}{d\beta} = 0 \end{array} \right.$$

Ale α i β mają być parametrami linii długości zero, muszą się więc spełnić równania:

$$(6)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{dx}{d\alpha}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\alpha}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{d\alpha}\right)^2=0 \\[2ex] \left(\dfrac{dx}{d\beta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\beta}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{d\beta}\right)^2=0 \end{cases}$$

Różniczkując pierwsze z równań (6) ze względu na β:

$$\frac{dx}{d\alpha}\cdot\frac{d^2x}{d\alpha d\beta}+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{d\alpha d\beta}+\frac{dz}{d\alpha}\cdot\frac{d^2z}{d\alpha d\beta}=0$$

albo (wstawiając za drugie pochodne $\dfrac{d^2x}{d\alpha d\beta}$ ..... wartości z 5):

$$\frac{dx}{d\alpha}\left(A\frac{dx}{d\alpha}+B\frac{dx}{d\beta}\right)+\frac{dy}{d\alpha}\left(A\frac{dy}{d\alpha}+B\frac{dy}{d\beta}\right)+\frac{dz}{d\alpha}\left(A\frac{dz}{d\alpha}+B\frac{dz}{d\beta}\right)=0 \quad \text{stąd}$$

$$A\left|\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\alpha}\right)^2\right|+B\left|\frac{dx}{d\alpha}\frac{dx}{d\beta}+\frac{dy}{d\alpha}\frac{dy}{d\beta}+\frac{dz}{d\alpha}\frac{dz}{d\beta}\right|=0 \quad \text{czyli}$$

(uwzględniając 6)

$$B\left|\frac{dx}{d\alpha}\frac{dx}{d\beta}+\frac{dy}{d\alpha}\frac{dy}{d\beta}+\frac{dz}{d\alpha}\frac{dz}{d\beta}\right|=0 \qquad (a)$$

Analogicznie — różniczkując drugie z równań 6 — otrzymujemy:

$$\frac{dx}{d\beta}\cdot\frac{d^2x}{d\alpha d\beta}+\frac{dy}{d\beta}\cdot\frac{d^2y}{d\alpha d\beta}+\frac{dz}{d\beta}\cdot\frac{d^2z}{d\alpha d\beta}=0 \quad \text{czyli}$$

$$\frac{dx}{d\beta}\left|A\frac{dx}{d\alpha}+B\frac{dx}{d\beta}\right|+\frac{dy}{d\beta}\left|A\frac{dy}{d\alpha}+B\frac{dy}{d\beta}\right|+\frac{dz}{d\beta}\left|A\frac{dz}{d\alpha}+B\frac{dz}{d\beta}\right|=0$$

$$A\left|\frac{dx}{d\alpha}\frac{dx}{d\beta}+\frac{dy}{d\alpha}\frac{dy}{d\beta}+\frac{dz}{d\alpha}\frac{dz}{d\beta}\right|+B\left|\left(\frac{dx}{d\beta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\beta}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\beta}\right)^2\right|=0 \quad \text{a stąd}$$

$$A\left|\frac{dx}{d\alpha}\frac{dx}{d\beta}+\frac{dy}{d\alpha}\frac{dy}{d\beta}+\frac{dz}{d\alpha}\frac{dz}{d\beta}\right|=0 \qquad (b)$$

W obu w ten sposób uzyskanych równaniach *(a)* i *(b)* mamy czynnik:

$$I=\frac{dx}{d\alpha}\frac{dx}{d\beta}+\frac{dy}{d\alpha}\frac{dy}{d\beta}+\frac{dz}{d\alpha}\frac{dz}{d\beta}$$

W obu równaniach mamy iloczyn równy zeru. Pytanie, czy jest to wskutek tego, że

$$I=0?$$

Element łuku krzywej

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left|\frac{dx}{d\alpha}d\alpha + \frac{dx}{d\beta}d\beta\right|^2 + \left|\frac{dy}{d\alpha}d\alpha + \frac{dy}{d\beta}d\beta\right|^2 +$$

$$+ \left|\frac{dz}{d\alpha}d\alpha + \frac{dz}{d\beta}d\beta\right|^2$$

$$= \left|\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\alpha}\right)^2\right| d\alpha^2 + 2\left|\frac{dx}{d\alpha}\frac{dx}{d\beta} + \frac{dy}{d\alpha}\frac{dy}{d\beta} + \frac{dz}{d\alpha}\frac{dz}{d\beta}\right| d\alpha\, d\beta +$$

$$+ \left|\left(\frac{dx}{d\beta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\beta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\beta}\right)^2\right| d\beta^2$$

Gdyby więc $I = \theta$, musiałoby

$ds = \theta$, a że to być nie może, musi więc $I \mp \theta$, musi więc być równocześnie $A = \theta$ i $B = \theta$. Wskutek tego równania (5) będą postaci:

$$(7) \qquad \frac{d^2x}{d\alpha\, d\beta} = \theta, \quad \frac{d^2y}{d\alpha\, d\beta} = \theta, \quad \frac{d^2z}{d\alpha\, d\beta} = \theta, \quad \text{a stąd}$$

$$(8) \qquad \begin{cases} x = \varphi_1(\alpha) + \psi_1(\beta) \\ y = \varphi_2(\alpha) + \psi_2(\beta) \\ z = \varphi_3(\alpha) + \psi_3(\beta) \end{cases}$$

przyczem atoli — według 6 —

$$(9) \qquad \begin{cases} \varphi_1'^2(\alpha) + \varphi_2'^2(\alpha) + \varphi_3'^2(\alpha) = \theta \\ \psi_1'^2(\beta) + \psi_2'^2(\beta) + \psi_3'^2(\beta) = \theta \end{cases}$$

Monge [1]) podał te równania w formie nieco odmiennej: kładąc

$\varphi_1(\alpha) = \alpha$, $\psi_1(\beta) = \beta$ wskutek czego

$\varphi'_1(\alpha) = 1$ $\psi'_1(\beta) = 1$ otrzymał

$$1 + \varphi_2'^2(\alpha) + \varphi_3'^2(\alpha) = \theta \quad \text{stąd} \quad \varphi'_3(\alpha) = i\sqrt{1 + \varphi_2'^2(\alpha)}$$

$$1 + \psi_2'^2(\beta) + \psi_3'^2(\beta) = \theta \qquad \psi'_3(\beta) = i\sqrt{1 + \psi_2'^2(\beta)}$$

Tak więc — kładąc φ zam. φ_2, ψ zaś zam. ψ_2 — otrzymał na określenie najmniejszych powierzchni równania:

$$x = \alpha + \beta$$

$$y = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$$

$$z = i\int\sqrt{1 + \varphi'^2(\alpha)}\, d\alpha + i\int\sqrt{1 + \psi'^2(\beta)}\, d\beta$$

[1]) Monge. Analyse appliquée à la Geometrie. Str. 211.

§ 8.

Najkształtniejsze atoli równania powierzchni najmniejszych podał Weierstrass[1]), idąc w rozwiązywaniu równań (7) drogą wskazaną już przez Ennepera.

Połóżmy mianowicie:

(α) $$\frac{\varphi_1'(\alpha)+i\,\varphi_2'(\alpha)}{-\varphi_3'(\alpha)} = u,$$ to wtedy pierwsze z ró-wnań (9) napisane w postaci:

$$\varphi_1'^2(\alpha)+\varphi_2'^2(\alpha) = -\varphi_3'^2(\alpha) \quad \text{albo}$$

$$\frac{\varphi_1'^2(\alpha)+\varphi_2'^2(\alpha)}{-\varphi_3'^2(\alpha)} = 1 \quad \text{przejdzie na:}$$

(β) $$\frac{\varphi_1'(\alpha)-i\,\varphi_2'(\alpha)}{\varphi_3'(\alpha)} = \frac{1}{u}$$

Napisawszy równania (α) i (β) w postaci:

$$\varphi_1'(\alpha)+i\,\varphi_2'(\alpha) = -u\,\varphi_3'(\alpha)$$

$$\varphi_1'(\alpha)-i\,\varphi_2'(\alpha) = \frac{1}{u}\,\varphi_3'(\alpha)$$ otrzymujemy raz dodając, raz dzieląc, te równania:

$$2\varphi_1'(\alpha) = \left(\frac{1}{u} - u\right)\varphi_3'(\alpha) = \frac{1-u^2}{u}\,\varphi_3'(\alpha)$$

$$\frac{\varphi_1'(\alpha)+i\,\varphi_2'(\alpha)}{\varphi_1'(\alpha)-i\,\varphi_2'(\alpha)} = -u^2$$ czyli pierwsze z nich napiszmy:

(γ) $$\frac{\varphi_1'(\alpha)}{1-u^2} = \frac{\varphi_3'(\alpha)}{2u},$$ a drugie:

$$\varphi_1'(\alpha)+i\,\varphi_2'(\alpha) = -u^2\varphi_1'(\alpha) + u^2 i\,\varphi_2'(\alpha)$$

$$\varphi_1'(\alpha)[1+u^2] = -i\,\varphi_2'(\alpha)[1-u^2] \quad \text{a więc}$$

(δ) $$\frac{\varphi_1'(\alpha)}{1-u^2} = -\frac{i\,\varphi_2'(\alpha)}{1+u^2} = \frac{\varphi_2'(\alpha)}{i(1+u^2)}$$ czyli zebrawszy je razem:

(ε) $$\frac{\varphi_1'(\alpha)}{1-u^2} = +\frac{\varphi_2'(\alpha)}{(1+u^2)\,i} = \frac{\varphi_3'(\alpha)}{2u} = \rho$$

Położmy $\rho = \frac{1}{2}\,F(u)\,\frac{du}{d\alpha}$, to

$$\varphi_1'(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2}\,(1-u^2)\,F(u)\,du \qquad \text{więc} \qquad \varphi_1(\alpha) = \frac{1}{2}\int(1-u^2)\,F(u)\,du$$

[1]) Monatsberichte. Str. 280.

$\varphi_2'(\alpha)\,d\alpha = \frac{i}{2}(1+u^2)F(u)\,du$ więc $\varphi_2(\alpha) = \frac{i}{2}\int(1+u^2)F\,u\,du$

$\varphi_3'(\alpha)\,d\alpha = u\,F(u)\,du$ $\varphi_3(\alpha) = \int u\,F(u)\,du$

Zupełnie analogicznie kładąc

$$\frac{\psi_1'(\beta) - i\psi_2'(\beta)}{-\psi_3'(\beta)} = v \quad \text{otrzymujemy:}$$

$$\psi_1(\beta) = \frac{1}{2}\int(1-v^2)F_1(v)\,dv$$

$$\psi_2(\beta) = -\frac{i}{2}\int(1+v^2)F_1(v)\,dv$$

$$\psi_3(\beta) = \int v\,F_1(v)\,dv \quad \text{wskutek czego:}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\int(1-u^2)F(u)\,du + \frac{1}{2}\int(1-v^2)F_1(v)\,dv \\ y &= \frac{i}{2}\int(1+u^2)F(u)\,du - \frac{i}{2}\int(1+v^2)F_1(v)\,dv \qquad (10) \\ z &= \int u\,F(u)\,du + \int v\,F_1(v)\,dv \end{aligned}$$

Położywszy $F(u)\,du = f'''(u)\,du$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int(1-u^2)F(u)\,du &= \frac{1}{2}\int(1-u^2)f'''(u)\,du \\ &= \frac{1}{2}\int f'''(u)\,du) - \frac{1}{2}\int u^2 f'''(u)\,du \\ &= \frac{1}{2}f''(u) - \frac{1}{2}u^2 f''(u) + \int u\,f''(u)\,du \\ &= \frac{1}{2}f''(u) - \frac{1}{2}u^2 f''(u) + u\,f'(u) - \int f'(u)\,du \\ &= \frac{1}{2}(1-u^2)f''(u) + u\,f'(u) - f(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int(1+u^2)f'''(u)\,du &= \frac{1}{2}\int f'''(u)\,du + \frac{1}{2}\int u^2 f'''(u)\,du \\ &= \frac{1}{2}f''(u) + \frac{1}{2}u^2 f''(u) - \int u\,f''(u)\,du \\ &= \frac{1+u^2}{2}f''(u) - u\,f'(u) + \int f'(u)\,du \\ &= \frac{1+u^2}{2}f''(u) - u\,f'(u) + f(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int u\,f'''(u)\,du) &= u\,f''(u) - \int f''(u)\,du \\ &= u\,f''(u) - f'(u) \end{aligned}$$

Analogicznie kładąc $F_1(v)\,dv) = f_1'''(v)\,dv$ otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}\int (1-v^2) f_1'''(v)\,dv = \frac{1-v^2}{2} f_1''(v) + v f_1'(v) - f_1(v)$$

$$\frac{1}{2}\int (1+v^2) f_1'''(v)\,dv = \frac{1+v^2}{2} f_1''(v) - v f_1'(v) + f_1(v)$$

$$\int v f_1'''(v)\,dv = v f_1''(v) - f_1'(v)$$

Ostatecznie więc otrzymał Weierstrass równania następujące:

$$\text{A}\left\{\begin{aligned} x &= \frac{1-u^2}{2} f''(u) + u f''(u) - f(u) + \frac{1-v^2}{2} f_1''(v) + v f_1'(v) - f_1(v) \\ y &= i\frac{1+u^2}{2} f''(u) - i u f'(u) + i f(u) - i\frac{1+v^2}{2} f_1''(v) + i v f_1'(v) - i f_1(v) \\ z &= u f''(u) - f'(u) + v f_1''(v) - f_1'(v) \end{aligned}\right.$$

§ 9.

Jeżeli w równaniach (A) funkcye: $f(u)$, $f_1(v)$ są algebraicznemi funkcyami argumentu τ, w takim razie powierzchnia najmniejsza, temi równaniami określona, jest algebraiczną. Bardzo ważną atoli rzeczą jest udowodnić, że powierzchnia minimalna li tylko wtedy jest algebraiczną, gdy $f(u)$ i $f_1(v)$ są funkcyami algebraicznemi.

Aby to udowodnić[1]) zróżniczkujmy równania (10) najpierw względem u, potem względem v:

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{2}(1-u^2)F(u) \qquad \frac{dx}{dv} = \frac{1}{2}(1-v^2)F_1(v)$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{i}{2}(1+u^2)F(u) \qquad \frac{dy}{dv} = -\frac{i}{2}(1+v^2)F_1(v)$$

$$\frac{dz}{du} = u F(u) \qquad \frac{dz}{dv} = v F_1(v)$$

Stąd otrzymujemy:

$$\frac{\frac{dx}{du} + i\frac{dy}{du}}{\frac{dz}{du}} = \frac{\frac{1}{2}F(u)\left|(1-u^2)-(1+u^2)\right|}{u F u} = -u$$

$$\frac{\frac{dx}{dv} - i\frac{dy}{dv}}{\frac{dz}{dv}} = \frac{\frac{1}{2}F_1(v)\left|(1-v^2)-(1+v^2)\right|}{v F(u)} = -v$$

[1]) Por. Darboux l. c. Str. 290 i in; Bianchi l. c. Str. 361.

Równania $dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$

$dz = pdx + qdy$ określają dwa różne systemy różniczek: δx, δy, δz; $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$. Parametry więc określone są w obu wypadkach równaniami:

$$u = -\frac{\delta x + i\,\delta y}{\delta z}, \quad v = -\frac{\delta_1 x - i\,\delta_1 y}{\delta_1 z}$$

$$u = -\frac{\delta_1 x + i\,\delta_1 y}{\delta_1 z} \quad v = -\frac{\delta x - i\,\delta y}{\delta z}$$

Są więc u i v algebraicznemi funkcyami x i y, a naodwrót jest tak x, jak y, a wskutek tego i z algebraiczną funkcyą u i v. Przypuśćmy bowiem, że współrzędną którąkolwiek wyrazi się tak:

$$\varphi(u) + \varphi_1(v)$$

Jeśli tedy powierzchnia jest algebraiczną, w takim razie musi istnieć równanie algebraiczne:

$$\Psi[\varphi(u) + \varphi_1(v),\ u,\ v] = 0 \tag{1}$$

Podstawmy w równaniu tem $v = \text{const.}$, wtedy i $\varphi_1(v) = \text{const.}$, a równanie (1) przejdzie na: $\Psi[\varphi(u),\ u] = 0$ i pozostało algebraicznem. Jeśli mu się atoli bliżej przypatrzymy, widzimy, że określa nam ono $\varphi(u)$. Tak więc $\varphi(u)$ a wskutek tego — por. (1) — i $\varphi_1(v)$ są funkcyami algebraicznemi parametru u; są więc algebraicznemi funkcye zawisłe od u w tych x, y, z, tzn. funkcye

$$f_1(u) = \frac{1-u^2}{2} f''(u) + u\,f''(u) - f(u)$$

$$f_2(u) = \frac{i}{2}(1 + u^2) f''(u) - i\,u\,f'(u) + i\,f(u)$$

$$f_3(u) = u\,f''(u) - f'(u)$$

Będzie więc algebraiczną także i

$$f(u) = -\frac{1}{2}\left|\alpha(1-u^2) + \beta i(1+u^2) + 2\gamma u\right| \quad \text{a więc i}$$

$$f'''(u) = F(u)$$

W sposób analogiczny udowadnia się, że algebraiczną funkcyą jest $f_1'''(v) = F_1(v)$, tak, że twierdzenie:

»Powierzchnia minimalna jest tylko wtedy algebraiczną, gdy funkcye $f'''(u)$, $f_1'''(v)$ są algebraicznemi, — i dlatego jest algebraiczną, że te funkcye są takiemi«

najmniejszej nie ulega wątpliwości.

§ 10.

Pytanie wreszcie nasuwa się, pod jakimi warunkami będzie rzeczywistą powierzchnia najmniejsza?

Z równań (10) widocznem jest, że dostatecznym warunkiem, aby wyrażenia na x, y, z były rzeczywiste, jest:

1⁰. aby funkcye $F(u)$ i $F_1(v)$ były urojone sprzężone i aby

2⁰. obliczono całki po drogach urojonych, sprzężonych.

W takim bowiem razie każdej całce na u odpowie w drugiej części wyrażenia całka urojona sprzężona, a wskutek tego będą równania na x, y, z rzeczywistemi.

Pytanie atoli, czy ten warunek, będąc dostatecznym, jest i koniecznym? Na pytanie to odpowiada Darboux[1]) »tak«, a prawdziwości swej odpowiedzi dowodzi w sposób mniej więcej następujący:

Zauważmy równania:

$$(\alpha) \qquad dz = p\,dx + q\,dy\,; \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0.$$

Jeśli pod uwagę bierzemy rzeczywisty punkt powierzchni, to przyjąć można, że wartości otrzymane z (α) dwa systemy różniczek: $\delta x, \delta y, \delta z\,;\ \delta_1 x, \delta_1 y, \delta_1 z$ wyprowadzają się jeden z drugiego przez zamianę $+i$ na $-i$. Jeśli więc jednym systemem będzie:

$$\delta x = \alpha + \beta i, \quad \delta y = \gamma + \delta i, \quad \delta z = \varepsilon + \eta i,$$

to drugim:

$$\delta_1 x = \alpha - \beta i, \quad \delta_1 y = \gamma - \delta i, \quad \delta_1 z = \varepsilon - \eta i$$

a wtedy w pierwszym wypadku:

$$-u = \frac{\delta x + i\,\delta y}{\delta z} = \frac{(\alpha - \delta) + (\beta + \gamma) i}{\varepsilon + \eta i}$$

$$-v = \frac{\delta_1 x - i\,\delta_1 y}{\delta_1 z} = \frac{(\alpha - \delta) - (\beta + \gamma) i}{\varepsilon + \eta i} \qquad \text{czyli}^{2)}$$

$$-u = \frac{[(\alpha-\delta)\varepsilon + (\beta+\gamma)\eta] + [(\beta+\gamma)\varepsilon - (\alpha-\delta)\eta]\, i}{\varepsilon^2 + \eta^2} = \frac{P_1 + Q_1 i}{\varepsilon^2 + \eta^2}$$

$$-v = \frac{[(\alpha-\delta)\varepsilon + (\beta+\gamma)\eta] - [(\beta+\gamma)\varepsilon - (\alpha-\delta)\eta]\, i}{\varepsilon^2 + \eta^2} = \frac{P_1 - Q_1 i}{\varepsilon^2 + \eta^2}$$

W wypadku zaś drugim:

$$-u = \frac{\delta_1 x + i\delta_1 y}{\delta_1 z} = \frac{(\alpha + \delta) - (\beta - \gamma) i}{\varepsilon - \eta i} = \frac{P_2 + Q_2 i}{\varepsilon^2 + \eta^2}$$

$$-v = \frac{\delta x - i\,\delta y}{\delta z} = \frac{(\alpha + \delta) + (\beta - \gamma) i}{\varepsilon - \eta i} = \frac{P_2 - Q_2 i}{\varepsilon^2 + \eta^2}$$

---

[1]) Darboux l. c. Str. 292.

[2]) Por. Józef Puzyna Teorya funkcyi analitycznych. Str. 51.

Widzimy więc, że argumenty *u* i *v* są tak w jednym, jak i w drugim wypadku urojone sprzężone.

Z drugiej strony z równań (10) otrzymujemy:

$$F(u) = \frac{dx}{du} - i\frac{dy}{du}, \qquad F_1(v) = \frac{dx}{dv} + i\frac{dy}{dv}$$

Ponieważ atoli $\frac{\delta x}{du}$ i $\frac{\delta x}{dv}$, a także $\frac{dy}{du}$ i $\frac{dy}{dv}$ są urojone i sprzężone, przeto i funkcye $F(u)$ i $F_1(v)$ muszą być urojone sprzężone. Wtedy bowiem możemy napisać:

$$\frac{\delta x}{du} = \alpha + \beta i, \qquad \frac{\delta y}{du} = \gamma + \delta i \quad \text{a więc:}$$

$$\frac{dx}{dv} = \alpha - \beta i, \qquad \frac{dx}{dv} = \gamma - \delta i \quad \text{wskutek czego:}$$

$$F(u) = \frac{\delta x}{du} - i\frac{\delta y}{du} = (\alpha + \beta i) - i(\gamma + \delta i) = (\alpha + \delta) + (\beta - \gamma)i = P_1 + Q_1 i$$

$$F_1(v = \frac{dx}{dv} - i\frac{dy}{dv} = (\alpha - \beta i) - i(\gamma - \delta i) = (\alpha + \delta) - (\beta - \gamma)i = P_1 - Q_1 i$$

Jeśli więc tak argumenty *u* i *v*, jak i funkcye $F(u)$ i $F_1(v)$ są urojone sprzężone, w takim razie równania

$$\text{I} \qquad \begin{cases} x = R\int(1 - u^2)F(u)du \\ y = Ri\int(1 + u^2)F(u)du \\ z = R\int 2uF(u)du \end{cases}$$

określą rzeczywiste części minimalnej powierzchni.

Trudniej określić warunki rzeczywistości powierzchni, jeśli się zauważy równania (A) [§ 8].

Nie można twierdzić, że powierzchnia, przedstawiona równaniami (A) będzie tylko wtedy rzeczywistą, jeśli funkcye $f(u)$ i $f_1(v)$ będą urojone sprzężone, obok urojonych sprzężonych argumentów *u* i *v*. Warunku tego bowiem nie potrzeba koniecznie, nie jest to conditio sine qua non. Położmy bowiem zamiast $f(u)$ i $f_1(v)$ w równaniach (A) dwie inne funkcye $\varphi(u)$ i $\varphi_1(v)$ takie:

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi(u) = f(u) + A(1 - u^2) + Bi(1 + u^2) + 2Cu \\ \varphi_1(v) = f_1(v) - A(1 - v^2) + Bi(1 + v^2) - 2Cv \end{cases}$$

gdzie A, B, C są dowolnemi stałemi, to

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi'(u) = f'(u) - 2Au + 2Biu + 2C \\ \varphi_1'(v) = f_1'(v) + 2Av + 2Biv - 2C \end{cases}$$

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi''(u) = f''(u) - 2A + 2Bi \\ \varphi_1''(v) = f''(v) + 2A + 2Bi \end{cases} \qquad \text{to otrzymamy}$$

$$x = \frac{1-u^2}{2} f''(u) - A(1-u^2) + Bi(1-u^2) + u f'(u) - 2Au^2 + 2Biu^2 + 2Cu -$$
$$- f(u) - A(1-u^2) - Bi(1+u^2) - 2Cu + \frac{1-v^2}{2} f_1''(v) + A(1-v^2) +$$
$$+ Bi(1+v^2) + vf_1'(v) + 2Av^2 + 2Biv^2 - 2Cv - f_1(v) + A(1-v^2) -$$
$$- Bi(1+v^2) + 2Cv$$

$$y = i\frac{1+u^2}{2} f_1''(v) + Ai(1+u^2) - B(1+u^2) - uif'(u) + 2Aiu^2 + 2Bu^2 - 2Ciu +$$
$$+ if(u) + Ai(1-u^2) - B(1+u^2) + 2Cui - i\frac{1+v^2}{2} f_1''(v) - Ai(1+v) +$$
$$+ B(1+v^2) + ivf_1'(v) + 2Aiv^2 - 2Bv^2 - 2Cvi - if_1(v) + Ai(1+v^2) +$$
$$+ B(1+v^2) + 2Civ$$

$$z = uf''(u) - 2Au + 2Biu - f'(u) + 2Au - 2Biu - 2C + vf_1''(v) + 2Av +$$
$$+ 2Biv - f_1'(v) - 2Av - 2Biv + 2C$$

czyli

$$x = \frac{1-u^2}{2} f''(u) + u f'(u) - f(u) + \frac{1-v^2}{2} f_1''(v) + vf_1'(v) - f_1(v) \qquad (\alpha)$$

$$y = i\frac{1+u^2}{2} f''(u) - iuf'(u) + if(u) - i\frac{1+v^2}{2} f_1''(v) + ivf_1'(v) - if_1(v) \qquad (\beta)$$

a wreszcie:

$$z = uf''(u) - 2Au + 2Biu - f'(u) + 2Au - 2Biu - 2C + vf_1''(v) + 2Av +$$
$$+ 2Biv - f_1'(v) - 2Av - 2Biv + 2C \quad \text{czyli}$$
$$z = uf''(u) - f'(u) + vf_1''(v) - f_1'(v)$$

Porównując (α), (β), (γ) z równaniami (A) widzimy, że równania (A) nie zmieniły się wcale przez zastąpienie funkcyi $f(u)$ i $f_1(v)$ funkcyami $\varphi(u)$ i $\varphi_1(v)$. Jeśli się przyjmie, że funkcye $f(u)$ i $f_1(v)$ są urojone sprzężone, to z tego nie wynika jeszcze, by takiemi musiały być funkcye $\varphi(u)$ i $\varphi_1(v)$, a mimo to mogą równania z $\varphi(u)$ i $\varphi_1(v)$ zbudowane analogicznie do równań (A) przedstawiać powierzchnię minimalną rzeczywistą.

Z drugiej strony wykazać można, że gdy powierzchnia (A) jest rzeczywista, to przyjąwszy wszelkie możliwe wypadki, otrzymamy w bardzo wielu wypadkach $f(u)$ i $f_1(v)$ jako funkcye sprzężone.

Jeśli więc powierzchnia ma być rzeczywistą, to jedynie koniecznym tego warunkiem jest, by równanie miało postać:

$$\text{II}\quad \left| \begin{array}{l} x = R\,[(1-u^2)f''(u) + 2\,u\,f'(u) - 2\,f(u)] \\ y = R\,i\,[(1+u^2)f''(u) - 2\,u\,f'(u) + 2\,f(u)] \\ z = R\,[2\,u\,f''(u) - 2\,f'(u)], \quad \text{przyczem musi} \end{array} \right.$$

$$\text{III}\qquad f'''(u) = F(u)$$

Wyszedłszy więc raz z równań (10), drugi raz z równań (A) otrzymaliśmy jako warunek rzeczywistości powierzchni raz równania I, drugi raz równania II.

Zróżniczkowawszy równania I otrzymujemy:

$$\frac{dx}{du} = R\,[(1-u^2)\,Fu]$$

$$\frac{dy}{du} = Ri\,[(1+u^2)\,Fu]$$

$$\frac{dz}{du} = R\,(2\,u\,F\,(u)$$

postąpiwszy analogicznie z równaniami II (przy uwzględnieniu III):

$$\frac{dx}{du} = R\,[(1-u^2)\,f'''(u) - 2uf''(u) + 2uf''(u) + 2f'(u) - 2f'(u)]$$

$$= R\,[(1-u^2)\,F(u)$$

$$\frac{dy}{du} = Ri\,[(1+u^2)\,f'''(u) + 2uf'''(u) - 2uf''(u) - 2f'(u) + 2f'(u)]$$

$$= Ri\,[(1+u^2)\,F(u)]$$

$$\frac{dz}{du} = R\,[2uf'''(u) + 2f''(u) - 2f''(u) = R\,(2u\,F(u)$$

Otrzymujemy tedy ostatecznie w obu wypadkach identyczne równania — oznaczają one zatem dwie rzeczywiste części powierzchni najmniejszej.

Możemy atoli — bez zmiany równań — za $f(u)$ podstawić ogólniejszą funkcyę

$$f(u) + A\,(1-u^2) + Bi\,(1+u^2) + 2Cu\,,$$

a dobierając stosownie rzeczywiste części tych 3 stałych dowolnych A, B, C — (bo urojone części są nam obojętne) — możemy powierzchnie przedstawione równaniami I i II uczynić identycznemi.

Roman Jamrógiewicz.

WIADOMOŚCI SZKOLNE.

I. Skład grona nauczycielskiego przy końcu roku szkolnego 1903

1. Żulkiewicz Michał, dyrektor w VI. randze, uczył propedeutyki filozofii w klasie VIII. a i VIII. b; tygodniowo 4 godziny.

2. Jamrógiewicz Roman, nauczyciel, gospodarz klasy VI. a, zawiadowca gabinetu fizykalnego, uczył matematyki w kl. VI. a, VII., VIII. a i VIII. b, fizyki w kl. VII., VIII. a i VIII. b; tygod. godz. 19.

3. Jaworski Jan, profesor, uczył matematyki w kl. I. b, II. a, II. b i III. b, fizyki w kl. IV. a i IV. b; historyi naturalnej w kl. III. b; tygodniowo godzin 20.

4. Kozłowski Edward, profesor, uczył geografii i historyi powszechnej w kl. VI. a, VII. i VIII. b; tygodniowo godzin 10.

5. Matwij Stanisław, prof. w VIII. randze, gospodarz klasy V. b, uczył języka łacińskiego w kl. V. b, greckiego w kl. V. a i VI. b; tygodniowo godzin 16.

6. Dr. Sas Marcin, profesor, uczył języka łacińskiego w klasie V. a, greckiego w kl. VI. a, logiki w kl. VII.; tygodniowo godzin 13. Od dnia 4. czerwca za ciężko chorego dr. Sasa uczyli: profesor Służewski języka łacińskiego w kl. V. a, profesor Stach języka greckiego w kl. VI. a, nauczyciel Jamrógiewicz logiki w kl. VII.

7. Służewski Włodzimierz, profesor, gospodarz klasy VIII. b, zawiadowca biblioteki nauczycielskiej, uczył języka łacińskiego w kl. VIII. a i VIII. b, greckiego w kl. V. b; tygodniowo godzin 15.

8. Stach Karol, profesor, gospodarz klasy VII., uczył języka łacińskiego w kl. VII., greckiego w kl. VII., VIII. a i VIII. b; tygodniowo godzin 19.

9. Switalski Stanisław, profesor w VIII. randze, zawiadowca polskiej biblioteki uczniów, uczył języka polskiego w kl. VI. a, VI. b, VII., VIII. a i VIII. b; tygodniowo godzin 15.

10. Szklarz Michał, profesor w VII. randze, zawiadowca gabinetu historyi naturalnej, uczył matematyki w kl. III. a i IV. a, historyi naturalnej w kl. I. b, II. a, II. b, III. a, VI. a i VI. b; tygodniowo godzin 18.

11. Tota Ludwik, profesor w VIII. randze, gospodarz kl. VI. b, uczył języka łacińskiego w kl. VI. a i VI. b, greckiego w kl. IV. a; tygodniowo godzin 16.

12. Tyczka Franciszek, nauczyciel, zawiadowca niemieckiej biblioteki uczniów, uczył języka niemieckiego w kl. VI. b, VII., VIII. a i VIII. b; tygodniowo godzin 16.

13. Waśkowski Wawrzyniec, profesor w VIII. randze, gospodarz klasy VIII. a, zawiadowca gabinetu geograficznego i historycznego, uczył geografii i historyi powszechnej w kl. IV. a, IV. b, V. b, VI. b i VIII. a; tygodniowo godzin 18.

14. Ks. Bach Jan, pom. kat., uczył religii w kl. I. a, II. b, III. b i IV. b; tygodniowo godzin 8.

15. Bartczak Antoni, egz. z. n., uczył języka niemieckiego w kl. II. b, V. b i VI. a, geografii i historyi w kl. II. a; tygodniowo godzin 17.

16. Bieder Edmund, z. n., gospodarz klasy III. b, uczył języka polskiego w kl. III. b, V. a i V. b, niemieckiego w kl. III. a i III b; tygodniowo godzin 17.

17. Budkowski Jan, z. n., gospodarz klasy I. b, uczył języka polskiego w kl. I. b i II. b, niemieckiego w kl. I. a i I. b; tygodniowo godzin 18.

18. Dyduch Tomasz, egz. z. n., gospodarz klasy IV. b, uczył matematyki w kl. IV. b, V. a, V. b i VI. b, historyi naturalnej w kl. I. a, V. a i V. b; tygodniowo godzin 20.

19. Ks. Nalepa Alojzy, egz. z. n., uczył religii w kl. I. b, II. a, III. a, IV. a, V. a, V. b, VI. a, VI. b, VII., VIII. a i VIII. b; tygodniowo godzin 22.

20. Osuchowski Henryk, z. n., gospodarz klasy I. a, uczył języka łacińskiego w kl. I. a, polskiego w kl. II. a, IV. a i IV. b; tygodniowo godzin 17.

21. Pawłowski Jerzy, z. n., uczył języka polskiego w kl. I. a i III. a, geografii w kl. I. b, geografii i historyi w kl. II. b i V. a, matematyki w kl. I. a; tygodniowo godzin 19.

22. Penkala Franciszek, z. n., gospodarz klasy II. a, uczył języka łacińskiego w kl. II. a i III. b, greckiego w kl. IV. b; tygodniowo godzin 18.

23. Talar Antoni, z. n., uczył języka łacińskiego w kl. I. b; tygodniowo godzin 8.

24. Urbanicki Wilhelm, z. n., gospodarz kl. V. a, uczył języka niemieckiego w kl. II. a, IV. a, IV. b i V. a; tygodniowo godzin 17.

25. Władyka Karol, z. n., gospodarz klasy II. b, uczył języka łacińskiego w kl. II. b, greckiego w kl. III. a i III. b; tygodniowo godzin 18.

26. Wynar Bazyli, egz. z. n., gospodarz klas III. a i IV. a, uczył języka łacińskiego w kl. III. a, IV. a i IV. b; tygodniowo godzin 18.

27. Ziemski Adam, z. n., uczył geografii w kl. I. a, geografii i historyi w kl. III. a i III. b; tygodniowo godzin 9.

Nauczyciele przedmiotów nadobowiązkowych.

1. Broszkiewicz Antoni, nauczyciel szkoły wydziałowej męskiej, uczył rysunków 6 godzin tygodniowo.

2. Dyduch Tomasz, j. w., uczył gimnastyki 10 godzin tygodniowo.

3. Kozłowski Edward, j. w., uczył historyi kraju rodzinnego w kl. VII. w obydwóch półroczach, w kl. III. b i VIII. b w 1. półroczu i w kl. VI. a w 2. półroczu po jednej godzinie tygodniowo.

4. Langer Antoni, kapelmistrz muzyki salinarnej, uczył śpiewu i muzyki po 4 godziny tygodniowo.

5. Talar Antoni, j. w., uczył kaligrafii 2 godziny tygodniowo.

6. Waśkowski Wawrzyniec, j. w., uczył historyi kraju rodzinnego w kl. IV. a i IV. b w obydwóch półroczach, w kl. VIII. a w 1. półroczu i w VI. b w 2. półroczu po jednej godzinie tygodniowo.

7. Wynar Bazyli, j. w., uczył języka ruskiego 6 godzin tygod.

8. Ziemski Adam, j. w., uczył historyi kraju rodzinnego w kl. III. a w obydwóch półroczach, a w kl. III. b w 2. półroczu po jednej godzinie tygodniowo.

II. Wykaz lektury.

A. Lektura łacińska.

Kl. III. a: Corn. Nep. Aristides, Cimon, Alcibiades, Epaminondas, Pelopidas, Miltiades, Themistocles, Pausanias, Hannibal.

Kl. III. b: Corn. Nep. Aristides, Cimon, Epaminondas, Pelopidas, Miltiades, Themistocles, Pausanias, Hamilcar, Hannibal.

Kl. IV. a i b: Caes. B. G. I. 1—30; IV. z opuszczeniem budowy mostu, VI. i VII. — Ov. Met. I. 89—243.

Kl. V. a: Liv. I. 1—16, 18—35, 38—46, 48—53, 55—60; XXI. 1—3, 5—7, 9—11, 15—17, 21—26, 28, 32, 39, 45—51, 54—57, 60. — Ov. Met. I. 313—415; II. 1—242, 250—382; VI 5—82, 103—107, 137—145; XV. 746—870; Fast. IV. 393—466, 481—564, 567, 568, 575—586, 589—620. Trist. III. 12; IV. 4, 10; Pont. III. 2; IV. 3.

Kl. V. b: Liv. I. i XXI. — Ov. Met. I. 313—415; III. 6—137; VIII. 183—235, 618—720; Trist. I. 1—114, 117—128; Fast. I. 543—586; V. 111—128.

Kl. VI. a i b: Sall. Iug. — Cic. Cat. I. — Verg. Ecl. 1, 9; Georg. 1—42; II. 319—345, 458—540; IV. 8—50; Aen. I.

Kl. VII.: Verg. Aen. II. i VI. — Cic. Arch.; Cato M.

Kl. VIII. a i b: Tac. Germ. 1—27; Ann. I. 1—15, 16—20; II. 41—44, 53—56, 69—73; III. 1—7; IV. 1—10, 37—59; XV. 18—45. — Hor. Carm. I. 1—3; 10, 11, 14, 20, 24, 34, 37; II. 3, 10, 14, 17, 18, 20; III. 9, 30; IV. 3; Epod. 1; Sat. I. 1; Epist. I. 12.

B. Lektura grecka.

Kl. V. a: Xen. Anab. I. 1; 2, 1—5; 3; 5; 6; II. 1; Comm. II. 4; 5; 10. Hom. Il. I., III. 1—300.

Kl. V. b: Xen. Anab. I. 1; 2, 1—5; 3; 4, 1—4; 5—9; 11—19; 6; 7; 8; 9; II. 1; III. 1; 2; 3, 1. Hom. Il. I.

Kl. VI. a: Hom. Il. III., VI., X., XVI., XIX, XXII.. Xen. Cyrop. I. 2, 1—14; 3; 4, 1—2, 25; 5, 2—14; 6, 1; VI. 4, 1—11. Herod. VI. 1—21, 25—31, 43—45, 94—120; IX. 1—5, 10—13, 19—25, 28—33, 36—42, 44—70, 90—93, 96—106.

Kl. VI. b: Hom. Il. III., VI., X., XVI. i XXII. — Herod. V. 35—38, 49—54, 97, 99—126; VIII. 1—10.

Kl. VII.: Demostenes: Pierwsza mowa przeciw Filipowi, Pierwsza mowa olintyjska, Mowa o pokoju. — Hom. Od. I. 1—89; V., VI., VII., XIII.

Kl. VIII. a i b: Sofoklesa Elektra, Platona Apologia 1—24.

C. Lektura polska.

Kl. V.: Oprócz ustępów, zawartych w Próchnickiego Wzorach poezyi i prozy, czytano: Mickiewicz: Pan Tadeusz, Grażyna i Konrad Wallenrod; Słowacki: W Szwajcaryi, Jan Bielecki; Fredro, Zemsta; Szekspir, Hamlet; Sienkiewicz: Szkice węglem, Ta trzecia; Pol, Mohort.

Oprócz ustępów, zawartych w Wypisach, czytano prywatnie: w kl. VI. a i b: Heidenstein, Pamiętniki wojny moskiewskiej; Żółkiewski St., Początek i progres wojny moskiewskiej; Pasek, Pamiętniki; Krasicki: Myszeis, Monachomachia, Doświadczyński, Pan Podstoli: Tarnowski St., Pisarze polityczni; Zabłocki: Fircyk w zalotach, Sarmatyzm: Kitowicz, Pamiętniki; Sienkiewicz: Ogniem i mieczem, Potop, Pan Wołodyjowski, Quo vadis w wydaniu Bobina, Krzyżacy;

w kl. VII.: Niemcewicz, Powrót posła; Mickiewicz: Konrad Wallenrod, Dziady, Sonety; Malczewski, Marya; Goszczyński, Zamek kaniowski; Fredro: Śluby panieńskie, Pan Geldhab, Damy i huzary; Słowacki: Kordyan, Anhelli, Lilla Weneda, Beniowski, Sen srebrny Salomei, Ksiądz Marek, Książę niezłomny Calderona; Korzeniowski: Spekulant, Kollokacya; Szekspir, Sen nocy letniej; Gostomski, Pan Tadeusz; Kallenbach, Adam Mickiewicz;

w kl. VIII.: Krasiński: Irydyon, Nieboska komedya, Przedświt, Niedokończony poemat; Szekspir: Makbet, Król Lear, Sen nocy letniej; Ujejski, Melodye biblijne; Szujski, Wallas; Tarnowski, Studya do historyi literatury polskiej; Tretiak, Szkice; Gostomski, Pan Tadeusz; German, O dramatach Szujskiego; Chmielowski, Nasi powieściopisarze; Sienkiewicz: Rodzina Połanieckich, Quo vadis, Krzyżacy; Wyspiański: Wesele, Warszawianka, Protesilas i Laodamia; Rydel, Zaczarowane koło.

D. Lektura niemiecka.

Oprócz ustępów, zawartych w książkach do czytania, czytano w całości następujące dzieła:

w kl. V. a i b: Goethe, Reineke Fuchs;

w kl. VI. a i b: Goethe, Hermann und Dorothea; Lessing, Emilia Galotti;

w kl. VII.: Schiller: Die Jungfrau von Orleans, Wilhelm Tell;

w kl. VIII. a i b: Schiller, Maria Stuart; Goethe, Faust. I.

III. Wykaz książek,

których używać się będzie w roku szkolnym 1903/1904.

Klasa I.: Wielki katechizm religii katolickiej. Samolewicz, Zwięzła gramatyka języka łacińskiego. Wyd. 2.—4. Steiner i Scheindler, Ćwiczenia łacińskie dla I. kl. Wyd. 2. i 3. Małecki, Gramatyka języka polskiego szkolna w 9. wydaniu. Próchnicki i Wójcik, Wypisy polskie dla I. klasy. Wyd. 2. i 3. German i Petelenz, Ćwiczenia niemieckie dla I. klasy. Wyd. 2.—5. Benoni i Tatomir, Krótki rys geografii w 6. i 7. wydaniu. Brzostowicz, Początki arytmetyki i algebry. Część I. Wyd. 1.—3. Jamrógiewicz, Geometrya poglądowa dla niższych klas gimnazyalnych w 2. i 3. wydaniu. Nowicki-Limbach, Zoologia. Wyd. 6.—10. Rostafiński, Botanika szkolna na klasy niższe. Wyd. 1.—4

Klasa II.: Ks. Dąbrowski, Historya biblijna starego zakonu. Samolewicz, Zwięzła gramatyka języka łacińskiego. Steiner i Scheindler, Ćwiczenia łacińskie dla II. klasy. Małecki, Gramatyka języka polskiego szkolna w 8. wydaniu. Próchnicki i Wójcik, Wypisy polskie dla II. klasy. German i Petelenz, Ćwiczenia niemieckie dla II. klasy. Wyd. 1.—4. Baranowski i Dziedzicki, Geografia powszechna. Wyd. 6.—9. — Semkowicz, Opowiadania z dziejów powszechnych. Część I. — Brzostowicz, Początki arytmetyki i algebry. Część I. Wyd. 2.—3. Jamrógiewicz, Geometrya poglądowa w 2. i 3. wydaniu. Nowicki-Limbach, Zoologia. Wyd. 6.—10. Rostafiński, Botanika szkolna na klasy niższe.

Klasa III.: Ks. Dąbrowski, Historya biblijna nowego zakonu. Samolewicz-Sołtysik, Gramatyka języka łacińskiego. Część II. Wyd. 5.—7. Próchnicki, Ćwiczenia łacińskie dla III. klasy. Wydanie 2.—4. — Cornelius Nepos w wydaniu Patoczki-Zawilińskiego. Fiderer, Gramatyka języka greckiego. Wydanie 2. Taborski-Winkowski, Ćwiczenia greckie. Małecki, Gramatyka języka polskiego w 8. wydaniu. Czubek-Zawiliński, Wypisy polskie dla III. klasy. German i Petelenz, Ćwiczenia niemieckie dla III. klasy. Wyd. 1.—3. Petelenz, Deutsche Grammatik. 2. wyd. Baranowski i Dziedzicki, Geografia powszechna. Wyd. 6.—9. Semkowicz, Opowiadania z dziejów powszechnych. Część II. — Rawer, Dzieje ojczyste. Brzostowicz, Początki arytmetyki i algebry. Część II. Wyd. 1.—3. Jamrógiewicz, Geometrya poglądowa. 2. i 3. wydanie. Kawecki i Tomaszewski, Fizyka dla niższych klas szkół średnich. Wyd. 2. i 3. Łomnicki, Mineralogia dla niższych klas. 2., 3. i 4. wydanie.

Klasa IV.: Ks. Jougan, Liturgika katolicka. Samolewicz-Sołtysik, Gramatyka języka łacińskiego. Część II. w 5., 6. i 7. wydaniu. Próchnicki, Ćwiczenia łacińskie dla IV. klasy. Caesar, Commentarii de bello Gallico. Wydanie Prammera-Bednarskiego. Ovidius. Wydanie Grysara-Ziwsy-Skupniewicza. Fiderer, Gramatyka języka greckiego. Taborski-Winkowski, Ćwiczenia greckie. Małecki, Gramatyka języka polskiego w 8. wydaniu. Czubek-Zawiliński, Wypisy polskie dla IV. klasy. German i Petelenz, Ćwiczenia niemieckie dla IV. klasy. 1. i 2. wydanie. Petelenz, Deutsche Grammatik. Wydanie 2. — Semkowicz, Opowiadania z dziejów po wszechnych. Część III. Benoni-Majerski, Geografia austr.-węg. monarchii. 2. i 3. wydanie. Rawer, Dzieje ojczyste. Brzostowicz, Początki arytmetyki i algebry. Część II. w 2. wydaniu. Jamrógiewicz, Geometrya poglądowa. 2. i 3. wydanie. Kawecki i Tomaszewski, Fizyka dla niższych klas szkół średnich. 2. i 3. wydanie.

Klasa V.: Ks. Jeż, Nauka wiary. Livius. Wydanie do użytku szkolnego trzecie A. Zingerlego-Majchrowicza. Ovidius. Wyd. Grysara-Ziwsy-Skupniewicza. Samolewicz-Sołtysik, Gramatyka języka łacińskiego. Część II. w 5., 6. i 7. wydaniu. Fiderer, Chrestomatya z pism Xenofonta. Homera Iliada. Część I., wydanie Scheindlera-Sołtysika. Fiderer, Gramatyka języka greckiego. Próchnicki, Wzory poezyi i prozy. Mickiewicz, Pan Tadeusz. Słowacki, Jan Bielecki. Fredro, Zemsta. Sienkiewicz, Pójdźmy za Nim. Petelenz und Werner, Deutsches Lesebuch für die V. Classe. Goethe, Reineke Fuchs. Wydanie Graesera. Zakrzewski, Historya powszechna. Tom I. — Dziwiński, Zasady algebry. Wyd. 2. Močnik-Maryniak, Geometrya dla wyższych klas. 3., 4. i 5. wydanie. Łomnicki, Mineralogia i geologia w 3., 4. i 5. wydaniu. Rostafiński, Botanika szkolna dla klas wyższych. Wyd. 2.

Klasa VI.: Ks. Jougan, Dogmatyka szczegółowa. Sallustius, Wojna z Katyliną. Wydanie Linkera-Klimschy-Sołtysika. Vergilius. Wydanie Eichlera-Rzepińskiego. Cicero, Cztery mowy przeciw Katylinie. Wydanie Kornitzera-Sołtysika. Samolewicz-Sołtysik, Gramatyka języka łacińskiego. Część II. Wyd. 5. 7. Fiderer, Chrestomatya z pism Xenofonta. Homera Iliada. Część I. i II., wydanie Scheindlera-Sołtysika. Herodot. Wydanie Hintnera. Fiderer, Gramatyka języka greckiego. Wypisy polskie St. Tarnowskiego i J. Wójcika. Część I. Kochanowski: Odprawa posłów greckich, Treny. Zabłocki, Fircyk w zalotach. Niemcewicz, Powrót posła. Rzewuski, Listopad. Petelenz und Werner, Deutsches Lesebuch für die sechste Classe. Lessing, Minna von Barnhelm. Goethe, Hermann und Dorothea. Wydanie Graesera. Jahner, Deutsche Grammatik. Zakrzewski, Historya powszechna. Tom I., II. i III. Lewicki, Zarys dziejów Polski i krajów ruskich z nią połączonych. Dziwiński, Zasady algebry. Močnik-Maryniak, Geometrya dla wyższych klas w 3., 4. i 5. wydaniu. Kranz, Tablice pięciocyfrowe logarytmów lub Logarytmy Schlömilcha. Petelenz, Zoologia dla wyższych klas szkół średnich.

Klasa VII.: Ks. Szczeklik, Etyka katolicka. Cicero: Orationes selectae. Ed. II. Nohl. Vol. VI., Mowa o naczelnem dowództwie Pompejusa, Lelius o przyjaźni. Wydanie Kornitzera-Sołtysika. Vergilius.

Wydanie Eichlera-Rzepińskiego. Samolewicz-Sołtysik, Gramatyka języka łacińskiego. Część II. w 5., 6. i 7. wydaniu. Homera Odysseja. Wydanie Christa-Jezienickiego. Demostenes, Wybór mów. Wydał Wotke-Schmidt. Wydanie 2. Fiderer, Gramatyka języka greckiego. Wypisy polskie St. Tarnowskiego i J. Wójcika. Część I. Wypisy polskie St. Tarnowskiego i Fr. Próchnickiego. Część II. Feliński, Barbara Radziwiłłówna. Mickiewicz: Dziady. Cz. II., Konrad Wallenrod. Słowacki: Lilla Weneda, Balladyna, Ksiądz Marek. Fredro: Pan Geldhab, Śluby panieńskie. Petelenz und Werner, Deutsches Lesebuch für die siebente Classe. Schiller: Die Räuber, Wilhelm Tell. Wydanie Graesera. Jahner, Deutsche Grammatik. Zakrzewski, Historya powszechna. Tom III. Lewicki, Zarys dziejów Polski i krajów ruskich z nią połączonych. Dziwiński, Zasady algebry. Močnik-Maryniak, Geometrya dla wyższych klas. 3., 4. i 5. wydanie. Kranz, Zadania i zagadnienia z arytmetyki i geometryi dla klas wyższych. Logarytmy Kranza lub Schlömilcha. Kawecki i Tomaszewski, Fizyka dla wyższych klas szkól średnich. Tomaszewski, Chemia. Wyd. 2. i 3. Kozłowski, Logika elementarna.

Klasa VIII.: Ks. Jougan, Historya Kościoła katolickiego. Horatius. Wydanie Sasa. Tacitus. Wydanie Müllera: Vol. I. i Germania. Samolewicz-Sołtysik, Gramatyka języka łacińskiego. Część II. Wyd. 5.—7. Platon: Apologia, Kriton i cztery ostatnie rozdziały z Fedona w wydaniu Christa-Lewickiego. Sofoklesa Król Edyp w wydaniu Schuberta-Majchrowicza. Homera Odysseja w wydaniu Christa-Jezienickiego. Fiderer, Gramatyka języka greckiego. Wypisy polskie Stan. Tarnowskiego i Fr. Próchnickiego. Część II. Krasiński: Irydyon, Nieboska komedya. Szujski, Wallas. Petelenz und Werner, Deutsches Lesebuch für die achte Classe. Schiller, Maria Stuart. Goethe, Torquato Tasso. Wydanie Graesera. Jahner, Deutsche Grammatik. Głąbiński-Finkel, Historya i statystyka austr.-węgierskiej monarchii. Lewicki, Zarys dziejów Polski i krajów ruskich z nią połączonych. Dziwiński, Zasady algebry. Močnik-Maryniak, Geometrya dla wyższych klas. 3., 4. i 5. wydanie. Kranz, Zadania i zagadnienia z arytmetyki i geometryi dla klas wyższych. Logarytmy Schlömilcha lub Kranza. Kawecki i Tomaszewski, Fizyka dla wyższych klas szkól średnich. Pechnik, Zarys psychologii.

IV. Temata piśmiennych wypracowań uczniów klas wyższych.

A. W języku polskim.

Klasa V. a: 1. Spór Achillesa z Agamemnonem. (Szk.). — 2. Rozwój uczucia w «Ojcu zadżumionych» J. Słowackiego. (Dom.). — 3. Odysseus w jaskini Polifema. (Szk.). — 4. Znamiona ballady na podstawie znanych utworów. (Dom.). — 5. Jakimi przymiotami odznacza się Grażyna? (Szk.). — 6. Dzieje Horeszków w opowiadaniu Gerwazego. (Dom.). — 7. Charakterystyka Jankiela. (Szk.). — 8. Znaczenie pieśni w życiu narodowem. (Dom.). — 9. Zgon Halbana. (Szk.). — 10. Charakterystyka Cześnika Raptusiewicza w «Zemście» Fredry. (Dom.). — 11. Satyra i jej znaczenie dla społeczeństwa. (Dom.). — 12. Wiosna w «Panu Tadeuszu». (Szk.). — 13. Charakterystyka dowolnej postaci z lektury prywatnej. (Dom.). — 14. Rzym w okresie cesarstwa. (Dom.).

Klasa V. b: 1. Śmierć Hektora. (Szk.). — 2. Treść «Ojca zadżumionych» J. Słowackiego. (Dom.) — 3. Charakterystyka Sędziego. (Na podstawie I. ks. «Pana Tadeusza». Szk.). — 4. Rymwid u Litawora. (Dom.). — 5. Opis zamku Horeszków. (Szk.). — 6. W jaki sposób rodzice odzyskują w «Wiesławie» utraconą córkę? (Dom.). — 7. Gerwazy a Protazy. (Charakterystyka porównawcza. Szk.). — 8. «O wieści gminna! Ty arko przymierza Między dawnemi a młodemi laty: W tobie lud składa broń swego rycerza, Swych myśli przędzę i swych uczuć kwiaty». (Dom.). — 9. Charakterystyka szlachty Dobrzyńskiej. (Na podstawie VI. i VII. ks. «Pana Tadeusza». Szk.). — 10. Stanisław August w oświetleniu Kalinki. (Dom.). — 11. «Satyra prawdę mówi, kłamstwa się wyrzeka, Wielbi urząd, czci króla, lecz sądzi człowieka». (Dom.). — 12. Ryków a Płut. (Szk.). — 13. Charakterystyka dowolnej postaci z lektury prywatnej. (Dom.) — 14. Opis puszczy. (Podług Sienkiewicza. Szk.).

Klasa VI. a: 1. Treść «Bieleckiego» J. Słowackiego. (Dom.). — 2. Woda, jej znaczenie dla cywilizacyi. (Dom.). — 3. Sprawa Halszki z Ostroga. (Na podstawie Górnickiego «Dzieje w Koronie». Szk.). — 4. Cywilizacya Arabów w średnich wiekach. (Dom.). — 5. Andrzej Frycz Modrzewski a Stanisław Orzechowski, jako statyści i ludzie. (Szk.). — 6. O pożytkach rzek. (Dom.). — 7. Historya Skrzetuskiego podług trylogii Sienkiewicza. (Dom.). — 8. Jakie wady wytyka społeczeństwu polskiemu I. Krasicki? (Szk.). — 9. Wpływ literatury łacińskiej na polską w XVI. wieku. (Szk.). — 10. Zdobycie miasta Kapsy. (Na podstawie Sallustyusza. Dom.). —

11. Wychowanie i młodość Mikołaja Doświadczyńskiego. (Szk.). — 12. Jak przedstawia Sienkiewicz księcia Jeremiego Wiśniowieckiego w powieści p. t. «Ogniem i mieczem». (Dom.). — 13. Tok myśli w elegii Niemcewicza, pisanej na cmentarzu wiejskim. (Szk.). — 14. Przyczyny rozwoju literatury polskiej w piątym okresie. (Dom.).

Klasa VI. b: 1. Wschód słońca. (Dom.). — 2. Życie Podbipięty. (Na podstawie lektury domowej. Szk.). — 3. Treść i układ «Odprawy posłów greckich». (Szk.). — 4. Rozwój uczucia w «Trenach» Kochanowskiego. (Dom.). — 5. Moje gniazdo rodzinne. (Opis. Dom.). — 6. Przyczyny wzrostu literatury polskiej w XVI. wieku. (Szk.). — 7. Historya Wołodyjowskiego podług trylogii Sienkiewicza. (Dom.). — 8. Jakie wady wytyka społeczeństwu polskiemu Naruszewicz? (Szk.). — 9. Znaczenie kolei żelaznej. (Dom.). — 10. Zdobycie miasta Tali przez Metellusa. (Szk.). — 11. Znaczenie Konarskiego w literaturze i szkolnictwie polskiem. (Szk.). — 12. Jak przedstawia Sienkiewicz Skrzetuskiego w powieści «Ogniem i mieczem»? (Dom.). — 13. Jak się zapatruje Naruszewicz na historyografię? (Szk.). — 14. Charakterystyka Stanisława Augusta podług Kalinki. (Dom.).

Klasa VII.: 1. Jakie wady wytykają społeczeństwu polskiemu satyrycy w XVIII. wieku? (Dom.). — 2. Stanowisko K. Brodzińskiego w historyi literatury polskiej. (Szk.). — 3. Per aspera ad astra. (Dom.). — 4. Rozbiór utworu p. t.: «Pierwiosnek» Ad. Mickiewicza. (Szk.). — 5. Znaczenie Ludwika XIV. w dziejach Francyi. (Szk.). — 6. Znaczenie lasów w przyrodzie i życiu człowieka. (Dom.). — 7. Opis podziemia. (Podług Wergilego. Szk.). — 8. Stosunek Mickiewicza do Goethego i Schillera na podstawie znanych utworów. (Dom.). — 9. Zasady polityki Demostenesa. (Szk.). — 10. Kompozycya «Konrada Wallenroda». (Dom.). — 11. Wykazać związek pomiędzy życiem Mickiewicza a poematem «Konrad Wallenrod». (Dom.). — 12. Pochwała poezyi na podstawie Cycerona «Pro Archia poeta». (Szk.). — 13. Znaczenie wody w przyrodzie i życiu człowieka. (Dom.).

Klasa VIII. a: 1. Jacek Soplica a Kmicic. (Dom.). — 2. Znaczenie prologu w Irydyonie. (Szk.). — 3. Pierwsze chwile cesarstwa rzymskiego. (Podług Tacyta. Dom.). — 4. Poznanie przyrody poznaniem Stwórcy. (Dom.). — 5. Powstanie i rozwój tragedyi greckiej do czasów Sofoklesa. (Szk.). — 6. Suis et ipsa Roma viribus ruit. (Dom.) — 7. Germanik w świetle Tacyta. (Szk.). — 8. Masynissa a Halban. (Szk.). — 9. Turnieje a wystawy. (Dom.). —

10. Rozwinąć zdanie J. Szujskiego: «Pamięcią wielkich w ojczyźnie ludzi Dźwiga się naród, krzepi się duch». (Szk.).

Klasa VIII. b: 1. Jacek Soplica a Kmicic. (Dom.). — 2. Znaczenie prologu w Irydyonie. (Szk.). — 3. Pierwsze chwile cesarstwa rzymskiego. (Podług Tacyta. Dom.). — 4. Poznanie przyrody poznaniem Stwórcy. (Dom.). — 5. Powstanie i rozwój tragedyi greckiej do czasów Sofoklesa. (Szk.). — 6. Suis et ipsa Roma viribus ruit. (Dom.). — 7. Tyberyusz w świetle Tacyta. (Szk.). 8. Rzym za Nerona. (Podług Irydyona. Szk.). — 9. Rozwiązać myśl, zawartą w dwóch wierszach A. Mickiewicza:

»W słowach tylko chęć widzim, w działaniu potęgę;
Trudniej dzień dobrze przeżyć, niż napisać księgę«. (Dom.).

10. Objaśnić zdanie Brandesa: «Pomiędzy skrzydlatymi duchami Polski Mickiewicz jest orlem, Krasiński łabędziem, Słowacki pawiem». (Szk.).

B. W języku niemieckim.

Klasa V. a: 1. Welche Verehrung wurde den Königen des alten Aegypten bei Lebzeiten und nach dem Tode zu teil? (Szk.). 2. Charakteristik des alten Suchowolski. (Nach der Novelle von H. Sienkiewicz: «Der alte Diener». Dom.). — 3. Die Unterwelt in der griechischen Mythologie. (Szk.). — 4. Auf welche Weise sucht Grimbart in seiner Verteidigungsrede seinen Verwandten Reineke zu entlasten? (Dom.). — 5. Die Treue, sie ist doch kein leerer Wahn. (Nachzuweisen aus dem Gedichte von Schiller: «Die Bürgschaft». Dom). — 6. Die Priesterschaft bei den alten Griechen. (Nach der Schullektüre. Szk.). — 7. Wie ich heuer den heiligen Abend zugebracht habe. (Dom.). — 8. Wie rettet Reineke dem König Nobel Thron und Leben? (Dom.). — 9. Die Frucht des Gebetes. (Nacherzählung. Szk.). — 10. Inhalt und Grundgedanke des Gedichtes von Rückert: «Das Bäumlein, das andere Blätter hat gewollt». (Dom.). — 11. Was berichtet uns Livius über L. Quinctius Cincinnatus? (Szk.). — 12. Wie widerlegt Reineke die gegen ihn vorgebrachten Anklagen, als er das zweitemal vor Gericht erscheint? (Dom.). — 13. Ein Spaziergang im Frühlinge. (Dom.). — 14. Die Kraniche des Ibykus. (Inhaltsangabe. Szk.).

Klasa V. b: 1. Das Birkenreis. (Nacherzählung. Szk.). — 2. Vaters Heimkehr. (Inhaltsangabe. Dom.). — 3. Nebukadnezar als Eroberer und Organisator. (Nach der Schullektüre. Szk.). — 4 Der Unterschied zwischen der dorischen und jonischen Säule. (Dom.). — 5. Welchen Streich spielt Reineke dem Braun. (Reineke Fuchs.

II. Gesang. Dom.). — 6. Die spartanische Staatsverfassung. (Nach der Schullektüre. Szk.). — 7. Ausgrabungen in Pompeji. (Nach der Schullektüre. Dom.). — 8. Die Bürgschaft von Fr. von Schiller. (Inhaltsangabe. Dom.). — 9. Hektors Tod. (Eine Nacherzählung. Szk.). — 10. Die Zerstörung Karthagos im Jahre 146 vor Christi Geburt. (Nach der Schullektüre. Dom.). — 11. Der Gang der römischen Geschichte bis zur Unterwerfung Italiens. (Szk.). — 12. Warum wird der Adler und nicht der Strauss König der Vögel genannt? (Dom.). — 13. Zauberlehrling. (Nach dem Lesebuche. Dom.). — 14. Die Orientreise des Kronprinzen Rudolf. (Szk.).

Klasa VI. a: 1. Telemachs Reise nach Lakedaimon. (Nach der Schullektüre. Szk.). — 2. Was der Mensch säet, das wird er ernten. (Dom.). — 3. Die Besitzung des Wirtes zum goldenen Löwen. (Goethe, «Hermann und Dorothea». Szk.). — 4. Der Graf von Habsburg. (Inhaltsangabe. Dom.). — 5. Der Pfarrer und Apotheker begeben sich auf Kundschaft ins Lager der Vertriebenen. (Nach Goethes «Hermann und Dorothea». Dom.). — 6. Die Befestigung des Hauses Habsburg. (Nach dem Lesebuche. Szk.). — 7. Adler und Taube von J. W. v. Goethe. (Aus dem deutschen Lesebuch. Dom.). — 8. Welches Gedicht von E. Mörike kennst du und was wird darin erzählt? (Dom.). — 9. Charakteristik des Kaisers Tiberius. (Nach Leopold von Ranke. Szk.). — 10. Die Hinrichtung Konradins von Hohenstaufen. (Nach der Schullektüre. Dom.). — 11. Inhalt und Idee der Ballade Uhlands: Das Glück von Edenhall. (Dom.). — 12. Goethes Legende vom Hufeisen. (Szk.). — 13. Der Kampf mit dem Drachen. (I. Teil: Inhalt. Szk.). — 14. Der Kampf mit dem Drachen. (II. Teil: Die Idee der Ballade. Dom.).

Klasa VI. b: 1. Das Feuer im Dienste des Menschen. (Dom.). — 2. Telemachos auf der Burg des Menelaos. (Auf Grund der Lektüre. Szk.). — 3. Marius' Licht- und Schattenseiten. (Dom.). — 4. Die Bedeutung der Kreuzzüge für die Kultur von Westeuropa. (Szk.). — 5. Das Besitztum des Wirtes zum goldenen Löwen. (Szk.). — 6. Dornröschen. (Szk.). — 7. Der Graf von Habsburg. (Dom.). — 8. Der Taucher. (Dom.). — 9. Charakteristik des Pfarrers und des Apothekers in Goethes Hermann und Dorothea. (Szk.). — 10. Tischchen deck' dich. (Auf Grund der Schullektüre. Szk.). — 11. «Der Schatzgräber» v. Bürger verglichen mit dem gleichnamigen Gedichte von Goethe. (Dom.). — 12. Die Anklage des Grossmeisters und die Verteidigung des Ritters in Schillers «Kampf mit dem Drachen». (Dom.). — 13. Der Frühling, ein Bild der Jugend. (Dom.). — 14. Meine Privatlektüre. (Szk.).

Klasa VII.: 1. Ein schöner Herbsttag. (Dom.). — 2. Welche Umstände förderten den Aufschwung der polnischen Literatur während der Regierungszeit des Königs Stanislaus? (Szk.). — 3. Sitten und Leben während des dreissigjährigen Krieges. (Dom.). — 4. Wodurch beglaubigt Johanna ihre göttliche Sendung in den Augen des Königs? (Szk.). — 5. Meine Privatlektüre. (Szk.). — 6. Die Exposition in Schillers «Wilhelm Tell». (Dom.). — 7. Klopstocks Bedeutung in der deutschen Literatur. (Szk.). — 8. Meine Privatlektüre. (Dom.). — 9. Charakteristik der Sturm- und Drangzeit. (Szk.). — 10. Warum tötet Tell den Landvogt? (Szk.).

Klasa VIII. a: 1. Die Verkehrsmittel der Gegenwart. (Dom.). — 2. Der Prolog in der Sophokleischen Elektra. (Inhaltsangabe. Szk.). — 3. «Wo rohe Kräfte sinnlos walten, Da kann sich kein Gebild gestalten». (Schillers «Lied von der Glocke». Dom.). — 4. Mortimers Wandererlebnisse. (Szk.). — 5. Die Romantik in Schillers Drama: Die Jungfrau von Orleans. (Dom.). — 6. Die Abendmahlszene in Schillers «Maria Stuart». (Szk.). — 7. Meine Privatlektüre. (Szk.). — 8. Mephistopheles. (Eine Charakteristik. Dom.). — 9. Der Polenflüchtling. (Szk.).

Klasa VIII. b: 1. Die Verkehrsmittel der Gegenwart. (Dom.). — 2. Der Prolog in der Sophokleischen Elektra. (Inhaltsangabe. Szk.). — 3. «Wo rohe Kräfte sinnlos walten, Da kann sich kein Gebild gestalten. (Schillers «Lied von der Glocke». Dom.) — 4. Das Prozessverfahren in der Angelegenheit der Maria Stuart. (Szk.). — 5. Die Romantik in Schillers Drama: Die Jungfrau von Orleans. (Dom.). — 6. Die Abendmahlszene in Schillers Maria Stuart. (Szk.). — 7. Meine Privatlektüre. (Szk.). — 8. Mephistopheles. (Eine Charakteristik. Dom.). — 9. Der Polenflüchtling. (Szk.).

Temata piśmiennego egzaminu dojrzałości.

1. Cic. Tusc. 1, 29: His et talibus rationibus... diligentiam amittimus. Przekład na język polski.

2. Zakrzewski, Historya powszechna. T. I., str. 143.: «Rzymianie z ludami sąsiednimi... na widok publiczny». Przekład na język łaciński.

3. Platon, Protagoras XII: «Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἄνθρωπος... ὡς νόσον πόλεως». Przekład na język polski.

4. Na przykładach z dziejów objaśnić zdanie z Potopu: «Nie

masz takich terminów, z którychby się viribus unitis przy Boskich auxiliach podnieść nie można».

5. Der Entwicklungsgang der deutschen Literatur im 18. Jahrhundert.

6. a) Rozwiązać równania: $\sqrt{\frac{3x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{3x}} = 2$

$$xy - (x+y) = 54$$

b) $9 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4$

$2 \operatorname{ctg} x + 4 \operatorname{ctg} y = 1$

$x_1 = \alpha$ i $x_2 = \beta$ są kątami przypodstawnymi trójkąta, którego powierzchnia $= 78{\cdot}3\ m^2$; rozwiązać trójkąt.

c) W punktach przecięcia się koła

$x^2 + y^2 + 12y - 22x + 57 = 0$

z osią $xx^{ów}$ wystawić styczne do koła. Styczne te tworzą z osią xx^{ow} kąty: α, β.

Obliczyć powierzchnię i objętość stożka prostego, którego podstawą jest to koło, a którego tworząca (s) nachylona jest do podstawy pod kątem α i $(180-\beta)$.

V. Przedmioty nadobowiązkowe.

I. Nauka języka ruskiego odbywała się w 3 oddziałach po 2 godziny tygodniowo.

W I. oddziele poznali uczniowie na podstawie Bukwaru ruskie litery pisane i drukowane, czytali i w miarę potrzeby tłómaczyli na język polski ciągłe ustępy tej książki, które po dokładnem objaśnieniu opowiadali po rusku. Piękniejszych wierszyków uczyli się na pamięć. W 2. półroczu czytano i opowiadano łatwiejsze ustępy z Ruskiej czytanki dla szkół wydziałowych. Piękniejszych utworów poetycznych uczono się na pamięć. Z gramatyki poznano przygodnie odmianę rzeczownika i czasownika. Uczniowie ćwiczyli się początkowo w ruskiem pisaniu, następnie pisali dyktaty i ustępy z pamięci, z końcem 2. półrocza były wypracowania także stylistyczne.

W II. oddziele zdawano sprawę z ustępów, wybranych z Ruskiej czytanki dla szkół wydziałowych, uwzględniając głównie ustępy, odnoszące się do historyi literatury ruskiej.

Gramatyki uczono systematycznie na podstawie książki: Kokorudz i Konarski, Gramatyka języka ruskiego dla Polaków.

Uczniowie pisali dyktaty i wypracowania stylistyczne.

W III. oddziele na podstawie Barwińskiego Wyimków z literatury poznali uczniowie rozwój i charakterystykę najnowszego okresu ruskiej literatury, życie i dzieła Kotlarewskiego, Artemowskiego, Kwitki, Hrebinki, Szaszkiewicza, Ustyanowicza, Kostomarowa, Metlińskiego i Szewczenki. Pisano wypracowania stylistyczne.

Uczniowie II. i III. oddziału zdawali sprawę z czytanych utworów ruskich, znajdujących się w tutejszej bibliotece dla uczniów.

2. Historya kraju rodzinnego. Naukę tę wykładano w klasie III. a, III. b, IV. a, IV. b, VII., w 1. półroczu kl. VIII. a i b, w 2. półroczu kl. VI. a i b. w myśl programu, przez Wysoką Władzę poleconego

3. Kaligrafia. Na naukę tę uczęszczali uczniowie klasy I. i II. w dwóch oddziałach. Uczono kaligrafii polskiej według wzorów Nowickiego i kaligrafii niemieckiej według wzorów Greinera.

4. Gimnastyka. Nauka gimnastyki odbywała się w 10 godzinach tygodniowo, a w 9 oddziałach.

Wszystkie oddziały przerabiały: 1) ćwiczenia wolne na przemian laskami żelaznemi i ciążkami, częścią w miejscu, częścią w pochodzie; 2) musztrę w miejscu i podczas pochodu; 3) ćwiczenia na przyrządach; 4) ćwiczenia w budowaniu piramid, w zapasach i igrzyskach ze stosownem stopniowaniem i zmianą.

Z ćwiczeń na przyrządach wzięto z uczniami klas najniższych ćwiczenia 1. i 2. stopnia, z klasami wyższemi 2., 3. i 4. stopnia.

W ciągu roku dokonano pomiaru sił uczniów, uwzględniając podnoszenie się na poręczach i na drążku, tudzież skok w wyż, a u najstarszych wspieranie także oburącz ciężaru 50 kg.

5. Nauka rysunków odbywała się w 3 oddziałach po 2 godziny na tydzień; oddziały: drugi i trzeci, dzieliły się na dwie grupy.

Podług wzorów, kreślonych przez nauczyciela na tablicy, zaznajamiano uczniów oddziału I. ze sposobem kreślenia linii prostej w rozmaitych kierunkach, kąta prostego, kwadratu, prostokąta, trójkąta równobocznego, sześciokąta, ośmiokąta, koła, pięciokąta, elipsy i ślimacznicy. Na tle tych figur rysowano ornamenta geometryczne. Posługując się wzorem na tablicy, wyjaśniano charakterystykę najważniejszych typów ornamentu. Rysowano liście i kwiaty stylizowane, kielichy kwiatowe, rozety, ornamenta wolne, ciągłe i wypełniające. Rysowano z natury liście i kwiaty i stylizowano je.

Dla ćwiczenia ręki w prowadzeniu krzywizn rysowano na tablicy.

Uczniowie oddziału II., grupy 1. rysowali podług wzoru na tablicy liście, gałązki i kwiaty akantu na motywach renesansowych.

Uczniom oddziału II., grupy 2. wyjaśniano zasady mieszania i harmonii barw. Rysowano i nakładano farbami trudniejsze ornamenta płaskie wielobarwne podług wzorów Andla i Steigla, z natury liście i kwiaty, motyle i owady.

Używając odpowiednich przyborów, wyjaśniano uczniom oddziału III., grupy 1. sposobem poglądowym główne zasady perspektywy wolnej i oświetlenia. Rysowano z modeli drewnianych bryły, a z modeli gipsowych naczynia starożytne; z natury różne przedmioty z otoczenia, pokrewne kształtem rysowanym modelom, uwzględniając zjawiska perspektywy i oświetlenia.

Podług modeli gipsowych rysowali uczniowie oddziału III., grupy 2. ornamenta plastyczne, architektoniczne członki i ozdoby, medaliony, maski, głowy i popiersia. Najstarsi uczniowie tego oddziału rysowali głowy podług wzorów, studyowali martwą naturę, muszle, zwierzęta i ptaki podług okazów gabinetu naturalnego, rysowali korytarze i klatkę schodową budynku; studyowali ręce i głowy z natury. Podczas wycieczek zaznajamiali się uczniowie z rysowaniem krajobrazu z natury.

Prace rysunkowe uczniów najwyższego oddziału przesłano na wystawę nowszych środków naukowych, urządzoną w bieżącym roku w Wiedniu.

6. Śpiew. Nauki tego przedmiotu udzielano w dwóch oddziałach po 2 godziny tygodniowo.

W oddziele pierwszym poznali uczniowie elementa muzyki w zastosowaniu do śpiewu. Śpiewano odpowiednio ułożone ćwiczenia solmizacyjne i pieśni na jeden, dwa i trzy głosy.

W drugim oddziele śpiewano pieśni kościelne i światowe na chór a capella, na chór mieszany i chór męski z akompaniamentem orkiestry gimnazyalnej. Oddział ten śpiewał na nabożeństwach uczniów w kościele i na uroczystościach szkolnych w zakładzie.

7. Nauki muzyki udzielano na skrzypcach, na wioli, na wiolonczeli, na basach, na flecie i na klarnecie.

Niższy oddział grywał ćwiczenia początkowe w odpowiednim i stopniowym postępie, orkiestra zaś gimnazyalna akompaniowała w kościele do śpiewu i grywała na uroczystościach szkolnych w zakładzie uwertury, kawałki operowe i narodowe.

VI. Fundusz zapomogi ubogich uczniów.

Majątek zarodowy z końcem roku szkolnego 1902. wynosił 5542 K 47 h. W roku 1902/1903. udzielono zapomogi na lekarstwa 85 uczniom w łącznej kwocie 131 K 29 h i powiększono o 161 K 82 h kapitał zarodowy, który obecnie wynosi 5704 K 29 h.

Nadesłali zapomogi dla pewnych uczniów:

Wydział Powiatowy w Bochni 120 K, a 132 K jako dopłatę za utrzymanie 3 uczniów w bursie.

Wydział Powiatowy w Brzesku 230 K.

Wymienionym dobrodziejom, lekarzom miejscowym za bezpłatne leczenie uczniów i Alfredowi Weissowi, aptekarzowi, za opust w cenie lekarstw, dostarczanych ubogim uczniom, składa Dyrekcya najszczersze podziękowanie.

VII. Statystyka uczniów

	KLASA I. a	I. b	II. a	II. b	III. a	III. b	IV. a	IV. b	V. a	V. b	VI. a	VI. b	VII.	VIII. a	VIII. b	Razem
1. Liczba uczniów:																
Przy końcu roku szkoln. 1902	49	48	50	46	37	45	30	34	37	34	50		34 26	40		560
Na początku roku szkol. 1903	63	63	45	45	52	47	34	42	30	31	35	36	44	33	22	622
W ciągu roku szkol. przybyło		1	1				1			2	2		2			9
W ogóle przyjęto	63	64	46	45	52	47	35	42	30	33	37	36	46	33	22	631
Między tymi przyjęto: z innych zakładów:																
a) do klas wyższych	57	63	1	4	1	2	1	1	1	2	3	.	5	.	.	141
b) repetentów	2						1		1	1	1		1		1	8
z tutejszego zakładu:																
a) do klas wyższych	.	.	45	41	48	43	31	39	27	29	31	32	35	33	20	454
b) repetentów	4	1		.	3	2	2	2	1	1	2	4	5	.	1	28
W ciągu roku wystąpiło z zakładu	7	11	3	1	.	3	1	2	.	1	7	2	8	.	3	49
Liczba uczniów z końcem roku 1902/3	56	53	43	44	52	44	34	40	30	32	30	34	38	33	19	582
Między tymi było:																
a) publicznych	56	53	43	44	52	44	33	40	30	32	30	34	37	33	19	580
b) prywatystów	.					.	1					.	1			2
2. Według miejsca urodzenia było:																
z Bochni	16	12	4	5	7	7	12	5	6	3	4	6	4	1	7	99
» powiatu bocheńskiego	20	13	21	10	18	25	4[1]	17	9	10	8	12	8	13	6	194[1]
» » brzeskiego	4	11	10	6	8	7	6	1	12	6	7	4	8	5	2	97
» » limanowskiego	.	2	.	2	2	2	.	2	.	1	1	.	1	1	.	14
» » mieleckiego	.			.		1		.		4		1	1	1	.	8
» » myślenickiego	.			1	.	.	.	.	.	.	.	1				2
» » wielickiego	.	1	.	3				2		2	2	1	1	2	1	15
» innych powiatów	16	13	5	17	15	2	11	12	3	6	8	9	13[1]	8	3	141[1]
» Bukowiny	.	.			1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
» Cesarstwa Rosyjskiego	.	1	3	.	1								1	2	.	8
» W. Ks. Poznańskiego	.							1								1
Razem	56	53	43	44	52	44	33[1]	40	30	32	30	34	37[1]	33	19	580[2]
3. Według języka ojczystego było:																
mówiących po polsku	56	53	43	44	52	44	33[1]	40	30	32	30	34	36[1]	32	19	578[2]
» » rusku	.										.		1	1	.	2
Razem	56	53	43	44	52	44	33[1]	40	30	32	30	34	37[1]	33	19	580[2]
4. Wyznania było:																
katolick., obrz. łacińskiego	52	46	43	42	50	44	32[1]	39	30	31	30	32	34[1]	29	16	550[2]
» » greckiego	1	.	.	1			1	1		1		1	2	1	1	10
ewangelickiego	1					.	.	.	.	.	.			.	2	3
mojżeszowego	2	7		1	2							1	1	3		17
Razem	56	53	43	44	52	44	33[1]	40	30	32	30	34	37[1]	33	19	580[2]

	KLASA															Razem
	I.		II.		III.		IV.		V.		VI.		VII.	VIII.		
	a	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*		*a*	*b*	
5. Wiek uczniów:																
Lat 11 miało	20	13	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	33
» 12 »	16	11	5	12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	44
» 13 »	7	12	9	8	8	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	46
» 14 »	6	10	13	11	12	7	8	10	.	.	.	.	.	.	.	77
» 15 »	5	3	8	10	12	9	8	7	3	2	.	.	.	.	.	67
» 16 »	2	3	4	.	14	8	8	8	6	3	3	4	.	.	.	63
» 17 »	.	1	4	2	5	10	3	12	9	9	2	8	7[1]	.	.	72[1]
» 18 »	.	.	.	1	1	6	5	3	4	8	5	8	5	4	3	53
» 19 »	.	.	.	.	.	2	.	.	5	7	8	7	6	5	7	47
» 20 »	.	.	.	.	.	.	1	.	3	2	9	5	10	10	4	44
» 21 »	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	2	2	6	5	2	18
» 22 »	.	.	.	.	.	.	0[1]	.	.	.	1	.	1	7	1	10[1]
» 23 »	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	2	6
Razem	56	53	43	44	52	44	33[1]	40	30	32	30	34	37[1]	33	19	580[2]
6. Według miejsca pobytu rodziców było:																
z Bochni	32	16	11	14	22	14	20	15	10	6	13	15	15	5	8	216
z powiatu bocheńskiego	17	13	21	14	16	19	3[1]	17	9	11	6	8	8[1]	12	3	177[2]
» » brzeskiego	2	11	9	4	9	7	8	1	10	6	7	6	7	8	2	97
» » limanowskiego	.	2	.	1	2	2	.	1	.	1	1	.	.	1	1	12
» » mieleckiego	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	.	1	1	1	.	7
» » wielickiego	1	1	.	3	.	.	.	3	.	1	2	.	1	1	2	15
z innych powiatów	4	10	.	8	3	2	2	3	1	3	1	4	5	4	3	53
z Cesarstwa Rosyjskiego	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	3
Razem	56	53	43	44	52	44	33[1]	40	30	32	30	34	37[1]	33	19	580[2]
7. Według stanu rodziców było:																
synów właścicieli dóbr	1	.	.	1	2	.	1	2	.	.	.	.	2	1	2	12
» mieszczan	11	3	.	1	1	.	4	.	.	1	.	3	.	3	.	27
» rolników	11	20	20	10	6	25	9	13	11	14	12	12	14	11	4	198
» urzędników państw.	8	7	6	6	5	1	1	6	.	2	4	2	3	2	3	62
» » auton.	1	.	.	.	.	2	.	2	1	.	.	4	3	3	.	16
» wojskowych	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	2
» adwokatów	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	1	4
» notaryuszy	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	1	3
» lekarzy	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2
» aptekarzy	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	2
» profes. szkół średn.	1	.	.	1	.	.	1	1	2	.	1	2	.	.	1	10
» nauczyc. szkół lud.	5	5	1	1	5	.	2	1	1	2	.	.	1	3	1	31
» inżynierów	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	3
» artystów	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
» przemysłowców	.	7	7	5	9	2	3	1	1	2	2	1	1	1	1	43
» kupców	.	.	.	2	6	.	1	.	.	1	.	.	1	2	.	13
» oficyalistów prywat.	2	1	1	1	.	2	1	.	1	1	1	1	2	2	.	16
» sług państwowych	9	6	7	5	6	5	2	11	5	2	4	8	5	1	.	76
» » prywatnych	2	2	.	1	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	1	9
sierot	3	2	1	8	7	3	4[1]	2	.	6	6	.	4[1]	.	4	50[2]
Razem	55	53	43	44	52	44	33[1]	40	30	32	30	34	37[1]	33	19	580[2]

	KLASA															Razem
	I.		II.		III.		IV.		V.		VI.		VII.	VIII.		
	a	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*		*a*	*b*	
8. Klasyfikacya.																
a) Z końc. r. 1902/3 otrzym.:																
stopień pierwszy z odznacz.	11	9	8	2	6	9	7	9	4	5	5	3	6	.	1	85
» pierwszy	38	31	27	33	38	23	16	19	25	24	15	25	21	30	16	381
» drugi	.	.	1	1	2	7	1	1	1	1	1	4	3	1	2	26
» trzeci	1	2	.	.	.	.	0^{1}	1	.	.	3		.	.	.	7^{1}
Przeznaczono do egz. popr.	6	11	7	8	6	5	9	9	.	2	6	2	7	2	.	80
» » » uzupełn.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1
Nie klasyfikowano	.	.	.	.	.	.	.		.	.	.	.	0^{1}		.	0^{1}
Razem . .	56	53	43	44	52	44	33^{1}	40	30	32	30	34	37^{1}	33	19	580^{2}
b) Dodatek do klas. za r. 1901/2																
Przeznaczono do egz. popr.	5	5	7	3	2	5	1	5	4	4	11		7 7	.		66
» » » uzupeł.	.	.	.	.	.	.	.	1		.	1		. .	.		2
Egzamin złożyło	5	4	7	3	2	4	1	4	3	4	12		6 5	.		60
Egzaminu nie złożyło . .	.	1	.	.	.	1	.	2	1	.	.		1 2	.		8
Ostatecz. wynik klas. za rok 1901/2																
Stop. pierwszy z od. otrzym.	6	5	4	8	7	10	5	2	7	4	6		2 3	4		73
Stopień pierwszy otrzymało	40	39	44	37	29	29	25	27	26	29	34		31 17	36		443
» drugi »	3	3	1	.	1	4	.	3	3	1	9		1 5	.		34
» trzeci »	.	1	1	1	.	1^{1}	.	1	1	.	1		. 1	.		8^{1}
Nie klasyfikowano	.	.	.	.	.	.	.	1			.		. .	.		1
Razem . .	49	48	50	46	37	44^{1}	30	34	37	34	50		34 26	40		559^{1}
9. Opłaty uczniów:																
Opłatę szkolną złożyło:																
w I. półroczu	21	14	.	4	7	6	5	6	5	8	5	6	17	5	9	118*
w II.	8	6	10^{a}	9	7	9	8	8	6	9	4^{a}	12	14^{a}	9	11	130*a
Od opłaty szkolnej uwolniono: w I. półroczu . .	39	42	45	11	45	40	29	36	25	24	28	29	27	28	13	491
w II. . .	48	47	34	35	45	35	26	32	24	23	27	22	25	24	8	455
Opłata szkolna wynosiła K:																
w I. półroczu	630	420	.	120	210	180	150	180	150	240	150	180	510	150	255	3525
w II.	240	180	300	270	210	270	240	240	180	270	120	360	420	270	330	3900
Razem . .	870	600	300	390	420	450	390	420	330	510	270	540	930	420	585	7425
10. Uczęszczanie na naukę przedmiotów nadobowiązkowych:																
Język ruski	.	.	.	.	.	.	13	13	12	5	5	5	7	2	.	62
Historya kraju rodz. I. półr.	.	.	.	.	52	46	31	11	.	.	.	.	40	33	21	267
Historya kraju rodz. II. półr.	.	.	.	.	52	14	33	40	.	.	30	34	37	33	19	322
Gimnastyka	32	30	23	37	27	27	18	22	17	21	11	17	13	.	.	295
Rysunki	14	8	3	10	11	5	1	7	5	1	4	3	4	2	3	84
Śpiew	9	4	10	16	16	3	6	8	5	5	9	10	9	4	1	115
Muzyka	2	2	2	2	2	2	2	2	.	1	2	1	1	1	5	27
Kaligrafia	21	17	14	14	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	69
11. Stypendya.																
Liczba stypendyów . . .	.	.	.	2	2	.	1	1	.	.	1	1	3	.	1	12
Kwota ogólna stypendyów	.	.	.	500	360	.	300	240	.	.	200	400	945	.	200	3145

*) Jeden uczeń złożył połowę opłaty szkolnej.
a) Jeden uczeń po złożeniu opłaty szkolnej opuścił zakład.

VIII. Zbiory naukowe.

Biblioteka nauczycielska zawiera 2935 dzieł w 5366 tomach i 3652 programów szkolnych.

Dzieła kupione i w darze otrzymane: Berliner Philologische Wochenschrift. Biblioteka Warszawska. Eos. Kwartalnik historyczny. Poradnik językowy. Przegląd Filozoficzny. Przegląd Polski. Przewodnik bibliograficzny. Przewodnik naukowy i literacki. Fries-Menge, Lehrproben und Lehrgänge aus der Praxis. Verordnungsblatt für den Dienstbereich des Ministeriums für Kultus und Unterricht. Dziennik urzędowy c. k. Rady Szkolnej krajowej. Zeitschrift für die österreichischen Gymnasien. Zarncke Ed., Literarisches Centralblatt.

Gloger Z., Encyklopedya staropolska ilustrowana. Baumeister, Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre. Lindner-Lukas, Handbuch der Psychologie. Kopia H., Ustawy i rozporządzenia, obowiązujące w galicyjskich szkołach średnich. Sprawozdanie c. k. Rady Szk. krajowej o stanie szkół średnich galicyjskich w latach szkolnych 1875—1888. Sprawozdanie c. k. Rady Szkolnej krajowej o stanie wychowania publicznego w roku szkolnym 1886/7 i 1901/2. Tokarski M., Zabawy i gry ruchowe na wolnem powietrzu. Schumacher Phil., Leben Jesu und der Heiligen. Załęski St., Jezuici w Polsce. Aeschylus, Tragoediae. Ed. Weil. Euripides, Tragoediae. Ed. Nauck. Euripides, Tragoediae. Rec. R. Klotz. Vol. III. Sect. II., III. Homer, Ilias. Ed. G. Dindorf. Homer, Odyssea. Ed. G. Dindorf. Sitzler J., Ein ästhetischer Kommentar zu Homers Odyssee. Robert C., Studien zur Ilias. Pindar, Carmina. Rec. O. Schroeder. Plato, Dialogi. Ed. C. Fr. Hermann. Schneider, Schüler-Kommentar zu Platons Euthyphron. Schneider, Schüler-Kommentar zu Platons Apologie des Sokrates. Sophokles, Tragoediae. Ed. G. Dindorf. Sophokles, König Oidipus. Erkl. v. Fr. Ritter. Sophokles, Antigone. Hrsg. v. Au. Boeckh. Plüss Th., Sophokles Elektra. Catullus, Carmina. Rec. L. Müller. Horatius, Carmina. Rec. L. Müller., Suetonius, Quae supersunt omnia. Rec. C. L. Roth. Tacitus, Historiarum libri, qui supersunt. Ed. L. Okęcki. Viertel A., Tiberius u. Germanicus. Vergilius, Opera. Iter. rec. O. Ribbeck. Vergilius, Aeneis in usum scholarum. Iter. rec. O. Ribbeck. Friedlaender L., Darstellungen aus der Sittengeschichte Roms. Mann O., Anthologie aus römischen Dichtern. Thesaurus linguae latinae. Vol. I. fasc. V. i vol. II. fasc. IV. Rozprawy Akademii Umiejętności. Wydział filologiczny. Og. zb. t. 34., 35. i 37. Brückner A., Dzieje literatury polskiej w zarysie. Matuszewski I., Słowacki i nowa sztuka. Potocki A., Marya Konopnicka. Windakiewicz St., Teatr lu dowy w dawnej Polsce Windakiewicz St., Dramat liturgiczny w Polsce średniowiecznej. Eberhard, Synonimisches Handwörterbuch der deutschen Sprache. Fischer K., Goethes Faust. Huch R., Verbreitung und Verfall der Romantik. Heinze, Aufgaben aus klassischen Dramen. Meyer R. M., Geschichte der deutschen Literatur im 19. Jahrhundert. Nietzsche: Also sprach Zarathustra, Jenseits von Gut und Böse. Litzmann, Das deutsche Drama der Gegenwart. Materyały i prace komisyi językowej Akademii Umiejętności w Krakowie. T. II. zesz. 1. Hann-Hochstetter Pokorny, Allgemeine Erdkunde. Federowski M., Lud białoruski na Rusi litewskiej. Beloch, Griechische Geschichte. Breysig, Kulturgeschichte der Neuzeit. German, Historya literatury powszechnej. T. III. Jahreshefte des österreichischen archäologischen Institutes in Wien. Bd. V, VI, H. 1. Łoziński Wł., Sztuka lwowska w XVI. i XVII. w. Monumenta medii aevi historica res gestas Poloniae illustrantia. T. XVI. Koźmian St., O działaniach i dziełach Bismarcka. Register zu den archaeologisch-epigraphischen Mittheilungen aus Oesterreich-Ungarn. Kranz I., Zbiór zadań matematycznych dla wyższych klas szkół średnich. Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności w Krakowie. Og. zb. t. 42. Bernatzik W., Handbuch der allgemeinen u. speciellen Arzeneiverordnungslehre. Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności w Krakowie. Og. zb. t. 42. Skobel F. i Kremer A., Słownik łacińsko polski wyrazów lekarskich. Sprawozdanie komisyi fizyograficznej Akademii Umiejętności w Krakowie. Wimmer Fr., Flora von Schlesien. Winkler E., Vollständiges Real-Lexikon der medicinisch-pharmaceutischen Naturgeschichte u. Rohwaarenkunde. Birnbaum R., Leitfaden der chemischen Analyse für Anfänger. Fresenius R., Anleitung zur qualitativen chemischen Analyse für Anfänger und Geübtere. Godefroy R., Compendium der Pharmacie. Medicus L., Kurze Anleitung zur qualitativen Analyse. Mohr Fr., Lehrbuch der chemisch-analytischen Titrirmethode. Pharmacopoea austriaca. Pisko Fr., Lehrbuch der Physik für die oberen Classen der Gymnasien und Realschulen. Polskie słownictwo chemiczne, uchwalone przez Akademię Umiejętności w Krakowie. Pinner Adolf, Repetitorium der anorganischen Chemie. Roscoe H. E., Kurzes Lehrbuch der Chemie. Śpiewnik kościelny, ułożony do grania na organach i śpiewania na cztery głosy.

Biblioteka dla uczniów zawiera dzieł do czytania 1405 w 2582 tomach, mianowicie:

1. dzieł polskich: a) dla uczniów klas niższych 272 w 452 tomach,
   b) dla uczniów klas wyższych 574 w 1167 «
   razem 846 w 1619 tomach;

2. dzieł ruskich . . . . 48 w 66 tomach,
3. dzieł niemieckich: a) dla uczniów klas niższych 204 w 219 «
b) dla uczniów klas wyższych 307 w 678 «
razem 511 w 897 tomach.

Wypożyczono w roku 1902/1903:

klasy	uczniom	książek polskich	uczniom	książek ruskich	uczniom	książek niem.	książek razem
II. a	24	167	—	—	8	8	175
II. b	32	180	—	—	—	—	180
III. a	33	183	—	—	—	—	183
III. b	25	162	—	—	—	—	162
IV. a	20	145	5	7	33	121	273
IV. b	22	153	4	9	40	138	300
V. a	24	247	5	6	30	101	354
V. b	26	140	3	4	30	75	219
VI. a	26	188	6	13	30	76	277
VI. b	33	223	6	11	32	65	299
VII.	37	421	2	7	35	182	610
VIII. a	30	200	1	3	28	148	351
VIII. b	19	133		—	17	78	211
razem	351	2542	32	60	283	992	3594

Do tej biblioteki przybyły w roku szkolnym 1903. następujące książki:

Ariosto L.-Felicyan, Orland oszalały. Bałucki M.: Grube ryby, Pańskie dziady, Radcy pana Radcy. Barfuss, W kraju mężnych Boerów. Bartoszewicz K., Bałucki Michał. Bjornson Bjornstjerne — Wysocki A., Laboremus. Byron-Morawski Fr., Więzień Czyllonu. Deotyma, Branki w jasyrze. Feldman W., Piśmiennictwo polskie ostatnich lat dwudziestu. Feliński A., Barbara Radziwiłłówna. Fredro A., Przyjaciele. Gawalewicz M., Mechesy. Gąsiorowski W., Huragan. German L., Przegląd dziejów literatury powszechnej. Tom III. Goethe Kasprowicz J., Ifigenia w Taurydzie. Ibsen H.: Rycerze północy, Wróg ludu. Jeske-Choiński T.: Gasnące słońce, Ostatni Rzymianie. Junosza K., Dworek przy cmentarzu. Karpiński F., Sielanki. Kasprowicz J.: Baśń nocy świętojańskiej, Bunt Napierskiego, Salve Regina, Hymn św. Franciszka z Assyżu, Judasz, Marya Egipcyanka. Kochanowski J.: Odprawa posłów greckich, Szachy, Treny. Konopnicka M.: Hellenica, Italia, Linie i dźwięki, Nowe latko. Kraszewski J. I.: Powieści z dziejów rzymskich: Caprea i Roma, Rzym za Nerona. Krechowiecki A.: Najmłodsi, Rdza, Szary wilk, Tarłówna. Laskarys J., Opowiadanie o wojnie Chocimskiej. Lermontow M.-Luboradzki W.: Bohater naszych czasów, Księżniczka Mary. Maeterlinck M.-Sarnecki Z., Wnętrze. Malczewski A., Marya. Matuszewski I., Słowacki i nowa sztuka. Mazurkiewicz J., Andrzej Towiański. Mickiewicz A.: Ballady i romanse, Grażyna, Konrad Wallenrod, Pan Tadeusz. Morawska Z., Rotmistrz Wybraniecki. Morawski K., Dwaj cesarze rzymscy Tyberyusz i Hadryan. Niedola Nibelungów, przekład L. Germana. Pasek J. Chr., Pamiętniki. Pepłowski-Schnür St., Ojciec Bem. Potocki A., Konopnicka Marya. Przyborowski W.: Szwedzi w Warszawie, Widmo Ibrahima, Z przeszłości Warszawy. Rodziewiczówna M.: Dewajtis, Straszny dziadunio, Szary proch. Rydel L., Utwory dramatyczne. Sewer, Matka. Skarga P., Kazania sejmowe. Słowacki J.: Hugo, Mnich, Arab, Lilla Weneda, Mazepa. Sofokles-Kraszewski K., Antygona. Spasowicz W., Syrokomla Władysław. Starzeński L., Z gawęd starego myśliwca. Syrokomla W., Wyrok Jana Kazimierza. Szekspir W.-Paszkowski J., Hamlet. Tarnowski St., Henryk Sienkiewicz. Tetmajer-Przerwa K., Poezye. Woronicz P., Sybilla. Wyspiański S.: Bolesław Śmiały, Kazimierz Wielki, Legion, Protesilas i Laodamia. Żółkiewski St., Początek i progres wojny moskiewskiej.

Andersen, Kazky. Barwińskij A., Ruska czytanka dla wyższoi gimnazyi. Marta Borecka. Istoryczne opowidanie. Franko I., Łys Mykita. Grimm, Kazky. Hejne H., Knyha piseń. Karnejew M. W., Szekspir w powistkach. Korołewskyj I., Dwi mohyli. Kwitka Osnowjanenko, Marusia. Konyśkij O., Wybir z poem. Metlyńskij A., Dumki i pisni. Młaka D. (Worobkiewicz I.), Nad Prutom. Zbirnyk poezyj. Paczowskij M., Narodni dumy. Studyńskij K., Literaturni zamitki. Swift D., Podoroż Guliwera do kraju Liliputiw. Ustyanowicz N., Powisty.

Bartels A., Geschichte der deutschen Litteratur. Bauernfeld E., Bürgerlich und romantisch. Ebner-Eschenbach, Bożena. Federn K., Dante. Goethe J. W.: Leiden des jungen Werthers, Wilhelm Meisters Lehrjahre, Wilhelm Meisters Wanderjahre oder die Entsagenden. Gutzkow K.: Die Ritter vom Geiste, Uriel Acosta. Heiberg H., Apotheker Heinrich. Hoffmann E. T. A., Elixiere des Teufels. Immermann K., Die Epigonen. Jensen W., Dietwald Wernerkin. Kretzer M., Meister Timpe. Lothar R., Henrik Ibsen. Rousseau J. J., Julie oder die neue Heloise. Shakespeare W.-Schlegel A. W., Ein Sommernachtsraum. Spielhagen F., Sturmflut. Stinde J., Die Familie Buchholz. Suttner B., Die Waffen nieder! Wilbrandt A., Die Maler. Zabel E., L. N. Tolstoi.

Gabinet geograficzny ma 118 map ściennych, 22 atlasów, 93 obrazów geograficznych, 9 globusów i 1 telluryum.

Kupiono: Baur-Janota, Austryacko-węgierska monarchia. Kozenn-Janota, Mapa ścienna Europy.

Gabinet historyczny ma 67 map ściennych, 19 atlasów, 155 obrazów historycznych i 61 fotografii.

Gabinet archeologiczny zawiera 40 dzieł w 56 tomach, 5 atlasów, 94 tablic, 172 obrazów, 9 modeli, 1 statuę.

W bieżącym roku przybyły: Brunn H., Griechische Götterideale in ihren Formen erläutert. Dörpfeld W., Troja und Ilion. Friederichs C., Bausteine zur Geschichte der griechisch-römischen Plastik. Furtwängler und Urlichs, Denkmäler griechischer und römischer Skulptur. Jung J., Grundriss der Geographie von Italien und dem Orbis Romanus. Richter O., Topographie der Stadt Rom. Schreiber Th., Kulturhistorischer Bilderatlas; Langla hoplita, Seemana 26 obrazów, Warnecke G., Seemanns Wandbilder. Erläuterungen.

Gabinet fizykalny zawiera 337 przyrządów i 41 modeli.

W ciągu roku szkolnego przybyły następujące przyrządy: Winshursta machina elektryczna, Geisslera rurka fluoryzująca, Crookesa rurki, grafofon, przyrząd podług Plateau'a, wielkie zwierciadło, wahadło elektryczne, igły magnetyczne, voltameter podług Zwicka.

Gabinet przyrodniczy ma: w dziale «Zoologia» 359 okazów, 11 pudełek z owadami, 10 modeli, 98 tablic ściennych, 7 atlasów; w dziale «Botanika» 1080 okazów, 16 zielników, 99 modeli, 49 tablic ściennych, 2 atlasy; w dziale «Mineralogia i geologia» 427 okazów, 177 modeli i 1 atlas.

Nabyte podczas roku szkolnego przedmioty są następujące: krokodyl, 15 obrazów zoologicznych Leutemanna, 9 zoologicznych tablic ściennych Leuckarta i Nitschego, 5 botanicznych tablic ściennych Hartingera.

Gabinet rysunkowy ma modeli: 50 gipsowych, 10 drewnianych i 15 drutowych; wzorów rysunkowych: zeszytów 42, tablic 264.

Kupiono 5 modeli gipsowych, mianowicie: gotycką głowicę, głowę lwa, starożytną maskę kobiecą, płaskorzeźbę Madony i św. Antoniego.

Biblioteka książek szkolnych dla ubogich uczniów zawiera 1249 książek. W ciągu roku wypożyczono 297 uczniom 732 książek.

Pozostałość kasowa z roku 1901/1902 . . .	507 K	85	h.
Wny Dziura Karol ofiarował	10 »	—	»
Nabielec Jan »	4 »	—	»
Uczniowie do puszki złożyli	8 »	82	»
Odsetki od kapitału	25 »	67	»
Razem . . .	556 K	34	h.
Na oprawę książek wydano	15 »	96	»
Pozostaje na rok 1903/4 . . .	540 K	38	h.

Pozostałość kasową złożono w bocheńskiej Powiatowej Kasie Oszczędności na książeczki nr. 4312 i 6040.

IX. Kronika zakładu.

C. k. Rada Szkolna krajowa zamianowała zastępcami nauczycieli w tutejszym zakładzie: Franciszka Penkalę reskr. z dnia 23. lipca 1902 l. 19016, Antoniego Bartczaka reskr. z dnia 18. listopada 1902 l. 38580, Jerzego Pawłowskiego reskr. z dnia 12. lutego 1903 l. 1961.

J. E. Pan Minister W. i O. reskryptem z dnia 22. lipca 1902 l. 16779 zezwolił, aby zastępcom nauczycieli: Adamowi Ziemskiemu i Henrykowi Osuchowskiemu, na przeciąg pierwszego półrocza roku szkolnego 1902/3 obniżono liczbę godzin szkolnych do połowy.

C. k. Rada Szkolna krajowa reskryptem z dnia 17. września 1902 l. 29606 zezwoliła, żeby się w tutejszem gimnazyum odbywała w bieżącym roku szkolnym trzecia egzorta.

C. k. Rada Szkolna krajowa przyznała dodatek kwinkwenalny do płacy: pierwszy profesorowi, dr. Marcinowi Sasowi, reskryptem z dnia 15. września 1902 l. 27115, trzeci profesorowi, Wawrzyńcowi Waśkowskiemu, reskryptem z dnia 17. września 1902 l. 29607, pierwszy profesorowi, ks. Józefowi Porębie, reskryptem z dnia 16. października 1902 l. 32386.

C. k. Rada Szkolna krajowa reskryptem z dnia 23. września 1902 l. 29890 udzieliła nauczycielowi, Franciszkowi Tyczce, urlopu na wrzesień 1902.

C. k. Rada Szkolna krajowa reskryptem z dnia 18. listopada 1902 l. 38314 zatwierdziła w nauczycielstwie nauczyciela, Karola Stacha, i nadała mu tytuł c. k. profesora.

J. E. Pan Minister W. i O. reskryptem z dnia 14. stycznia 1903 l. 127 zezwolił na zmniejszenie liczby godzin nauki do połowy w II. półroczu roku szkolnego 1902/3 zastępcom nauczycieli: Adamowi Ziemskiemu i Antoniemu Talarowi.

C. k. Rada Szkolna krajowa reskryptem z dnia 23. marca 1903 l. 9914 przeniosła zastępcę katechety w c. k. gimnazyum w Tarnowie, ks. Alojzego Nalepę, do tutejszego zakładu.

J. E. Pan Minister W. i O. reskryptem z dnia 9. marca 1903 l. 6443 zezwolił, aby obowiązkowy wymiar godzin szkolnych profesora, Edwarda Kozłowskiego, zmniejszono do 10 na przeciąg drugiego półrocza 1903. roku szkolnego.

Dnia 10. września młodzież szkolna wraz z Gronem nauczycieli uczestniczyła w żałobnem nabożeństwie za spokój duszy ś. p. Najdostojniejszej Cesarzowej i Królowej Elżbiety.

Dzień 4. października, jako dzień Imienin Najjaśniejszego Pana, święcił zakład uroczystem nabożeństwem.

Dnia 19. listopada z powodu Imienin ś. p. Najjaśniejszej Pani, Cesarzowej Elżbiety, odbyło się uroczyste nabożeństwo.

Od dnia 25. do dnia 28. listopada odbywał lustracyę zakładu c. k. krajowy Inspektor szkół średnich, JW. Dr. Ludomił German.

Dnia 13. grudnia odbył się w budynku szkolnym wieczorek muzykalno deklamacyjny ku uczczeniu ś. p. Adama Mickiewicza.

Piśmienny egzamin dojrzałości trwał od dnia 11. do dnia 15. maja, ustny zaś odbył się pod przewodnictwem Tomasza Sołtysika, Radcy szkolnego i dyrektora c. k. Gimnazyum III. w Krakowie, w czasie od dnia 22. do dnia 30. maja.

Dnia 14. czerwca uczestniczyła młodzież szkolna wraz z Gronem nauczycieli w uroczystym obchodzie 25. rocznicy pontyfikatu Ojca świętego, Leona XIII.

Dnia 27. czerwca odbyło się żałobne nabożeństwo za spokój duszy ś. p. Cesarza Ferdynanda.

X. Franciszek Lipiński, miejscowy dziekan i delegat biskupi dla nadzorowania nauki religii w tutejszym zakładzie, przysłuchiwał się w ciągu roku nauce religii w odpowiednim czasie i zakresie.

W ciągu roku szkolnego młodzież katolicka przystępowała trzy razy do spowiedzi i komunii świętej. Prócz tego uczniowie z własnej woli licznie i często odbywali spowiedź i przystępowali do komunii świętej.

Rok szkolny zakończono uroczystem nabożeństwem i rozdaniem świadectw.

X. Wychowanie fizyczne

Stan zdrowia uczniów był w ciągu roku szkolnego pomyślny. Fizyczny ich rozwój popierała i podnosiła nauka gimnastyki i uprawiane na świeżem powietrzu gry i zabawy, z których najulubieńszą jest gra w piłkę nożną, jazda na kole, rzucanie dyskiem i oszczepem, krokiet.

Grom i zabawom oddawała się młodzież podczas pauz pod okiem nauczycieli i w godzinach popołudniowych pod nadzorem nauczyciela gimnastyki na obszernem podwórzu, na którem jest olbrzymia wspinalnia z zupełnem urządzeniem.

W porze zimowej ślizgali się uczniowie na stawie salinarnym i na stawach koło toru kolejowego, w porze zaś letniej używali kąpieli w poblizkiej Rabie pod nadzorem nauczyciela gimnastyki, chodzili z nauczycielem gimnastyki lub z innymi nauczycielami w piękne okolice miasta; niektóre klasy wyższe odbyły wycieczkę do Szczyrzyca i Melsztyna.

XI. Ważniejsze rozporządzenia Władz szkolnych.

1. C. k. Rada szkolna krajowa reskryptem z dnia 22. lipca 1902 l. 421 Pr. zaleca szczególniejszą dbałość o to, żeby zapewnić pomyślny rozwój nauce ruskiego języka, sprawie największej wagi dla pomyślności naszego kraju.

2. C. k. Rada Szkolna krajowa reskryptem z dnia 8. grudnia 1902 l. 597 Pr. wyraża pragnienie, aby młodzież szkolna, milując gorąco swój naród, uczyła się cenić i szanować naród bratni, aby uczniowie jednej narodowości, kraj nasz zamieszkującej, nie występowali nienawistnie przeciw drugiej.

3. C. k. Rada Szkolna krajowa reskryptem z dnia 16. grudnia 1902 l. 39124 uwiadamia o wydaniu przez. c. k. Ministerstwo spraw wewnętrznych broszurki o środkach do zwalczania gruźlicy, a okólnikiem z dnia 11. grudnia 1902 l. 40682 podaje do wiadomości wskazówki c. k. krajowej Rady zdrowia do zwalczania gruźlicy w szkołach.

KLASYFIKACYA UCZNIÓW

za drugie półrocze roku szkolnego 1902/3.

Tłuściejszy druk oznacza stopień pierwszy z odznaczeniem.

Klasa I. A.

Bereta Józef,
Grassmann Jakób,
Jacób Hirsch,
Krawczyk Józef,
Mazurkiewicz Stanisław,
Michnik Kazimierz,
Mixa Czesław,
Ramult Leszek,
Sarnecki Mieczysław,
Śliwka Paweł,
Wcisło Franciszek.
Bisztyga Stanisław,
Brożkiewicz Andrzej,
Bukowski Michał,
Chodacki Antoni,
Czyszczan Karol,
Dadej Józef,
Dziura Karol,
Dżułyński Roman,
Gargul Stanisław,
Gondek Józef,
Hozer Kazimierz,
Hutny Jan,
Jakubowski Jan,
Kalafarski Leopold,
Kalicki Piotr,
Kluba Jan,
Kopeć Karol,
Kosek Stefan,
Koterbski Felix,
Kowalski Mieczysław,
Książkiewicz Felix,
Kuszlik Edward,
Nabielec Jan,
Oleksik Antoni,
Oleksik Jakób,
Pacula Jan,
Prącik Henryk,
Romaniszyn Kazimierz,
Schlosser Klemens,
Sękowski Karol,
Sowa Karol,
Stampfl Alfred,
Szklarz Władysław,
Ślusarczyk Marcelin,
Urbański Maryan,
Wyrwicz Jan,
Zamorski Józef,
Ziętkiewicz Władysław

Stopień trzeci otrzymał 1 uczeń, do egzaminu poprawczego przeznaczono 6 uczniów.

Klasa I. B.

Górski Jan,
Jodłowski Wincenty,
Kałucki Michał,
Kleinberger Naftali,
Kozłowski Józef,
Repetowski Adam,
Rosenberg Ludwik,
Wiłkowicz Stanisław,
Woźniczka Paweł.
Biernat Stefan,
Cisak Alojzy,
Ciuruś Jan,
Czapliński Emil,
Dobesz Stanisław,
Fall Wiktor,
Gaczol Wilhelm,
Gawenda Antoni,
Gernand Tadeusz,
Głębocki Marceli,
Grabowski Antoni,
Gutherz Herman,
Juszczyk Franciszek,
Karamara Józef,
Kleinberger Bronisław,
Koczwara Józef,
Kowalski Zdzisław,
Lipski Jacek,
Lodwiński Tadeusz,
Miękina Władysław,
Nebenzahl Zygmunt,
Nosek Antoni,
Sadulski Piotr,
Sahs Abraham,
Sowa Jan,
Sternal Franciszek,
Swornóg Józef,
Talarek Stefan,
Warchoł Stanisław,
Węglarski Karol,
Wiejowski Franciszek.

Stopień trzeci otrzymali 2 uczniowie, do egzaminu poprawczego przeznaczono 11 uczniów.

Klasa II. A.

Czajkowki Jan.
Kulisiewicz Franciszek.
Lisak Antoni.
Matusiński Jerzy.
Pawłowski Jan.
Piskorz Julian.
Skowron Tomasz,
Słonina Wojciech.
Bajda Stefan,
Bienias Roman,
Bittner Julian.
Dubiel Kazimierz,
Gadowski Franciszek,
Gibała Jan,
Guzy Stanisław,
Hejmo Michał,
Konieczny Ludwik,
Kowal Błażej,
Lach Jan,
Michalik Roman,
Olbrycht Tadeusz,
Piotrowicz Ignacy,
Piotrowicz Stanisław,
Rataj Jan,
Rubinger Julian,
Rybicki Jan,
Rybka Józef,
Ślizowski Konstanty,
Sowa Alojzy,
Sroka Franciszek,
Szlamka Franciszek,
Tworzydło Józef,
Urbański Jan,
Wilczyński Jan,
Ziółkowski Jan.

Stopień drugi otrzymał 1 uczeń; do egzaminu poprawczego przeznaczono 7 uczniów.

Klasa II. B.

Gajek Józef.
Jakubowski Tadeusz.
Bałka Franciszek,
Bąk Stanisław,
Brettschneider Maryan,
Ćwikowski Tadeusz,
Daniec Józef,
Dywan Wiktor,
Dziubiński Artur,
Gąsiorek Ludwik,
Hojarski Stefan,
Jankowski Alexander,
Jaworski Kazimierz,
Kaczor Stefan,
Kalisz Antoni,
Klausner Adolf,
Klimek Franciszek,
Krudowski Stefan,
Letscher Czesław,
Lux Józef,
Machnicki Tadeusz,
Maczyński Jan,
Ogiela Jan,
Piątkowski Franciszek,
Rybotycki Józef,
Stano Władysław,
Stano Wojciech,
Stasiak Tadeusz,
Stoch Tadeusz,
Wasyliszyn Witold,
Worosz Leopold,
Wróbel Jan,
Wróbel Kazimierz,
Zaczek Edward,
Zarzycki Antoni.

Stopień drugi otrzymał 1 uczeń; do egzaminu poprawczego przeznaczono 8 uczniów.

Klasa III. A.

Bernacki Marceli,
Fal Jan.
Feliks Antoni.
Panna Marcin,
Urbański Józef.
Zieliński Tadeusz.
Bialikiewicz Roman,
Dręgowski Stanisław,
Dydyński Maryan,
Dziekan Tadeusz.
Dzięgiel Roman,
Dziubińki Bolesław,
Fluhr Michał,
Gawenda Eugeniusz.
Glodt Ludwik,
Górski Kazimierz,
Jelinek Władysław,
Kalisz Ludwik,
Kądziołka Jan,
Kołoszek Karol,
Kołodziejski Paweł.
Krobicki Mieczysław,
Kuc Ignacy.
Kulma Szczepan,
Lata Franciszek,
Łużecki Józef,
Marcisiewicz Tadeusz.
Miękina Józef,
Mizerski Czesław,
Pacuła Jan,
Pięta Jan,
Piotrowski Stanisław,
Plety Antoni,
Polek Jan,
Przybyś Stanisław,
Romański Bronisław.
Rudziński Eugeniusz,
Skibniewski Alojzy,
Strisower Joachim,
Wolski Zygmunt,
Wroniewicz Maryan,
Zaczek Wincenty,
Zborowski Alexander,
Zechenter Władysław.

Stopień drugi otrzymali 2 uczniowie; przeznaczono do egzam. poprawczego 6 uczniów.

Klasa III. B

Cierniak Andrzej,
Krzyszkowski Józef.
Kubicki Józef,
Kulas recte Babraj Antoni.
Łącki Franciszek,
Niewolak Konstanty,
Nikolay Stanisław.
Stabrawa Marcin,
Tyrcha Władysław Jan.
Bartyzel Jan,
Dymurski Jan,
Fortuna Jan,
Frej Czesław,
Gruszkowski Michał,
Kociołek Franciszek,
Król Jan,
Lach Wojciech,
Michałowski Konstanty,

Mikoszewski Tadeusz,
Moll Edward,
Nieświatowski Tadeusz,
Piechura Mikołaj,
Pomiankowski Kazimierz,
Rogal Wacław,
Rynduch Franciszek,
Safiński Władysław,
Sajak Józef,
Trepa Franciszek,
Trytek Stanisław,
Wawrowski Felix,
Widelka Jan,
Wrebski Jan.

Stopień drugi otrzymało 7 uczniów, do egzaminu poprawczego przeznaczono 5 uczniów.

Klasa IV. A.

Baron Stanisław.
Goslar Julian,
Kociołek Błażej,
Płaneta Jan.
Sadowski Edward.
Switalski Jerzy,
Szydłowski Władysław.
Bibro Józef,
Chrobak Walenty,
Dragan Hugo,
Gębica Jan,
Grzybek Stanisław,
Janiec Władysław,
Jarosiński Antoni,
Karpiński Władysław,
Koloszek Roman,
Lelo Józef,
Mazur Jan,
Nodzyński Karol,
Nowakowski Wacław,
Plader Jan,
Staśko Łukasz,
Warmuz Franciszek.

Stopień drugi otrzymał 1 uczeń, stopień trzeci 0[1]; do egzaminu poprawczego przeznaczono 9 uczniów.

Klasa IV. B.

Grodecki Roman,
Kuc Franciszek.
Majka Władysław.
Nabielec Walenty,
Pietras Wojciech.
Porębski Jan,
Prostak Stanisław.
Turchalski Władysław.
Tylka Stanisław.
Chwastek Antoni,
Filipczyk Jan,
Gaik Antoni,
Grodecki Stanisław,
Harabasz Jan,
Jankowski Władysław,
Ogarek Henryk,
Ożegalski Stanisław,
Possinger Edward,
Rzepka Jan,
Samoder Franciszek,
Sołtys Bolesław,
Szaflarski Wojciech,
Trojanowski Franciszek,
Wilczyński Tadeusz,
Wiśniewski Edward,
Wojakowski Wincenty,
Zaczek Szymon,
Zborowski Józef.

Stopień drugi otrzymał 1 uczeń, stopień trzeci 1; do egzaminu poprawczego przeznaczono 9 uczniów, do egzaminu uzupełniającego 1.

Klasa V. A.

Kargól Adam.
Majka Józef,
Rudziński Stefan.
Szafraniec Stefan.
Barwiołek Stanisław,
Bittner Gerard,
Budzyn Józef,
Gzyl Wojciech,
Jaroński Ludwik,
Jużkiewicz Jan,
Kuc Henryk,
Ludkowski Józef,
Martynowski Alexander,
Pacyna Stanisław,
Pałkowski Franciszek,
Pikulski Władysław,
Plader Józef,
Porębski Stanisław,
Serwin Stanisław,
Slizowski Jan,
Smoluchowski Józef,
Sroka Ludwik,
Szłamka Edward,
Tecza Stanisław,
Tyrcha Alexander,
Wajda Augustyn,
Wilk Stanisław,
Wroniewicz Władysław,
Zieba Jan.

Stopień drugi otrzymał 1 uczeń.

Klasa V. B.

Bogacz Andrzej,
Gołarz Władysław.
Goroń Władysław,
Kubicz Władysław,
Szwenk Zygmunt.
Białkowski Bolesław,
Bujak Stanisław,
Capik Mieczysław,
Cholewa Stanisław,
Ferec Jan,
Gomułkiewicz Wojciech,
Herrmann Stanisław,
Kaczmarczyk Józef,
Kala Józef,
Leyko Michał,
Losiowski Stanisław,
Majka Stanisław,
Matyasik Władysław,

Mączka Michał,
Mroziński Ferdynand,
Nebenzahl Baruch,
Pawłowski Włodzimierz,
Paczek Wojciech,
Piechowicz Wincenty,
Pytel Jakób,
Seruga Józef,
Stawarz Teofil,
Wójcicki Józef,
Zabierzewski Tadeusz.

Stopień drugi otrzymał 1 uczeń; do egzaminu poprawczego przeznaczono 2 uczniów.

Klasa VI. A.

Czekaj Szczepan,
Kramarski Józef,
Książek Jan,
Matyasik Jan,
Wróblewski Kazimierz.
Feix r. Willda Rudolf,
Gaca Michał,
Jarosz Jan,
Jelinek Wiktor,
Karczmarczyk Antoni,
Konieczny Kazimierz,
Krawczyk Michał,
Makowski Stanisław,
Mikołajczyk Henryk,
Musiał Albin,
Nabielec Józef,
Niewolski Stanisław,
Nowakowski Stanisław,
Słodki Józef,
Waśkowski Tadeusz.

Stopień drugi otrzymał 1 uczeń, stopień trzeci 3 uczniowie; do egzaminu poprawczego przeznaczono 6 uczniów.

Klasa VI. B.

Kuc Władysław,
Paryło Franciszek,
Piotrowicz Ludwik
Anioł Edward,
Bardel Józef,
Bieda Adam,
Daniec Tomasz,
Grodecki Henryk,
Helpa Franciszek,
Hodbod Alfred,
Jaworski Władysław,
Kania Jan,
Kargól Julian,
Machnicki Adam,
Majta Franciszek,
Michalik Benedykt,
Monderer Artek,
Palamar Ludwik,
Pomiankowski Jan,
Sroka Tomasz,
Szkocki Tadeusz,
Tara Józef,
Trojan Władysław,
Tymko Leon,
Widełka Józef,
Wojtowicz Stanisław,
Wóycik Franciszek,
Wrebski Stanisław.

Stopień drugi otrzymali 4 uczniowie; do egzaminu poprawczego przeznaczono 2 uczniów.

Klasa VII.

Jantos Jakób,
Mizerski Józef,
Olchawski Marcin,
Piech Szymon,
Rychlicki Józef,
Ziemski Józef.
Biliński Włodzimierz,
Bolek Adolf,
Daniec Bronisław,
Fielek Franciszek,
Güntner Rudolf,
Holländer Abraham,
Kłodnicki Tadeusz,
Koczyński Wojciech,
Kolarz Antoni,
Komęza Stanisław,
Kulczycki Stefan,
Migdał Edward,
Olbrycht Jan,
Osiecki Alexander,
Ossoliński Jan,
Prajer Julian,
Słowik Henryk,
Warcholik Adolf,
Zatowski Jan,
Żuławski Sławomir,
Żytkiewicz Henryk.

Stopień drugi otrzymali 3 uczniowie; do egzaminu poprawczego przeznaczono 7 uczniów.

Klasa VIII. A.

Bieniek Wawrzyniec,
Cebula Jan,
Dudek Józef,
Dziura Kazimierz,
Fasuga Józef,
Gadek Władysław,
Giza Franciszek,
Glodt Antoni,
Hojecki Jan,
Kaczmarczyk Antoni,
Kołodziej Marcin,
Kowalski Zygmunt,
Kwaśniak Jan,
Łabędź Alojzy,
Lach Piotr,
Maziarski Tomasz,
Peltz Jan,
Piotrowski Alexander,
Rybotycki Zygmunt,
Schäftler Abraham,
Sokołowski Maryan,
Sora Jakób,
Stabrawa Józef,
Szerer Abraham,
Szuro Jan,
Warchałowski Jan,
Wojtowicz Władysław,
Wróblewski Stanisław,
Zielenkiewicz Witold,
Zimmermann Berl.

Stopień drugi otrzymał 1 uczeń; do egzaminu poprawczego przeznaczono 2 uczniów.

Klasa VIII. B.

Bauer Karol.
Czerkawski Józef,
Daniec Józef,
Kerekjarto Zygmunt,
Kołodziej Jan,
Krotos Józef,
Łodyński Maryan,
Łucki Antoni,
Maiss Henryk,
Palmi Jan,
Płaczek Władysław,
Sarnecki Tomasz,
Serwin Zygmunt,
Szklarz Anatol,
Świerczek Jan,
Trzos Józef,
Wysocki Władysław.

Stopień drugi otrzymali 2 uczniowie.

Wynik egzaminu dojrzałości.

Egzamin dojrzałości składało: uczniów publicznych	48
eksternistów	5
Uznano za dojrzałych z odznaczeniem uczniów publicznych	8
» » uczniów publicznych	31
» » » eksternistów	—
Pozwolono poprawić egzamin z jednego przedmiotu: uczniom publicznym	8
eksternistom	2
Uznano za niedojrzałych i reprobowano na rok: ucznia publicznego	1
eksternistów	2
bez terminu eksternistę	1

Egzamin dojrzałości z odznaczeniem złożyli:

1. Glodt Antoni, urodz. d. 12. czerwca 1882. r. w Domosławicach.
2. Hojecki Jan, urodz. d. 29. maja 1880. r. w Królówce.
3. Maziarski Tomasz, urodz. d. 12. grudnia 1884. r. w Mielcu.
4. Zimmermann Berl, urodz. d. 4. czerwca 1885. r. w Borku.
5. Bauer Karol Jan, urodz. d. 29. października 1884. r. w Wójtostwie.
6. Krotos Józef, urodz. d. 17. września 1882. r. w Wiśniczu Małym.
7. Łodyński de Łodyna Maryan Tadeusz Witold, urodz. d. 5. lipca 1884. r. w Ole.
8. Szklarz Anatol Walenty, urodz. d. 5. stycznia 1885. r. w Bochni.

Za dojrzałych uznani:

1. Bieniek Wawrzyniec, urodz. d. 10. sierpnia 1881. r. w Bratucicach.
2. Cebula Jan Chrzciciel, urodz. d. 7. września 1881. r. w Królówce.
3. Dudek Józef, urodz. d. 25. stycznia 1881. r. w Królówce.
4. Dziura Kazimierz Klemens, urodz. d. 9. grudnia 1883. r. w Dolinie.
5. Fasuga Józef, urodz. d. 3. lipca 1880. r. w Królówce.
6. Gadek Władysław, urodz. d. 22. września 1884. r. w Kopyczyńcach.
7. Giza Franciszek Xawery, urodz. d. 22. listopada 1883. r. w Szczurowej.
8. Kaczmarczyk Antoni, urodz. d. 22. października 1883. r. w Skrzydlnej.
9. Kołodziej Marcin, urodz. d. 12. października 1883. r. w Bieleży.
10. Kwaśniak Jan, urodz. d. 2. czerwca 1881. r. w Borzęcinie.
11. Lach Piotr Paweł, urodz. 4. lipca 1881. r. w Chełmie.
12. Peltz Jan Ignacy Karol, urodz. d. 19. października 1885. r. w Rzeszowie.

13. Piotrowski Alexander, urodz. d. 25. stycznia 1882. r. w Lipnicy Murowanej.
14. Schäftler Abraham Abusch, urodz. d. 18. lutego 1885. r. w Bochni.
15. Sokołowski Maryan Adam Józef, urodz. d. 8. grudnia 1883. r. w Wieliczce.
16. Sora Jakób, urodz. d. 9. lipca 1882. r. w Kwasowicach.
17. Stabrawa Józef, urodz. d. 8. stycznia 1881. r. w Królówce.
18. Szerer Abraham Eliasz, urodz. d. 4. lutego 1885. r. w Warszawie.
19. Szuro Jan Kazimierz Witold, urodz. d. 26. stycznia 1884. r. w Jaśle.
20. Wójtowicz Władysław, urodz. d. 30. kwietnia 1881. r. w Cichawie.
21. Wróblewski Stanisław Edmund, urodz. d. 10. października 1883. r. w Uszwi.
22. Bialikiewicz Karol Stanisław, urodz. d. 20. października 1880. r. w Wojniczu.
23. Czerkawski Józef, urodz. d. 16. marca 1883. r. w Bezmichowej Górnej.
24. Daniec Józef Jan, urodz. d. 1. maja 1880. r. w Bochni.
25. Kerekjarto Zygmunt Stefan, urodz. d. 11. sierpnia 1884. r. w Bochni.
26. Kołodziej Jan, urodz. d. 5. sierpnia 1881. r. w Szczepanowie.
27. Łucki Antoni Wincenty Samuel, urodz. d. 19. grudnia 1884. r. w Chronowie.
28. Maiss Henryk Stanisław, urodz. d. 19. lipca 1885. r. w Bochni.
29. Palmi Jan Jakób, urodz. d. 1. października 1880. r. w Krzeczowie.
30. Płaczek Władysław Franciszek, urodz. d. 22. czerwca 1883. r. w Niepołomicach.
31. Serwin Zygmunt Stanisław, urodz. d. 2. maja 1884. r. w Bochni.

Z abituryentów, uznanych za dojrzałych, zamierza udać się:

na wydział teologiczny	15
» prawniczy	7
» lekarski	3
» filozoficzny	4
do szkoły politechnicznej	4
» akademii górniczej	1
» » rolniczej	1
» » ziemiaństwa	1
» » innych zawodów	3

Z egzaminowanych abituryentów, uczniów publicznych, ukończyło gimnazyum:

w przeciągu 8 lat	36
» » 9 »	9
» » 10 »	2
» » 11 »	1

OGŁOSZENIE.

Rok szkolny 1903/1904 rozpocznie się nabożeństwem dnia 3 go września 1903. roku.

Wpisy uczniów na rok szkolny 1903/1904 odbywać się będą w trzech ostatnich dniach sierpnia. Późniejsze zgłoszenie się do zapisu tylko w razie ważnych powodów uwzględni Dyrekcya.

Uczniowie mają do wpisów zgłaszać się osobiście w towarzystwie rodziców lub opiekunów i mają przedłożyć świadectwo szkolne z ostatniego półrocza i wypełnioną kartę wpisową.

Uczniowie, nowo do zakładu wstępujący, mają przedłożyć:

a) metrykę chrztu lub urodzenia, bez której żadnego ucznia nie można przyjąć,

b) świadectwo rewakcynacyi, odbytej w roku, poprzedzającym wstąpienie do gimnazyum, z wyjątkiem tych uczniów, u których niewątpliwie sprawdzić można, że przebyli ospę rodzimą,

c) ostatnie świadectwo szkolne tego zakładu, do którego przedtem uczęszczali, z potwierdzeniem Dyrekcyi, że mogą przejść bez przeszkody do innego zakładu,

d) świadectwo moralności w razie przerwy w uczęszczaniu do szkoły.

Przy wpisie uczniowie, wstępujący do zakładu, mają uiścić taksę wstępną w kwocie 4 K 20 h.

Każdy uczeń ma złożyć przy wpisie 2 K na zbiory naukowe.

Z początkiem drugiego półrocza składa każdy uczeń 1 K na cele zabaw szkolnych.

Opłatę szkolną, która na jedno półrocze wynosi 30 K, złożyć mają uczniowie w ciągu pierwszych sześciu tygodni każdego półrocza. Uczniowie klasy I. złożyć ją mogą za pierwsze półrocze w ciągu trzech pierwszych miesięcy.

Egzamina wstępne do klasy I. można składać w dwóch terminach. Pierwszy z tych terminów przypada na początek wakacyi, drugi na dzień 1. i 2., w razie potrzeby także na dzień 3. września.

W każdym z tych terminów rozstrzyga się o przyjęciu lub nieprzyjęciu ucznia do klasy I. stanowczo, a powtórzenia wstępnego egzaminu ani w tutejszym ani w innym zakładzie dopuścić nie można.

Egzamina poprawcze rozpoczną się w dniu 31. sierpnia o godzinie 8. z rana; egzamina wstępne od kl. II. do VIII. należy składać w pierwszej połowie września, w dniu, który Dyrekcya oznaczy.

Ponieważ częste porozumiewanie się szkoły z rodzicami i nadzorem domowym jest rzeczą bardzo pożądaną, dlatego w każdą niedzielę po dniu 1. i 15. miesiąca po nabożeństwie szkolnem znajdować się będzie Dyrektor i profesorowie w sali konferencyjnej dla udzielania rodzicom i nadzorcom domowym wiadomości o postępie w nauce i o prowadzeniu się uczniów.

Uczniowi wolno tylko w takim domu mieszkać, w którym odpowiedzialny nadzorca stosuje się ściśle do regulaminu, ułożonego dla osób, utrzymujących w swych domach uczniów. Jeżeli odpowiedzialny nadzorca nie wypełnia swych obowiązków, Dyrektor zakładu ma prawo zażądać od rodziców lub opiekuna ucznia, aby go natychmiast w innym domu umieścili, a w przeciwnym razie wzbroni uczniowi dalszego uczęszczania do szkoły.

Michał Żułkiewicz,
Dyrektor.