PROGRAMM

des

k. k. Staats-Obergymnasiums

in

BIELITZ

für das Schuljahr 1886/87.

INHALT:

1. Beiträge zur Zahlenlehre und Chronologie. Von Professor Oswald Kaiser.
2. Schulnachrichten vom Director.

BIELITZ, 1887.

Im Selbstverlage des k. k. Staats-Obergymnasiums.

Druck von Eduard Klimek in Bielitz.

Beiträge zur Zahlenlehre und Chronologie.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit soll an einem concreten Beispiele nachweisen, wie den Schülern des Gymnasiums ohne Beeinträchtigung des Lehrzieles in der Mathematik und der streng wissenschaftlichen Begründung der Lehrsätze das Studium durch eine vereinfachte Darstellungs- und Lehrmethode, durch eine einheitliche Auffassung und Behandlung einiger sonst lose aneinander gereihten Abschnitte erleichtert und wie zugleich das Interesse für diesen Gegenstand gefördert werden könnte.

Eine in solcher Weise durchgeführte Erleichterung des mathematischen Studiums erscheint umso wünschenswerter, als die Klagen über die Ueberbürdung der Gymnasialjugend nicht selten gerade mit Berufung auf die Mathematik trotz Instructionen und Weisungen noch immer anhalten. Ohne hier auf die Frage, ob und inwieweit diese und ähnliche Recriminationen den thatsächlichen Verhältnissen entsprechen, näher einzugehen, muss doch, wenn man ohne Voreingenommenheit an die Untersuchung dieser Frage herantritt, ohneweiters zugestanden werden, dass unzweckmäßig eingerichtete Lehrbücher in der Hand eines mindererfahrenen Lehrers am ehesten zur Ueberbürdung der Schüler führen können.

Man sollte nun glauben, dass an den Lehranstalten mit vorwiegend humanistischer Richtung auf jener Stufe des mathematischen Unterrichtes, auf der das formale Bildungsmoment der Mathematik dem realen Bildungswerte voranzustellen sein dürfte und auf der das volle, in keiner Richtung hin irgendwie beeinträchtigte Verständnis das oberste Postulat eines ersprießlichen Unterrichtes ist, den dem mathematischen Unterrichte zugrunde gelegten Lehrtexten im Interesse der Lehrenden und Lernenden eine möglichst klare und einfache Fassung eigen sei.

Wie wenig indess diesem Gesichtspunkte oft Rechnung getragen wird, ersieht man aus den in mathematischen Lehrbüchern für unmittelbar evidente Grössenbeziehungen nicht selten vorgeführten langwierigen Beweisen. Naturgemäß muss sich die Beweisführung noch complicierter gestalten, wenn es sich darum handelt, eine mathematische Wahrheit aus gegebenen Prämissen zu erschließen. Da die Nothwendigkeit jedes Beweises insofern durch die Mangelhaftigkeit des menschlichen Intellectes bedingt ist, als der menschliche Verstand den Zusammenhang zwischen den Prämissen und der Thesis nicht unmittelbar zu erfassen vermag, so ist ein Beweis umso fasslicher und verständlicher, umso kürzer und bündiger, also für die Schule umso brauchbarer, je prägnanter die Darstellung der zwischen den Prämissen und der Thesis zu interpolierenden Gedankenkette und je enger die einzelnen Glieder dieser letzteren aneinander geknüpft sind.

Ein derartiges überaus prägnantes analytisches Darstellungsmittel sind die Zahlencongruenzen, für deren Einbeziehung in den mathematischen Unterricht der Mittelschule sich bereits, wenn auch bisher ohne Erfolg, mehrere Stimmen erhoben haben. Wenn ich es trotzdem unternehme, von neuem die Aufmerksamkeit der Fachcollegen auf diesen Abschnitt der Mathematik zu lenken, so halte ich dies auch aus dem Grunde nicht für unzeitgemäß, weil dem Vernehmen nach von Seite der hohen Unterrichtsverwaltung Maßnahmen und Reformen in Aussicht genommen sind, die unter anderem auch eine weitere Concentration der mathematisch-naturhistorischen Disciplinen am Gymnasium zur Folge haben sollen.

Wie übersichtlich und geradezu überraschend schnell kann mittels der Zahlencongruenzen die Auflösung der unbestimmten Gleichungen ausgeführt werden! Wie einfach und instructiv gestaltet sich auch die Ableitung der Theilbarkeitsgesetze; dieselben eröffnen dem Schüler selbst wieder ein weites Feld selbständiger Thätigkeit, indem sie demselben eine reiche Fundgrube von Eigenschaften und Eigenthümlichkeiten der Zahlen darbieten, und ihm eine innere Befriedigung und reine Erkenntnisfreude gewähren.*)

*) „Consideratio numerorum, quamvis plerisque omni usu carere videatur, tamen per se non solum est iucunda, sed etiam animum ad veritatis indagationem non mediocriter acuit eiusque vires maxime intendit.“ Euler.

Ueberhaupt sind die Grundelemente der Zahlenlehre wie kaum ein anderes Capitel der Mathematik geeignet, die Vorliebe für mathematische Studien zu wecken und das Interesse an denselben zu beleben. Die Zahlenlehre verdient zunächst an und für sich besondere Beachtung, indem die unbestreitbaren Wahrheiten derselben vorzüglich geeignet sind, das Vermögen, Begriffe zu bilden und mitgetheilte Begriffe auf ihre Realität zu prüfen, zu entwickeln und zu üben, den Verstand an sicheres Schließen zu gewöhnen und vor Trugschlüssen zu bewahren. Der klare, wissenschaftliche Zusammenhang der einzelnen Erkenntnisse der Zahlenlehre bietet ein vortreffliches Beispiel für die wissenschaftliche Bearbeitung anderer Fragen. Und wem die Erkenntnis als solche höher steht als der materielle Nutzen, den sie bietet, der wird die Entwickelung dieses Zweiges der Mathematik, dessen Anfänge in die fernsten Zeiten zurückreichen und der gewissermaßen als das geistige Spiegelbild für die Entwickelung der Mathematik im allgemeinen gelten darf, gewiss mit lebhaftem Interesse verfolgen. Haben ja doch die hervorragendsten Mathematiker fast jeder Zeitepoche wie Euklid, Diophantus, Fermat, Euler, Lagrange Legendre, Gauss, Jacobi, Crelle u. a. m. an der Begründung oder dem weiteren Ausbau dieses Zweiges der Mathematik hervorragenden Antheil genommen. Auch die geringen Schwierigkeiten, mit denen die Ableitung der Fundamentalsätze der Zahlenlehre verbunden ist, die Möglichkeit, diese Sätze jederzeit an Beispielen, zu deren Ausführung nur die Kenntnis der Grundoperationen mit ganzen Zahlen erforderlich ist, prüfen und erproben zu können, schützt diese Vorstellungsmassen vor zu rascher Verdunkelung und sichert ihnen auch aus diesem Grunde ein dauerndes und nachhaltiges Interesse.

Während der Ausarbeitung des vorliegenden Aufsatzes gelangte ich indess bald zur Einsicht, dass die wenigen Lehrsätze aus der Zahlenlehre, welche zur Lösung der gestellten Aufgabe nothwendig schienen, auch zur Lösung einiger anderer Probleme von allgemeinerem Interesse hinreichten. Durch weiteres Eingehen auf dieselben gewann aber die Arbeit so sehr an Umfang, dass der gesammte behandelte Stoff allerdings nicht mehr Gegenstand des mathematischen Schulunterrichtes zu werden beanspruchen kann. Dies konnte umsoweniger angestrebt werden, weil die durch die Vereinfachung der Darstellung vielleicht erzielte Erleichterung durch die Vermehrung des Lehrstoffes illusorisch gemacht würde und weil es ja bei dem mathematischen Unterrichte, wofern sein formaler Bildungswert im Vordergrunde bleibt, nicht auf das „Wie viel“, sondern auf das „Wie“ ankommt.

Obschon einiges, wie die Ableitung der Theilbarkeitsgesetze, die Auflösung der unbestimmten Gleichungen, in den einzelnen Jahrescursen des Obergymnasiums im mathematischen Unterrichte benützt werden kann, so ist doch diese Abhandlung hauptsächlich für jene Abiturienten des Gymnasiums bestimmt, welche sich historischen oder mathematisch-technischen Studien widmen wollen. Während es letztere mit einigen der wichtigsten Sätze aus der Zahlenlehre und einigen daraus resultierenden Eigenschaften der Systemzahlen bekannt machen soll, dürfte für den angehenden Historiker mehr die praktische Verwendung der Zahlencongruenzen zur Lösung chronologischer Fragen von Interesse sein.

Mit Rücksicht auf die mathematische Bildungsstufe derjenigen, für welche der Inhalt des Programmaufsatzes vorzugsweise bestimmt ist, wurde vor allem auf eine möglichst einfache, leicht verständliche Darstellung gesehen. Bei den mathematischen Ableitungen wurde, um das Verständnis für die Beziehung gewisser Grössen, z. B. der chronologischen Elemente anzubahnen und zu eröffnen, vom besonderen zum allgemeineren übergegangen. Die wenigen im ersten Abschnitte enthaltenen Lehrsätze, deren Kenntnis zum Verständnisse der folgenden Abschnitte unerlässlich ist, sollen auch denjenigen Gymnasiasten, welchen während der Gymnasialstudien nicht Gelegenheit geboten wurde, diese wenigen Sätze aus der Zahlenlehre kennen zu lernen, einen klaren Einblick in die Grundelemente der Zahlenlehre ermöglichen. Zur Erläuterung und Einübung der Gesetze und Regeln wurde eine verhältnismäßig größere Anzahl von Beispielen angeführt. Dies schien um so nothwendiger, als mit Rücksicht auf den zur Verfügung stehenden Raum von einer Einkleidung der gewonnenen Resultate in die gewöhnliche Wortsprache in den meisten Fällen abgesehen werden musste.

Die Beispiele dienen jedoch auch zur Belebung und Erhöhung des Interesses für derartige Studien; insbesonders möchte ich dies von den chronologischen Beispielen behaupten, die deshalb auch in größerer Anzahl aufgenommen worden sind. Da bekanntlich das Interesse, welches man Entdeckungen und Forschungen entgegenbringt, durch Nennung der Namen, an die sich dieselben knüpfen, ein lebendigeres und wärmeres wird, so wurde auch einiger Namen Erwähnung gethan, die für die Entwickelung der Zahlenlehre, so weit dieselbe im folgenden in Betracht kommt, von hervorragender Bedeutung sind. Damit in Verbindung wurden auch aus dem berühmtesten Werke von Gauss einige Stellen citiert, die theils zur Feststellung wichtiger Definitionen theils zur Grundlage für einige Untersuchungen, die in den Disquisitiones zwar angedeutet, aber nicht weiter ausgeführt sind, dienen sollen.

In dem den chronologischen Beitrag enthaltenden Abschnitte wurde theilweise, um ein sicheres Fundament für die mathematische Behandlung der chronologischen Fragen zu gewinnen und derselben die erforderliche Zuverlässigkeit zu geben, auf jene Werke verwiesen, aus welchen die hiezu erforderlichen Notizen entnommen wurden, theilweise geschah dies auch zu dem Zwecke, um in dem Falle, dass vielleicht einiges wegen der kurzen, aphoristischen Form der Darstellung nicht ganz verständlich sein sollte, auf Quellen für eine weitere Aufklärung hinzuweisen.

In dieser Absicht und nach diesen Gesichtspunkten wurde das Programm abgefasst. Inwieweit es mir gelungen ist, mit dieser Arbeit das Interesse für mathematische und chronologische Studien zu fördern, muss selbstverständlich dem competenten Urtheile der Fachcollegen überlassen werden.

Der Programmaufsatz soll in folgende Hauptabschnitte zerfallen:

I. Congruente Zahlen; Verbindung von Zahlencongruenzen.

II. Theilbarkeitsgesetze und einige daraus sich ergebende Eigenschaften der Systemzahlen mit beliebiger ganzer positiver Basis.

III. Anwendung der Zahlencongruenzen zur Lösung einiger chronologischer Aufgaben.

IV. Auflösung der unbestimmten Gleichungen mittelst der Zahlencongruenzen und deren Benützung zur Lösung chronologischer Aufgaben.

V. Weitere Anwendungen der Zahlencongruenzen.

I.

Congruente Zahlen.

A. Begriff der Zahlencongruenz.

Wenn die Differenz zweier positiven oder negativen ganzen Zahlen a und b durch eine dritte positive Zahl m theilbar ist, so heißen die Zahlen a und b hinsichtlich der Zahl m, welche Modulus genannt wird, congruent.*) Bezeichnet k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, so wird nach Gauss, der den Begriff der congruenten Zahlen in die Mathematik eingeführt hat, die zwischen den Zahlen a, b und m bestehende Beziehung:

$$a - b = km$$

durch die Congruenz: **)

$$a \equiv b \pmod{m}$$

ausgedrückt. Bezeichnet man mit q den Quotienten und mit r den Rest der Division a : m, so ist:

$$a - r = qm$$

oder:

$$a \equiv r \pmod{m}$$

Jede Zahl ist also ihrem Reste r in Beziehung auf den Divisor m als Modul congruent.

Ist a durch m theilbar, so ist $r = \Theta$ und man hat:

$$a \equiv \Theta \bmod m$$

*) „Disquisitiones arithmeticae." Auctore D. Carolo Friderico Gauss. Lipsiae 1801. Sectio prima.

„Si numerus m numerorum a, b differentiam metitur, a et b secundum m congrui dicuntur, sin minus incongrui, ipsum m modulum appellamus. Utcrque numerorum a, b priori in casu alterius residuum, in posteriori vero non residuum vocatur. Hae notiones de omnibus numeris integris tam positivis quam negativis valent, neque vero ad fractos sunt extendendae.

**) zu lesen: a congruent b nach dem Modulus m.

Da congruente Zahlen sich um ein Vielfaches des Modulus unterscheiden, so müssen dieselben durch den Modolus dividiert gleiche Reste geben. Mit Rücksicht darauf können congruente Zahlen auch als gleichrestige Zahlen bezeichnet werden.

Beispiele: *)

$0 \equiv 12 \equiv 36 \equiv 96 \bmod 6,$	$81 \equiv 54 \equiv 27 \equiv 0 \bmod 9$
$7 \equiv 10 \equiv 25 \equiv 100 \bmod 3,$	$3 \equiv 10 \equiv 31 \equiv 101 \bmod 7$
$8 \equiv 30 \equiv 63 \equiv 107 \bmod 11,$	$9 \equiv 35 \equiv 74 \equiv 113 \bmod 13$

Die Reste, welche zwischen Grenzen 0 und m liegen, werden kleinste Reste genannt. So z. B. sind die in den obigen Congruenzen vorkommenden Reste: 1, 3, 8, 9 insgesammt kleinste Reste. Die Grenzen für die Reste können durch Einführung von negativen Resten noch enger gezogen werden, so dass jede Zahl einen Rest hat, dessen absoluter Werth nicht größer als die Hälfte des Modulus ist.

Addiert man zu dem rechten Theile der Gleichung:

$$a = mq + r,$$

den Ausdruck $$+ m - m = \theta,$$ so ist:

$$a = mq + m - m + r$$

oder: $$a = m\,(q + 1) - (m - r)$$

Man kann daher den Quotienten um eine Einheit vergrößern, wenn man an Stelle des Restes r den negativen Rest $(m - r)$ nimmt. Dadurch ist es möglich, die Reste zwischen die Grenzen $-\frac{m}{2}$ und $\frac{m}{2}$ zu bringen. Denn ist $r < \frac{m}{2}$, so entspricht der Rest ohnehin schon der früheren Anforderung, während für $r = \frac{m}{2}$ und $r > \frac{m}{2}$ aus der letzten Gleichung Reste von der geforderten Beschaffenheit erhalten werden.

Jede Zahl hat also in Bezug auf den Modulus m einen positiven oder negativen Rest, dessen absoluter Wert nicht größer als $\frac{m}{2}$ ist. Reste dieser Art bezeichnet Gauss als absolut kleinste **) Reste.

---

*) Im folgenden sollen zum Zwecke einer möglichst kurzen und einfachen Bezeichnungsweise die Klammern bei dem Modulus stets und dieser selbst dann weggelassen werden, wenn dadurch kein Irrthum entstehen kann.

**) Disquisitiones: Sect: I art: 4.

Beispiele:

34	hat d. kl. Rest	7 u. wegen	$34 \equiv 36 - 2$	d. abs. kl. R.	$-2 \bmod 9$
130	„ „ „ „	10 „ „	$130 \equiv 135 - 5$	„	$-5 \bmod 15$
233	„ „ „ „	9 „ „	$233 \equiv 238 - 5$	„	$-5 \bmod 14$

Aus dem Begriffe der Congruenz ergibt sich unmittelbar:

1. Jede Zahl ist in Bezug auf jeden beliebigen Modulus sich selbst congruent. So z. B.

$5 \equiv 5 \bmod 3, \qquad 5 \equiv 5 \bmod 8, \qquad 5 \equiv 5 \bmod 13.$

2. Jeder Theil einer Congruenz kann, ohne dass die Congruenz der beiden Theile aufgehoben würde, um ein Vielfaches des Modulus vermehrt oder vermindert werden. So ist:

$4 \equiv 11 \bmod 7$ und $4 \equiv 11 + 3 \times 7 \equiv 32 \bmod 7$

$29 \equiv -5 \bmod 17$ und $29 \equiv -5 + 5 \times 17 \equiv 80 \bmod 17.$

B. Sätze über die Verbindung von Congruenzen.

Im folgenden sollen nun zunächst jene Lehrsätze aus der Zahlenlehre, welche zum Verständnisse der folgenden Abschnitte unumgänglich nothwendig sind, kurz begründet worden. Hiebei bietet die von Gauss gewählte Bezeichnungsweise, welche an und für sich schon die zwischen den Congruenzen und den Gleichungen bestehende Analogie klar zutage treten lässt, noch den besonderen Vortheil, dass die meisten Transformationen, welche an Gleichungen vorgenommen werden dürfen, auch auf Congruenzen angewendet werden können.

Die Beweise für die Zulässigkeit dieser Transformationen werden im allgemeinen in der Weise geführt, dass man die in Frage stehenden Congruenzen in Gleichungen verwandelt, an den Gleichungen die geforderten Transformationen ausführt und von der schließlich erhaltenen Gleichung zur Congruenz zurückkehrt.

1. Zwei Zahlen a und b, welche nach demselben Modulus in einer dritten Zahl c congruent sind, sind nach diesem Modulus auch unter einander congruent.

Es sei:	Beweis:
$a \equiv c \bmod m$	$a = c + km$
und: $b \equiv c \bmod m$	$b = c + k_1 m$
Daher: $a \equiv b \bmod m.$	$a - b = (k - k_1)\, m$
	$a \equiv b \bmod m.$

$$\begin{array}{l} 19 \equiv 43 \bmod 8 \\ 27 \equiv 43 \;\;,, \;\;,, \\ \hline 19 \equiv 27 \bmod 8. \end{array} \qquad \begin{array}{l} -5 \equiv 29 \bmod 17 \\ 12 \equiv 29 \;\;,, \;\;,, \\ \hline -5 \equiv 12 \bmod 17. \end{array}$$

2. Congruenzen mit gleichem Modul geben addiert oder subtrahiert wieder eine Congruenz von demselben Modul.

Es sei:

$$\begin{array}{l} a \equiv b \bmod m \\ c \equiv d \;\;,, \;\;,, \\ \hline \end{array}$$

Daher: $a \pm c \equiv b \pm d \bmod m.$

Beweis:

$$\begin{array}{l} a = b + km \\ c = d + k_1 m \\ \hline a \pm c = (b \pm d) + (k \pm k_1) m \end{array}$$

oder: $a \pm c \equiv b \pm d \bmod m.$

Aus diesem Satze folgt, dass die Richtigkeit einer Congruenz nicht aufgehoben wird, wenn man zu beiden Theilen derselben die nämliche Zahl addiert oder von beiden Theilen dieselbe Zahl subtrahiert. Jedes Glied einer Congruenz kann also aus einem Theil in den anderen Theil der betreffenden Congruenz mit verändertem Vorzeichen übertragen werden.

Denn für die Voraussetzung:

$$\begin{array}{l} a \equiv b \bmod m \\ \text{muss auch, weil } c \equiv c \;\;,, \;\;,, \\ \hline a + c \equiv b + c \bmod m \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} a \equiv b \bmod m \\ b \equiv b \;\;,, \;\;,, \\ \hline a - b \equiv \Theta \bmod m \end{array}$$

sein.

Beispiele:

$$\begin{array}{l} 23 \equiv 35 \bmod 3 \\ 11 \equiv 17 \;\;,, \;\;,, \\ \hline 34 \equiv 52 \;\;,, \;\;,, \\ 12 \equiv 18 \;\;,, \;\;,, \end{array} \qquad \begin{array}{l} -2 \equiv 8 \bmod 5 \\ 4 \equiv 19 \;\;,, \;\;,, \\ \hline 2 \equiv 27 \;\;,, \;\;,, \\ -6 \equiv -11 \;,, \;\;,, \end{array} \qquad \begin{array}{l} 46 \equiv 24 \bmod 11 \\ 46 - 24 \equiv \Theta \bmod 11 \\ -4 \equiv 47 \bmod 17 \\ -4 - 47 \equiv \Theta \bmod 17. \end{array}$$

3. Congruenzen von gleichem Modul multipliciert geben wieder eine richtige Congruenz von demselben Modul

Es sei:

$$\begin{array}{l} a \equiv b \bmod m \\ c \equiv d \;\;,, \;\;,, \\ \hline ac \equiv bd \end{array}$$

Beweis:

$$\begin{array}{l} a = b + km \\ c = d + k_1 m \\ \hline ac = bd + dkm + bk_1 m + kk_1 m^2 \\ ac = bd + m (dk + bk_1 + kk_1 m) \end{array}$$

oder weil $dk + bk_1 + kk_1 m$ eine ganze Zahl:

$$ac \equiv bd \bmod m.$$

Da $n \equiv n \bmod m$, so ergibt sich nach dem letzten Satze durch Multiplication dieser Congruenz mit $a \equiv b \bmod m$:

$$an \equiv bn \bmod m.$$

Eine Congruenz bleibt daher richtig, wenn man beide Theile mit derselben Zahl multipliciert. Durch Multiplication mit der negativen Einheit können daher die Vorzeichen der Glieder einer Congruenz in die entgegengesetzten verwandelt werden. Auch ist es selbstverständlich gestattet, beide Theile einer Congruenz und den Modulus mit derselben positiven Zahl zu multiplicieren.

Wenn nämlich:

$$a \equiv b \bmod m$$

so ist auch:

$$an \equiv bn \bmod (mn).$$

Beispiele:

$$\begin{array}{rcl} 5 & \equiv & 17 \bmod 6, \\ 11 & \equiv & 23 \ \ „ \ \ „, \\ \hline 55 & \equiv & 391 \ \ „ \ \ „, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} -2 & \equiv & 37 \bmod 13, \\ 69 & \equiv & 4 \ \ „ \ \ „, \\ \hline -138 & \equiv & 148 \bmod 13, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -5 & \equiv & 121 \bmod 21 \\ -3 & \equiv & -3 \ \ „ \ \ „ \\ \hline 15 & \equiv & -363 \bmod 21. \end{array}$$

4. Eine Congruenz bleibt richtig, wenn man beide Theile auf dieselbe Potenz erhebt.

Ist nämlich $a_1 \equiv b_1$, $a_2 \equiv b_2$, $a_3 \equiv b_3$, ... $a_n \equiv b_n \bmod m$, so ist zufolge des unmittelbar vorhergehenden Lehrsatzes:

$$a_1 a_2 a_3 \ldots . a_n \equiv b_1 b_2 b_3 \ldots . b_n \bmod m.$$

Für die Voraussetzung:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots . a_n$$
$$b_1 = b_2 = b_3 = \ldots . b_n$$

geht die letzte Congruenz über in:

$$a^n \equiv b^n \bmod m.$$

Umgekehrt ergibt sich aus:

$$a^n \equiv b^n \bmod m$$

durch Radicieren

$$a \equiv b \bmod m.$$

Beispiele:

$$\begin{array}{lll} 10 \equiv 1 \bmod 3, & 5 \equiv 12 \bmod 7, & -6 \equiv 31 \bmod 37 \\ 10^n \equiv 1 \;\;,,\;\;,, & 25 \equiv 144 \;\;,,\;\;,, & 36 \equiv 961 \;\;,,\;\;,, \end{array}$$

Aus dem in 4 ausgesprochenen Lehrsatze ergeben sich die Bedingungen für die Theilbarkeit der Summe und Differenz zweier Potenzgrößen von demselben Exponenten durch die Summe oder Differenz der Grundzahlen dieser Potenzen. Da nämlich:

$$\begin{array}{ll} \alpha) \quad a - b \equiv 0 \bmod (a-b) & \beta) \quad a + b \equiv 0 \bmod (a+b) \\ \text{oder} \quad a \equiv b \;\;,,\;\;,, & \quad a \equiv -b \;\;,,\;\;,, \\ \hline \text{so ist: } a^n \equiv b^n \;\;,,\;\;,, & \text{so ist: } a^{2n} \equiv b^{2n} \bmod (a+b) \\ \text{oder} \quad a^n - b^n \equiv \ominus \bmod (a-b) & \text{oder } a^{2n} - b^{2n} \equiv \ominus \bmod (a+b) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \gamma) & a + b \equiv \ominus \bmod (a+b) \\ \text{oder} & a \equiv -b \;\;,,\;\;,, \\ \hline \text{so ist:} & a^{2n+1} \equiv -b^{2n+1} \bmod (a+b) \\ \text{oder} & a^{2n+1} + b^{2n+1} \equiv \ominus \bmod (a+b). \end{array}$$

α) Die Differenz zweier solcher Potenzgrößen ist durch die Differenz der Grundzahlen stets theilbar.

β) Die Differenz zweier solcher Potenzgrößen mit geraden Exponenten ist durch die Summe der Grundzahlen theilbar.

γ) Die Summe zweier solcher Potenzgrößen mit ungeraden Exponenten ist durch die Summe der Grundzahlen theilbar.

Addiert man zu beiden Theilen der in α, β zum Schlusse erhaltenen Congruenzen $2b^n$ beziehungsweise $2b^{2n}$ und subtrahiert in $a^{2n+1} + b^{2n+1} \equiv 0 \bmod (a+b)$ von beiden Theilen $2b^{2n+1}$, so folgen hieraus jene Fälle, in welchen die früher bezeichneten Ausdrücke nicht theilbar sind. Es ist:

$$a^n + b^n \equiv 2b^n \bmod (a-b), \quad a^{2n} + b^{2n} \equiv 2b^{2n} \bmod (a+b).$$
$$\text{und: } a^{2n+1} - b^{2n+1} \equiv -2b^{2n+1} \bmod (a+b).$$

5. Congruenzen von gleichem Modul geben durcheinander dividiert nur dann eine richtige Congruenz, wenn die Glieder der Congruenz, durch die man dividiert, gegen den Modulus relativ prim sind. Es seien a und b relativ prim zu m und:

$$\begin{array}{ll} ac \equiv bd \bmod m, & \text{Denn: } ac = bd + km \\ a \equiv b \;\;,,\;\;,, & \qquad a = b + k_1 m \\ \cline{1-1} \text{so ist auch: } c \equiv d \;\;,,\;\;,, & \text{oder: } \; b = a - k_1 m. \end{array}$$

Substituiert man b in $ac = bd + km$, so erhält man:

$$ac = ad - dk_1 m + km$$

oder
$$c = d + m\frac{k - dk_1}{a}.$$

Da a gegen m relativ prim und $\frac{k - dk_1}{a}$ eine ganze Zahl, so ist:

$$c \equiv d \bmod m.$$

Daraus folgt zugleich, dass, wenn allgemein:

$$A \equiv B \bmod m$$

und n gegen m relativ prim, wegen $n \equiv n \bmod m$ auch:

$$\frac{A}{n} \equiv \frac{B}{n} \bmod m$$

sein müsse.

Man darf also beide Theile einer Congruenz durch eine Zahl, welche gegen den Modulus relativ prim ist, dividieren.

Wenn hingegen m und n ein gemeinschaftliches Maß δ haben, so kann Zähler und Nenner des Bruches $\frac{m}{n}$ in:

$$\frac{A}{n} = \frac{B}{n} + \frac{Km}{n}$$

durch δ gekürzt und $\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}$ gesetzt werden. m_1 und n_1 müssen in diesem Falle relativ prim sein. Man hat daher:

$$\frac{A}{n} = \frac{B}{n} + \frac{Km_1}{n_1}$$

oder:
$$\frac{A}{n} \equiv \frac{B}{n} \bmod m_1$$

Haben A, B und m das gemeinschaftliche Maß δ, so geht die Gleichung:

$$A = B + Km,$$

weil $A = \alpha\delta$, $B = \beta\delta$ und $m = \mu\delta$ gesetzt werden kann, über in:

$$\alpha\delta = \beta\delta + K\mu\delta$$

oder:
$$\alpha = \beta + K\mu.$$

Bildet man aus der letzten Gleichung die entsprechende Congruenz, so lautet dieselbe:

$$\frac{A}{\delta} \equiv \frac{B}{\delta} \bmod \left(\frac{m}{\delta}\right)$$

Wenn demnach sämmtliche Glieder einer Congruenz sammt dem Modul ein gemeinschaftliches Maß haben, so gibt die ganze Congruenz sammt dem Modul durch das gemeinsame Maß dividiert eine richtige Congruenz.

Beispiele:

$$\begin{array}{rcl} 16 & \equiv & 30 \bmod 7 \\ -2 & \equiv & 5 \quad " \quad " \\ \hline -8 & \equiv & 6 \bmod 7 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 64 & \equiv & 100 \bmod 12 \\ 8 & \equiv & 20 \quad " \quad " \\ \hline 8 & \equiv & 5 \bmod 12 \end{array}$$

Die Congruenz $8 \equiv 5 \bmod 12$ ist unrichtig; ebenso die Congruenz $3 \equiv 15 \bmod 16$, welche aus $12 \equiv 60 \bmod 16$ erhalten wurde, indem man beide Theile durch 4 dividierte. Aus $12 \equiv 60 \bmod 16$ gehen jedoch folgende richtige Congruenzen hervor:

$$4 \equiv 20 \bmod 16, \qquad 6 \equiv 30 \bmod 8, \qquad 3 \equiv 15 \bmod 4$$

Ueberblickt man die bisher gewonnenen Sätze, so geht unmittelbar hervor, dass dieselben mit den Lehrsätzen, welche zum Ordnen der Gleichungen dienen, fast vollkommen übereinstimmen, infolge dessen auch leicht im Gedächtnisse behalten werden können. Die Mehrzahl derselben lässt sich sogar in den einzigen Satz zusammenfassen: „Congruenzen von demselben Modul kann man addieren, subtrahieren, multiplicieren, potenzieren, radicieren und dividieren, letzteres jedoch nur dann, wenn die Glieder der als Divisor benutzten Congruenz oder die Zahl, durch die man kürzen will, relativ prim zum Modul sind."

6. Bezeichnet a eine beliebige durch die Primzahl p nicht theilbare ganze Zahl, so ist die Differenz $a^{p-1} - 1$ durch p theilbar. Fermat'scher *) Satz.

Wenn man a, 2a, 3a, ... (p—1) a durch p dividiert, so müssen sämmtliche Reste verschieden sein. Denn wären für zwei Divisionen, etwa ha und ma die Reste gleich, so dass:

$$ha \equiv \rho \text{ und } ma \equiv \rho \bmod p$$

so muss auch:

$$(m - h)\, a \equiv 0 \bmod p$$

*) Disquisitiones arithmeticae. Sect III. art: 50. „Theorema hoc, quod tam propter elegantiam tum propter eximiam utilitatem omni attentione dignum, ab inventore theorema Fermatianum appellari solet. Vid. Fermatii Opera Mathem. Tolosae 1679 fol. p 163. Demonstrationem inventor non adjecit, quam tamen in potestate sua esse professus est. Ill: Euler primus demonstrationem publici juris fecit."

sein. Die letzte Congruenz enthält eine Unmöglichkeit, da der Voraussetzung gemäß weder a durch p theilbar ist, noch (h — m) durch p theilbar sein kann.

Man erhält daher, weil der Rest θ ausgeschlossen ist, bei der Division der Zahlenreihe: a, 2a, 3a, 4a . . . . (p — 1) a durch p sämmtliche Reste von 1 bis (p — 1). Durch Multiplication aller auf diese Weise sich ergebenden Congruenzen gelangt man zu:

$$a.\ 2a.\ 3a.\ \ldots\ (p-1)\,a \equiv 1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (p-1) \bmod p.$$

Weil aber 1. 2. 3. . . . . (p — 1) gegen p relativ prim, so darf man beide Theile der Congruenz dadurch dividieren und man hat:

$$a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$$

oder:

$$a^{p-1} - 1 \equiv \theta \bmod p.$$

Dividiert man die obige über (p — 1) a fortgesetzte Zahlenfolge durch p, so müssen die Reste sich wiederholen. Eine Wiederholung der Reste muss jedoch schon früher eintreten. Aus:

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \bmod p$$

folgt nämlich:

$$\left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) \equiv \theta \bmod p.$$

Demgemäß muss entweder:

$$a^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv \theta \bmod p$$

oder:

$$a^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv \theta \bmod p$$

sein.

Beispiele:

$5^6 \equiv 15625 \equiv 1 \bmod 7,\qquad 5^3 \equiv 125 \equiv -1 \bmod 7$

$10^6 \equiv 1000000 \equiv 1 \bmod 7,\qquad 10^3 \equiv 1000 \equiv -1 \bmod 7$

$10^{12} \equiv 1 \bmod 13,\qquad 10^6 \equiv +1 \bmod 13.$

II.

A. Theilbarkeitsgesetze für ein Zahlensystem mit beliebiger ganzer positiver Basis.

Wenn $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$ positive ganze Zahlen sind, von denen jede kleiner als die zur Grundzahl eines Zahlensystems gewählte Zahl b sein soll, so ist das Schema einer $(n + 1)$ ziffrigen Zahl dieses Zahlensystems gegeben durch:

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + \dots a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

Bezeichnet man mit:

$$r_n, r_{n-1}, r_{n-2}, \dots r_2, r_1, r_0$$

die absolut kleinsten Reste, welche den Potenzen

$$b^n, b^{n-1}, b^{n-2}, \dots b^2, b, b^0$$

nach dem Modulus m entsprechen, so ist:

$$b^n \equiv r_n, \quad b^{n-1} \equiv r_{n-1}, \quad b^{n-2} \equiv r_{n-2} \dots b^2 \equiv r_2,$$
$$b \equiv r_1, \quad b^0 \equiv r_0 \mod m$$

Multipliciert man diese Congruenzen mit den Zahlen a_n, a_{n-1}, a_{n-2} .... a_2, a_1, a_0, und addiert sie hierauf, so erhält man mit Benutzung des von Gauss angegebenen Gedankenganges:

$$N \equiv a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + \dots a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$
$$\equiv a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + a_{n-2} r_{n-2} + \dots a_2 r_2 + a_1 r_1 + a_0 r_0 \mod m$$

Soll nun N durch m theilbar, d. i. soll $N \equiv 0 \mod m$ sein, so ergibt sich als Bedingung hiefür:

$$a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + a_{n-2} r_{n-2} + \dots a_2 r_2 + a_1 r_1 + a_0 r_0 \equiv 0 \mod m.$$

Wird $b = 10$ und m der Reihe nach: 2, 4, 8, 16 .... 5, 25, 125 .... 3, 9, 11, 99, 101 .... 7, 13 gesetzt ist, so erhält man die Theilbarkeitsregeln für die genannten Zahlen. Um dieselben auf die Form zu bringen, in welcher sie gewöhnlich dargestellt werden, ist es in einigen Fällen nothwendig, die das

---

Disquisitiones arithmeticae. Sectio I p. 6. „Theorematibus in hoc capite traditis complura quae in arithmeticis doceri solent innituntur e. g. regulae ad explorandam divisibilitatem numeri propositi per 9, 11 aut alios numeros. Secundum modulum 9 omnes numeri decem potestates unitati sunt congruae: quare si numerus propositus habet formam $a + 10b + 100c +$ etc, idem residuum minimum secundum modulum 9 dabit, quod $a + b + c + \dots$ etc. Hinc manifestum est, si figurae singulae numeri decadice expressi sine respectu loci, quem occupant, addantur, summam hanc numerumque propositum eadem residua minima praebere adeoque hunc per 9 dividi posse, si illa per 9 sit divisibilis, et contra. Jdem etiam de divisore 3 tenendum. Quoniam sesundum modulum 11, $100 \equiv 1$ generaliter $10^{2k} \equiv 1$, $10^{2k+1} \equiv 10 \equiv -1$, et numerus formae $a + 10b + 100c +$ etc, secundum modulum 11 idem residuum minimum dabit, quod $a - b + c \dots$ etc; unde regula nota protinus derivatur. Ex eodem principio omnia similia praecepta facile deduçuntur."

Theilbarkeitsgesetz enthaltende Congruenz um ein Vielfaches des Modulus zu vermehren. Unter dieser Voraussetzung ergeben sich als Theilbarkeitsbedingungen für:

$m = 2,\quad r_0 = 1,\ r_1 = r_2 = \ldots\, r_n = \Theta$

$a_0 \equiv \Theta \bmod 2$

$m = 4,\quad r_0 = 1,\ r_2 = 2,\ r_3 = r_4 = \ldots\, r_n = \Theta$

$2a_1 + a_0 \equiv \Theta$ oder: $a_1 10 + a_0 \equiv \Theta \bmod 4$

$m = 8,\quad r_0 = 1,\ r_1 = 2,\ r_2 = 4,\ r_3 = r_4 = \ldots\, r_n = \Theta$

$4a_2 + 2a_1 + a_0 \equiv 0$ oder: $a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \equiv \Theta \bmod 8$

$m = 16,\quad r_0 = 1,\ r_1 = 10,\ r_2 = 4,\ r_3 = 8,\ r_4 = r_5 \ldots\, r_n = \Theta$

$8a_3 + 4a_2 + 10a_1 + a_0 \equiv \Theta$ oder: $a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \equiv 0 \bmod 16$

$m = 5,\quad r_0 = 1,\ r_1 = r_2 = r_3 \ldots\, r_n = \Theta$

$a_0 \equiv \Theta \bmod 15$

$m = 25,\quad r_0 = 1,\ r_1 = 10,\ r_3 = r_4 = \ldots\, r_n = \Theta$

$a_1 10 + a_0 \equiv \Theta \bmod 25$

$m = 125,\quad r_0 = 1,\ r_1 = 10,\ r_2 = -25,\ r_3 = r_4 \ldots\, r_n = \Theta$

$-25a_2 + 10a_1 + a_0 \equiv \Theta$ oder: $a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \equiv \Theta \bmod 125$

$m = 3,\quad r_0 = r_1 = r_2 = \ldots\, r_n = 1$

$a_n + \ldots\, a_2 + a_1 + a_0 \equiv \Theta \bmod 3$

$m = 9,\quad r_0 = r_1 = r_2 = \ldots\, r_n = 1$

$a_n + \ldots\, a_2 + a_1 + a_0 \equiv \Theta \bmod 9$

$m = 11,\quad r_0 = 1,\ r_1 = -1,\ r_2 = 1,\ r_3 = -1,\ r_4 = 1 \ldots$

$\ldots + a_4 - a_3 + a_1 - a_1 + a_0 \equiv \Theta \bmod 11$

$m = 99,\quad r_0 = 1,\ r_1 = 10,\ r_2 = 1,\ r_3 = 10,\ r_4 = 1 \ldots$

$\ldots + a_3 10 + a_2 + a_1 10 + a_0 \equiv \Theta \bmod 99$

$m = 101,\quad r_0 = 1,\ r_1 = 10,\ r_2 = -1,\ r_3 = -10,\ r_4 = 1 \ldots$

$\ldots + (a_5 10 + a_4) - (a_3 10 + a_2) + (a_1 10 + a_0) \equiv 0 \bmod 101$

$m = 7,\quad r_0 = 1,\ r_1 = 3,\ r_2 = 2,\ r_3 = -1,\ r_4 = -3,\ r_5 = -2,\ r_6 = 1 \ldots$

$\ldots - (2a_5 + 3a_4 + a_3) + (2a_2 + 3a_1 + a_0) \equiv \Theta \bmod 7$

oder: $\ldots - (a_5 10^2 + a_4 10 + a_3) + (a_2 10^2 + a_1 10 + a_0) \equiv 0 \bmod 7$

$m = 13,\quad r_0 = 1,\ r_1 = -3,\ r_2 = -4,\ r_3 = -1,\ r_4 = 3,\ r_5 = 4,\ r_6 = 1 \ldots$

$$\ldots . 4a_5 + 3a_4 - a_3 - 4a_2 - 3a_1 + a_0 \equiv 0 \bmod 13$$

oder: $$\ldots - (a_5 10^2 + a_4 10 + a_3) + (a_2 10^2 + a_1 10 + a_0) \equiv 0 \bmod 13.$$

Da es keiner Schwierigkeit unterliegt, die in den vorangehenden Congruenzen ausgesprochenen Theilbarkeitsregeln in Worte zu kleiden, möge es genügen, dieselben an einigen Beispielen zu erläutern. Um an Raum zu ersparen, soll im folgenden von der Einkleidung einfacherer arithmetischer Beziehungen abgesehen werden.

Beispiele:

Welche Reste geben nachstehende Zahlen bei der Division durch:

$$571368 \equiv (7 + 3 + 8) - (5 + 1 + 6) \equiv 6 \bmod 11$$
$$481635 \equiv (8 + 6 + 5) - (4 + 1 + 3) \equiv 11 \equiv 0 \bmod 11$$
$$533313 \equiv (53 + 33 + 13) \equiv 99 \equiv 0 \bmod 99$$
$$68459632512 \equiv 6 + 84 + 59 + 63 + 25 + 12 \equiv 249 \equiv 2 + 49 \equiv 51 \bmod 99$$
$$573984 \equiv 57 + 84 - 39 \equiv 102 \equiv 1 \bmod 101$$
$$6845379 \equiv (6 + 379) - 845 \equiv -460 \equiv -5 \equiv 2 \bmod 7$$
$$3049306 \equiv (3 + 306) - 49 \equiv 260 \equiv 0 \bmod 13.$$

Die Bestimmnng des Restes, den die Systemzahl N durch m gibt, oder die Aufstellung der Kriterien für die Theilbarkeit kann noch in einer andern Art vorgenommen werden. Zum Zwecke der Lösung dieser Aufgabe werde N in folgender Weise zerlegt:

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots . a_{2k+1} b^{2k+1} + a_{2k} b^{2k} + a_{2k-1} b^{2k-1} + \ldots . a_{k+1} b^{k+1} + a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} \ldots . + a_1 b + a_0$$

und die Zahl m unter einer der beiden Formen $b^k + s$ oder $b^k - s$ z. B. im dekadischen Zahlensystem:

$7 = 10 - 3$, $11 = 10 + 1$, $99 = 100 - 1$, $101 = 100 + 1$ u. s. w. dargestellt.

Weil nun $b^k + s \equiv 0 \bmod (b^k + s)$, so folgt daraus:

$b^k \equiv - s \bmod (b^k + s)$	$b^{2k} \equiv s^2 \bmod (b^k + s)$
$b^{k+1} \equiv - bs$ „ „	$b^{2k+1} \equiv bs^2$ „ „
$b^{k+2} \equiv - b^2 s$ „ „	$b^{2k+2} \equiv b^2 s^2$ „ „
. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .
$b^{2k-1} \equiv - b^{k-1} s \bmod (b^k + s)$	$b^{3k-1} \equiv b^{k-1} s^2 \bmod (b^k + s)$.

Multipliciert man in den voranstehenden Congruenzen sowie auch in $b \equiv b$, $b^2 \equiv b^2$ . . . ., $b^{k-1} \equiv b^{k-1} \mod (b^k + s)$ beide Theile mit den entsprechenden Coefficienten und addiert hierauf die Congruenzen, so erhält man für $n \gtreqless 3k - 1$:

1) $N \equiv a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots . a_{2k+1} b^{2k+1} + a_{2k} b^{2k} + a_{2k-1} b^{2k-1} + \ldots . a_{k+1} b^{k+1} + a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots . a_1 b + a_0$
$\equiv (a_n b^n + \ldots . a_{2k+1} b + a_{2k}) s^2 - (a_{2k-1} b^{2k-1} + \ldots . a_{k+1} b + a_k) s + (a_{k-1} b^{k-1} + \ldots . a_1 b + a_0) \equiv R_1 \mod (b^k + s.)$

Aus einer ganz analogen Betrachtung folgt, da

$$b^k - s \equiv 0 \mod (b^k - s).$$

2) $N \equiv a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots . a_{2k+1} b^{2k+1} + a_{2k} b^{2k} + a_{2k-1} b^{2k-1} + \ldots . a_{k+1} b^{k+1} + a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots . a_1 b + a_0$
$\equiv (a_n b^n + \ldots . a_{2k+1} b + a_{2k}) s^2 + (a_{2k-1} b^{2k-1} + \ldots . a_{k+1} b + a_k) s + (a_{k-1} b^{k-1} + \ldots . a_1 b + a_0) \equiv R_2 \mod (b^k - s).$

Wenn daher eine Systemzahl auf ihren Rest durch $b^k + s$ oder $b^k - s$ untersucht werden soll, so theile man dieselbe von rechts nach links in Classen zu k Ziffern. Bei dieser Eintheilung können selbstverständlich auf die letzte Classe auch weniger als k Ziffern entfallen. Die auf diese Weise erhaltenen Classen, als Zahlen betrachtet, multipliciere man der Reihe nach von rechts nach links mit s^0, s, s^2 . . . . u. s. w. Die Differenz der ungeraden und geraden Classen, beziehungsweise die Summe aller Classen, nachdem dieselben in beiden Fällen mit den entsprechenden Potenzen von s multipliciert worden sind, geben durch $b^k + s$ respective durch $b^k - s$ dividiert denselben Rest wie die Systemzahl N.

Als specielle Fälle von besonderem Interesse ergeben sich zunächst aus 1 und 2 für die Voraussetzung $s = 1$:

3) $N \equiv (a_n b^n + \ldots . a_{2k+1} b + a_{2k}) - (a_{2k-1} b^{k-1} + \ldots . a_{k+1} b + a_k) + (a_{k-1} b^{k-1} + \ldots . a_1 b + a_0) \equiv R_3 \mod (b^k + 1).$

4) $N \equiv (a_n b^n + \ldots . a_{2k+1} b + a_{2k}) + (a_{2k-1} b^{k-1} + \ldots . a_{k+1} b + a_k) + (a_{k-1} b^{k-1} + \ldots . a_1 b + a_0) \equiv R_4 \mod (b^k - 1)$.

Ist jedoch s von der Einheit verschieden, hingegen $k = 1$, so ist:

5) $N \equiv (-1)^n a_n s^n + \ldots . (-1)^{2k} a_{2k} s^{2k} + \ldots . (-1)^k a_k s^k + \ldots . a_2 s^2 - a_1 s + a_0 \equiv R_5 \mod (b + s)$.

6) $N \equiv a_n s^n + \ldots . a_{2k} s^{2k} + \ldots . a_k s^k + \ldots a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \equiv R_6 \mod (b - s)$.

Treffen beide Annahmen $s = 1$ und $k = 1$ zusammen, so erhält man:

7) $N \equiv (-1)^n a_n + \ldots . (-1)^{2k} a_{2k} + \ldots . (-1)^k a_k + \ldots . a_2 - a_1 + a_0 \equiv R_7 \mod (b + 1)$.

8) $N \equiv a_n + \ldots . a_{2k} + \ldots . a_k + \ldots . a_2 + a_1 + a_0 \equiv R_8 \mod (b - 1)$.

Bezeichnet man mit S die Ziffersumme sämmtlicher Ziffern, mit S_u und S_g die Ziffersumme an den ungeraden beziehungsweise an den geraden Stellen der Systemzahl N, so können die beiden letzten Formeln auch durch:

$$N \equiv S_u - S_g \equiv R_7 \mod (b + 1)$$
$$N \equiv S \equiv R_8 \mod (b - 1)$$

dargestellt werden.

Aus den Congruenzen 1—8 gehen, wenn man in denselben $b = 10$ und $R_1 = R_2 \ldots . R_8 = 0$ setzt, die schon früher abgeleiteten Theilbarkeitsregeln für das dekadische Zahlensystem hervor. So erhält man z. B. aus 7 und 8 unmittelbar die Theilbarkeitsregel für 11 und 9, aus 3 und 4 für die Substitution $k = 2$ das Theilbarkeitsgesetz für 101 und 99, u. s. w.

Da jedoch im folgenden nur die Theilbarkeitsgesetze für 7 und 13 im dekadischen Zahlensystem einer näheren Betrachtung unterzogen werden sollen, so sollen auch nur die letzteren aus den Congruenzen 6 und 5 abgeleitet werden. Zunächst ergibt sich aus 6 für $b = 10$ und $s = 3$:

$$N \equiv a_n 3^n + \ldots . a_{2k} 3^{2k} + \ldots . a_k 3^k \ldots . + a_2 3^2 + a_1 3 + a_0 \equiv R_6 \mod 7.$$

Da nach dem Fermat'schen Satze $3^6 \equiv 1$, $3^3 \equiv -1 \mod 7$ und überdies $3^0 \equiv 1$, $3 \equiv 3$, $3^2 \equiv 2 \mod 7$, so geht die obige Congruenz über in:

$$N \equiv \ldots\ldots + (2a_8 + 3a_7 + a_6) - (2a_5 + 3a_4 + a_3) + (2a_2 + 3a_1 + a_0) \equiv R_6 \mod 7.$$

Wenn also untersucht werden soll, welchen Rest eine dekadische Zahl bei der Division durch 7 lässt, so multipliciere man die Ziffern dieser Zahl von den Einheiten angefangen mit der Restreihe $+1, +3, +2, -1, -3, -2, +1$, u. s. w. Vor der Multiplication mit den Gliedern dieser Restreihe können die etwa vorkommenden Ziffern 7, 8, 9 der Zahl durch 0, 1, 2 ersetzt werden. Auch können in den erhaltenen Producten Vielfache von 7 sofort in Abzug gebracht werden. Die Summe dieser Producte gibt durch 7 denselben Rest wie die Systemzahl N; ist daher die Summe dieser Producte Θ, so ist die Zahl N durch 7 theilbar.

Beispiele:

Welchen Rest geben folgende Zahlen bei der Division durch 7.

58213	319723	43562141
31231	231231	31231231
$-2+3 \equiv 1$	$-4+2 \equiv -2$	$1-2+1 \equiv \Theta$
	$\equiv 5$	

Aus der allgemeinen Bedingung für die Theilbarkeit einer dekadischen Zahl durch 7, nämlich:

$$\ldots\ldots + (2a_8 + 3a_7 + a_6) - (2a_5 + 3a_4 + a_3) + (2a_2 + 3a_1 + a_0) \equiv \Theta \mod 7$$

ergeben sich dadurch, dass man die Coefficienten der dekadischen Zahl bestimmten Bedingungen unterwirft, wodurch der Bau dieser Zahl eine gewisse Symmetrie erlangen kann, eine Reihe von besonderen Regeln für die Theilbarkeit durch 7.

Für jede zweiziffrige durch 7 theilbare dekadische Zahl muss $3a_1 + a_0 \equiv \Theta \mod 7$ sein.

Z. B. sind in 35, 56 die Summen $3 \times 3 + 5$ und $3 \times 5 + 6$ durch 7 theilbar.

Dreiziffrige durch 7 theilbare dekadische Zahl müssen der Bedingung:

$$2a_2 + 3a_1 + a_0 \equiv \Theta \mod 7$$

entsprechen.

Wird für diesen Fall $a_1 = \Theta$, so muss $2a_2 + a_0 \equiv 0 \bmod 7$ sein. Zahlen dieser Art sind:

903, 805, 602, 504, 406, 308.

Für eine vierziffrige Zahl lautet die Theilbarkeitsbedingung:

$$-a_3 + 2a_2 + 3a_1 + a_0 \equiv \Theta \bmod 7.$$

Setzt man $a_2 = a_1 = \Theta$, so erhält man:

$$-a_3 + a_0 \equiv \Theta \bmod 7.$$

Dieser Bedingung entsprechen die Zahlen:

1008, 2009, 8001, 9002

Wird noch die weitere Annahme $a_3 = a_0$ gemacht, so folgt, dass jede vierziffrige Zahl, deren mittleren Ziffern Θ und deren erste und letzte Ziffer gleich sind, z. B. 6006, 9009 u. s. w. durch 7 theilbar sein muss.

Der Theilbarkeitsbedingung für eine fünfziffrige Zahl:

$$-3a_4 - a_3 + 2a_2 + 3a_1 + a_0 \equiv 0 \bmod 7$$

wird z. B. entsprochen durch die Annahme:

$$a_2 = 0, \quad a_0 = a_3, \quad a_1 = a_4$$

d. h. jede fünfziffrige Zahl, deren mittlere Ziffer Θ und deren erste und vierte, zweite und fünfte Ziffer von rechts gleich sind, ist durch 7 theilbar. Hieher gehören die Zahlen:

12012, 43043, 86086, 95095

und deren 10, 100 u. s. w. faches:

1201200, 43043000, 950950000

Da der letzten Congruenz auch die Annahme:

$$a_2 = \Theta, \quad a_0 = a_1 = a_3 = a_4$$

genügt, so muss jede fünfziffrige Zahl, deren mittlere Ziffer Θ und deren übrige Ziffern gleich sind, durch 7 theilbar sein.

Für eine sechsziffrige Zahl ist die Theilbarkeit durch 7 geknüpft an die Bedingung:

$$-2a_5 - 3a_4 - a_3 + 2a_2 + 3a_1 + a_0 \equiv \Theta \bmod 7.$$

Dieses Polynom reduciert sich auf Θ, wenn:

$$a_0 = a_3, \quad a_1 = a_4, \quad a_2 = a_5$$

oder: $$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$$

angenommen wird. Dieser Annahme zufolge ist also jede sechsziffrige Zahl, deren erste und vierte, zweite und fünfte, dritte und sechste Ziffer von rechts oder deren sämmtliche Ziffern einander gleich sind, durch 7 theilbar. Zahlen dieser Art sind:

435435, 625625, 555555, 111111.

Aus der Substitution $b = 10$, $s = 3$ und $R_5 = \Theta$ in:

$$(-1)^n a_n s^n + \ldots + (-1)^{2k} a_{2k} s^{2k} + \ldots (-1)^k a_k s^k + \ldots$$
$$a_2 s^2 - a_1 s + a_0 \equiv R_5 \mod (b + s)$$

geht eine Theilbarkeitsbedingung für 13 hervor.

Dieselbe lautet also zunächst:

$$(-1)^n a_n 3^n \ldots + (-1)^{2k} a_{2k} 3^{2k} + \ldots + (-1)^k a_k 3^k \ldots$$
$$+ a_2 3^2 - a_1 3 + a_0 \equiv \Theta \mod 13.$$

Ersetzt man die Potenzen von 3 durch die kleinsten, beziehungsweise durch die absolut kleinsten Reste dieser Potenzen in Bezug auf den Modul 13, so erhält man, da $3^0 \equiv 1$, $3 \equiv 3$, $3^2 \equiv 9 \equiv -4$, $3^3 \equiv 1$, $3^4 \equiv 3$, $3^5 \equiv 9 \equiv -4$, $3^6 \equiv 1$ u. s. w. mod 13, als Bedingungen für die Theilbarkeit durch 13:

$$\ldots + 9 a_8 - 3 a_7 + a_6 - 9 a_5 + 3 a_4 - a_3 + 9 a_2 - 3 a_1$$
$$+ a_0 \equiv \Theta \mod 13$$

beziehungsweise:

$$\ldots - (4 a_8 + 3 a_7 - a_6) + (4 a_5 + 3 a_4 - a_3) - (4 a_2 + 3a_1$$
$$- a_0) \equiv \Theta \mod 13.$$

Der Rechnungsmechanismus, der bei der praktischen Verwertung dieses Theilbarkeitsgesetzes zu befolgen ist, gestaltet sich überaus einfach, wenn man in den Klammerausdrücken Vielfache des Modulus 13 sofort weglässt.

Beispiele:

Welche Reste geben bei der Division durch 13 folgende Zahlen:

56843	46873214	9684327172
31431	31431431	1431431431
$9 - 2 \equiv 7$	$-6 + 11 - 7 \equiv 11$	$-9 - 5 + 11 - 10 \equiv 0.$

Die Voraussetzungen, die hinsichtlich der Coefficienten einer 4, 5 und 6 ziffrigen Zahl in der Theilbarkeitsregel für 7 gemacht worden sind, führen, wie es aus der letzten Congruenz unmittelbar hervorgeht, zu Theilbarkeitsgesetzen für die Zahl 13, die mit denen für die Zahl 7 vollkommen übereinstimmen. Für Zahlen, die mehr als 6 Ziffern enthalten, ergeben sich analoge

Theilbarkeitsregeln. So findet man z. B. aus der Theilbarkeitsbedingung für eine siebenziffrige Zahl:

$$a_6 + 4\,a_5 + 3\,a_4 - a_3 - 4\,a_2 - 3\,a_1 + a_0 \equiv \Theta \bmod 13$$

dass für die Annahme:

$$a_0 = a_3,\ a_1 = a_4,\ a_2 = a_5$$

der Rest a_6 erhalten wird. Zahlen von der Form:

5634634, 4213213, 9584584 u. s. w.

geben also bei der Division durch 13 die erste Ziffer links zum Reste. Dieselbe Ziffer wird auch als Rest erhalten, wenn

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = \Theta$$

d. d. Zahlen, welche nur Einheiten der Millionen enthalten, geben bei der Division durch 13 die Ziffern, welche diese Einheitenzahl ausdrücken, zum Reste:

Es ist daher z. B.

$$1{,}000.000 \equiv 1,\quad 4{,}000.000 \equiv 4,\quad 7{,}000.000 \equiv 7,\quad 9{,}000.000 \equiv 9 \bmod 13.$$

Achtziffrige Zahlen, in welchen:

$$a_0 = a_3,\ a_1 = a_4,\ a_2 = a_5$$

lassen zufolge der Theilbarkeitsbedingung hinsichtlich des Modulus 13:

$$-3\,a_7 + a_6 + 4\,a_5 + 3\,a_4 - a_3 - 4\,a_2 - 3\,a_1 + a_0 \equiv \Theta \bmod 13,$$

weil . . . . $4\,a_5 + 3\,a_4 - a_3 - 4\,a_2 - 3\,a_1 + a_0 \equiv \Theta \bmod 13$

denselben Rest wie $-3\,a_7 + a_6$ oder was dasselbe ist, den Rest der siebenten und achten Ziffer als Zahl genommen.

Es ist daher z. B.:

$$73213213 \equiv 73 \equiv 8,\quad 52876876 \equiv 52 \equiv \bmod 13.$$

Die Theilbarkeitsbedingungen für 9, 10, 11 u. s. w. ziffrige Zahlen geben ähnliche Beziehungen.

Die Zahlen 7 und 13 können jedoch auch durch jede beliebige andere Potenz von 10 als durch die erste ausgedrückt werden. Geschieht dies, so ergeben sich aus den mit 1 und 2 bezeichneten Formeln dieses Abschnittes weitere Theilbarkeitsregeln für die genannten Zahlen.

Substituiert man in den Congruenzen 1 und 2 für k den Werth 2, so erscheint dadurch die Systemzahl N von rechts nach links in Classen zu zwei Ziffern getheilt. Bezeichnet man die absoluten Werte dieser Classen in ihrer Reihenfolge von rechts nach links mit A_0, A_1, A_2 . . . . so ist:

$$N \equiv A_h s^h + \ldots . A_3 s^3 + A_2 s^2 + A_1 s + A_0 \mod (b^2 - s)$$

und:

$$N \equiv (-1)^h A_h s^h + \ldots . - A_3 s^3 + A_2 s^2 - A_1 s + A_0 \mod (b^2 + s).$$

Für die weitere Substitution $b = 10$ und $s = 93$ beziehungsweise $s = 87$ erhält man mit Benützung des Fermat'schen Satzes, weil für:

$$s = 93,\ s^0 \equiv 1,\ s \equiv 2,\ s^2 \equiv 4 \equiv -3,\ s^3 \equiv 1 \text{ u. s. w. mod } 7$$

und für:

$$s = 87,\ s^0 \equiv 1,\ s \equiv 9 \equiv -4,\ s^2 \equiv 3,\ s^3 \equiv 1 \text{ u. s. w. mod } 13$$

die beiden Congruenzen:

$$N \equiv \ldots . - 3 A_5 + 2 A_4 + A_3 - 3 A_2 + 2 A_1 + A_0 \mod 7$$
$$N \equiv \ldots . 3 A_5 - 4 A_4 + A_3 + 3 A_2 - 4 A_1 + A_0 \mod 13.$$

Beispiele:

$6589432 \equiv 3 \mod 7$	$8820916 \equiv 0 \mod 13$
1 3 2 1	1 3 4 1
$6 - 6 + 6 + 4 \equiv 3 \mod 7$	$8 + 12 - 10 + 3 \equiv 0 \mod 13$

Wird $A_0 = A_1 = A_2 = \ldots . A_n$ gesetzt, so werden sich die obigen Ausdrücke, wenn sie 3, 6, 9 . . . . 3n Glieder enthalten, auf 0 reducieren und es ist:

$$N \equiv 0 \mod 7 \text{ und } N \equiv 0 \mod 13.$$

Zwei beliebige Ziffern, in derselben Ordnung 3, 6, 9 . . . . 3n mal neben einander gestellt, geben stets eine durch 7 und 13 theilbare Zahl:

Beispiele:

$$151515 \equiv 0, \quad 232323232323 \equiv 0 \mod (7, 13).$$

Hierher gehören auch die Zahlen: 010101 = 10101, 010101010101 = 10101010101, 20202, 60606, 80808080808 u. s. w. Eine Zahl also, welche ein und dieselbe Ziffer 3, 6, 9 . . . . 3n enthält und in welcher zwischen je zwei Ziffern eine Null vorkommt, ist stets durch 7 und 13 theilbar.

Setzt man $k = 3$ oder theilt man die Zahl N von rechts nach links in Classen zu drei Ziffern und bezeichnen A_0, A_1, A_2 .... A_p die absoluten Werte dieser dreiziffrigen Classen, so ist:

$$N \equiv A_p s^p \dots A_2 s^2 + A_1 s + A_0 \bmod (b^3 - s).$$

Für $b = 10$ und $s = 993$ beziehungsweise 987 gehen die Congruenzen, weil:

$$7 = 1000 - 993 \text{ und } s^0 \equiv 1,\ s \equiv 6 \equiv -1,\ s^2 \equiv 1,\ s^3 \equiv -1 \text{ u. s. w. mod } 7$$

$$13 = 1000 - 987 \text{ und } s^0 \equiv 1,\ s \equiv 12 \equiv -1,\ s^2 \equiv 1,\ s^3 \equiv -1 \text{ u. s. w. mod } 13,$$

für beide Fälle über in:

$$N \equiv (-1)^p A_p \dots + A_2 - A_1 + A_0 \bmod (7, 13).$$

Beispiele:

$4567843 \equiv 280 \equiv 0 \bmod 7 \qquad 4567843 \equiv 280 \equiv 7 \bmod 13.$

Werden die Classen gleichgesetzt, also

$$A_0 = A_1 = A_2 = \dots A_p,$$

so geben je zwei Classen die Summe Null und eine Zahl, die aus einer geraden Anzahl solcher Classen besteht, ist durch 7 und 13 theilbar.

Beispiele:

$141141 \equiv 0 \bmod (7, 13), \qquad 252252252252 \equiv 0 \bmod (7, 13).$

Auch Zahlen von der Form:

$001001 = 1001, \quad 001001001001 = 1001001001$, u. s. w.

entsprechen der obigen Anforderung, sind also durch 7 und 13 theilbar. Wird also eine Ziffer 2, 4, 6 .... 2 n mal aufgeschrieben, und dazwischen je zwei Nullen gesetzt z. B. 5005005005, so erhält man eine durch 7 und 13 theilbare Zahl.

Bei der Theilung einer dekadischen Zahl in vierziffrige Classen, die wieder in ihrer Reihenfolge von rechts nach links mit A_0, A_1, A_2, A_3 .... bezeichnet werden sollen, ergibt sich, da für 7 . . . $s^0 = 1$, $s \equiv 4 \equiv -3$, $s^2 \equiv 2$, $s^3 \equiv 1$, $s^4 \equiv 4 \equiv -3$ u. s. w. mod 7 und für:

$$13 \ldots . s^0 \equiv 1,\ s \equiv 3,\ s^2 \equiv 9 \equiv -4,\ s^3 \equiv -12 \equiv 1,\ s^4 \equiv 3 \text{ u. s. w. mod } 13$$

als Restreihen erhalten werden:

$$N \equiv \ldots . + 2 A_5 - 3 A_4 + A_3 + 2 A_2 - 3 A_1 + A_0 \text{ mod } 7$$

und:

$$N \equiv \ldots . - 4 A_5 + 3 A_4 + A_3 - 4 A_2 + 3 A_1 + A_0 \text{ mod } 13.$$

Beispiele:

$85784 \equiv 5760 \equiv 6$ mod 7, $\quad 456789201 \equiv 26219 \equiv 11$ mod 13.

Wird die Annahme:

$$A_0 \equiv A_1 \equiv A_2 \equiv A_3 \equiv \ldots .$$

gemacht. so geben in den beiden letzten Congruenzen je drei Summanden Null zur Summe. Vier beliebige Ziffern z. B. 254625462546 3, 6, 9 . . . . 3 n mal neben einander geschrieben, geben stets eine durch 7 und 13 theilbare Zahl. Dieser Bedingung genügen auch Zahlen von der Form:

$$000100010001 \equiv 100010001.$$

$$000800080008 \equiv 800080008, \quad 50005000000500050005.$$

Theilt man eine dekadische Zahl von rechts nach links in Classen zu 5 Ziffern und bestimmt sich so wie in den früheren Fällen die Reste, welche sich bei der Division der Potenzen von s durch 7 und 13 ergeben, so erhält man als Restreihen:

$$s^0 \equiv 1,\ s \equiv 5 \equiv -2,\ s^2 \equiv 4 \equiv -3,\ s^3 \equiv 6 \equiv -1,\ s^4 \equiv 2,\ s^5 \equiv 3,\ s^6 \equiv 1 \text{ u. s. w. mod } 7$$

und

$$s^0 \equiv 1,\ s \equiv 4,\ s^2 \equiv 3,\ s^3 \equiv 12 \equiv -1,\ s^4 \equiv 9 \equiv -4,\ s^5 \equiv -3,\ s^6 \equiv 1 \text{ u. s. w. mod } 13.$$

Es ist daher:

$$N \equiv \ldots . A_6 + 3 A_5 + 2 A_4 - A_3 - 3 A_2 - 2 A_1 + A_0 \text{ mod } 7$$

und

$$N \equiv \ldots . A_6 - 3 A_5 - 4 A_4 - A_3 + 3 A_2 + 4 A_1 + A_0 \text{ mod } 13.$$

Da für

$$A_0 \equiv A_1 \equiv A_2 \equiv A_3 \equiv A_4 \equiv A_5 \equiv A_6 \equiv \ldots .$$

sich je 6 Summanden auf 0 reducieren, so bilden 5 beliebige Ziffern 6, 12, 18 . . . . 6n mal in derselben Ordnung nebeneinandergeschrieben stets eine durch 7 und 13 theilbare Zahl.

Beispiele:

$$345213452134521345213452134521 \equiv 0 \bmod (7,\ 13)$$
$$1000010000100001000010000 1 \equiv 0 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,}$$
$$800008000080000800008000008 \equiv 0 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,}$$

Für 6ziffrige Classen findet man sowohl für 7 als auch 13 als Rest für alle Potenzen von s die Einheit. Daher ist:

$$N \equiv \ldots A_7 + A_6 + A_5 + A_4 + A_3 + A_2 + A_1 + A_0 \bmod (7,\ 13).$$

Soll nun N für $A_0 = A_1 = A_2 = A_3 \ldots$ durch 7 oder 13 theilbar sein, so ist dies nur möglich, wenn 7 beziehungsweise 13 dieser Summanden genommen werden. Denn:

$$7\ A_0 \equiv 0 \bmod 7 \text{ und } 13\ A_0 \equiv 0 \bmod 13$$

d. h. 6 beliebige Ziffern in derselben Ordnung 7, 14, 21 .... 7n beziehungsweise 13, 26, ... 13n mal neben einander geschrieben, geben stets eine durch 7 beziehungsweise 13 theilbare Zahl. In derselben Weise, wie es bisher geschehen, kann die Zahl in Classen zu 7, 8, 9 .... n Ziffern getheilt, die Restreihen entwickelt und analoge Regeln für die Theilbarkeit der Zahlen durch 7 und 13 entwickelt werden.

B. Einige aus den Theilbarkeitsgesetzen sich ergebende Eigenschaften der Systemzahlen.

Von den mannigfachen Eigenschaften der Systemzahlen, welche aus den Theilbarkeitsgesetzen entweder unmittelbar oder auf Grund überaus einfacher Transformationen aus denselben sich ergeben, mögen an erster Stelle jene hervorgehoben werden, welche zur Erprobung*) der Richtigkeit der durch die Grundoperationen mit ganzen Zahlen gewonnenen Resultate dienen.

---

*) Disquisitiones arithmeticae.

„Nec minus ex praecedentibus petenda est ratio regularum, quae ad verificationem operationum arithmeticarum vulgo commendantur. Scilicet si ex numeris datis alii per additionem, subtractionem, multiplicationem aut elevationem ad potestates sunt deducendi: substituuntur datorum loco residua ipsorum minima secundum modulum arbitrarium (vulgo 9 aut 11, quoniam in nostro systemate decadico secundum hos, uti modo ostendimus, residua tam facile possunt inveniri). Numeri hinc oriundi illis, qui ex numeris propositis deducti fuerunt, congrui esse debent; quod nisi eveniat, vitium in calculum irrepisse concluditur.“

Das Wesen aller dieser Proben ist in den im vorhergehenden Abschnitte dargelegten Theilbarkeitsbedingungen ausgesprochen.

Für jedes Zahlensystem besteht, wenn S die Ziffersumme der Systemzahl bezeichnet, hinsichtlich des Modulus (b — 1) im allgemeinen die Congruenz:

$$N \equiv S \mod (b-1) \qquad 1.)$$

Sind nun N_1, N_2, N_3 . . . . N_n eine Reihe von Systemzahlen derselben Basis b und sind S_1, S_2, S_3 . . . . S_n die Ziffersummen dieser Zahlen, so ist:

$$N_1 + N_2 + N_3 + \ldots N_n \equiv S_1 + S_2 + S_3 + \ldots S_n \mod (b-1)$$

oder:

$$\Sigma(N) \equiv \Sigma(S) \mod (b-1) \qquad 2.)$$

Ebenso erhält man durch die Multiplication:

$$N_1 \; N_2 \; N_3 \ldots N_n \equiv S_1 \; S_2 \; S_3 \ldots S_n \mod (b-1)$$

oder:

$$\Pi(N) \equiv \Pi(S) \mod (b-1) \qquad 3.)$$

Für die Voraussetzung $N_1 = N_2 = N_3 = \ldots N_n$, also auch $S_1 = S_2 = S_3 = \ldots S_n$ ergibt sich:

$$N_1^n \equiv S_1^n \mod (b-1) \qquad 4.)$$

Wird $N_1 : N_2 = q + \frac{r}{N_2}$ gesetzt, so ist:

$$N_1 = N_2 \, q + r \text{ oder } N_1 \equiv N_2 \, q + r \mod (b-1)$$

und weil $N_1 \equiv S_1 \mod (b-1)$

$$S_1 \equiv N_2 \, q + r \mod (b-1) \qquad 5.)$$

Die Substitution $b = 10$ in den Formeln 1—5 liefert für das dekadische Zahlensystem die Regeln für die Neunerprobe.

Beispiele:

$63478 \equiv 1 \mod 6$
$84523 \equiv 4$ „ „
$48402 \equiv 0$ „ „
$29654 \equiv 8$ „ „
$226057 \equiv 4$ „ „

$742357 \times 2431 = 1804669867$
$1 \times 1 \equiv 1 \mod 9$

$412^2 = 169744$
$7^2 = 49 \equiv 4 \mod 9$

$84378282 \equiv 6 \mod 9$
$61943846 \equiv 5$ „ „
$22434436 \equiv 1$ „ „

$146 \times 312 \times 365 = 43211376$
$3 \times 6 \times 5 \equiv 0 \mod 9$

$63456 : 312 = 203$
1056
120

$63456 = 312 \times 203 + 120$
$6 \equiv 6 \times 5 + 3 \mod 9$

Für das praktische Rechnen ist diese Probe ziemlich belanglos, indem nur in dem Falle, dass den Congruenzen, an welche die Richtigkeit der Resultate geknüpft ist, nicht genügt wird, ein sicherer Schluss auf die Unrichtigkeit des Resultates gezogen werden kann.

Wird hingegen den Congruenzen von Seite der Operationszahlen und seitens des Resultates entsprochen, so darf noch keineswegs ein Schluss auf die Richtigkeit des Resultates gezogen werden, indem durch eine Versetzung der Ziffern, durch eine Auslassung von Vielfachen von 9 hervorgerufene Fehler im Resultate durch diese Probe nicht ersichtlich gemacht werden.

Ist N_1 eine $(n+1)$ ziffrige Zahl und sind $N_1, N_2 \ldots\ldots N_s$ sämmtliche durch Permutation der Ziffern der Zahl N_1 erhaltenen Zahlen, so müssen alle diese Zahlen, da sie dieselbe Ziffersumme haben, nach dem Modulus $(b-1)$ unter einander congruent sein. Es ist daher:

$$N_1 \equiv N_2 \equiv N_3 \equiv \ldots\ldots N_s \equiv S_1 \mod (b-1)$$

und: $$N_1 + N_2 + N_3 + \ldots\ldots N_s \equiv (n+1)!\ S_1 \mod (b-1)$$

oder: $$\Sigma\,(N) \equiv (n+1)!\ S_1 \mod (b-1)$$

Für dieselbe Voraussetzung erhält man ferner:

$$N_1\, N_2\, N_3 \ldots\ldots N_s \equiv S_1^{(n+1)!} \mod (b-1)$$

oder: $$\Pi\,(N) \equiv S_1^{(n+1)!} \mod (b-1)$$

Wird $S_1 \equiv 0 \mod (b-1)$ angenommen, so hat man:

$$\Sigma\,(N) \equiv 0 \text{ und } \Pi\,(N) \equiv 0 \mod (b-1).$$

Beispiele:

$$854 + 845 + 584 + 548 + 485 + 458 = 3774 \equiv 3!\ 8 \mod 9$$

$$37 \times 73 = 2701 \equiv 10^{2!},\ 53 \times 35 = 1855 \equiv 8^{2!} \mod 9.$$

$$201 \times 210 \times 21 \times 12 \times 120 \times 102 = 130195900800 \equiv 3^{3!} \mod 9$$

Besteht die Zahl N_1 aus lauter gleichen Ziffern, ist also:

$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots\ldots a_n$$

so hat man:

$$N_1 = a_n\,(b^n + b^{n-1} + b^{n-2} + \ldots\ldots b^2 + b + 1) \equiv S_1 \mod (b-1)$$

oder: $$N_1 = a_n \frac{b^{n+1} - 1}{b-1} \equiv a_n\,(n+1) \mod (b-1)$$

Da nun allgemein:

$$N - S \equiv 0 \bmod (b-1)$$

so muss auch:

$$N_1 - a_n (n+1) \equiv 0 \bmod (b-1)$$

Beispiele:

$$456873 - 33 \equiv 0,\ 5555555 - 7 \times 5 \equiv 0 \bmod 9.$$

Für den Fall, dass $a_0 = a_1 = \ldots . a_n$ lässt sich der Quotient:

$$\frac{N-S}{b-1}$$

auch in anderer Weise als durch Division entwickeln. Für die obige Voraussetzung ist nämlich:

$$\begin{aligned} N &= a_n (b^n + b^{n-1} + b^{n-2} + \ldots . b^2 + b + 1) \\ S &= a_n (1 + 1 + 1 + \quad 1 + 1 + 1) \end{aligned}$$

Daher:

$$N - S = a_n [(b^n - 1) + (b^{n-1} - 1) + (b^{n-2} - 1) + \ldots . (b^2 - 1) + (b - 1)]$$

und wenn man beide Theile der Gleichung durch (b — 1 dividiert:

$$\frac{N-S}{b-1} = a_n \left| \begin{array}{r} b^{n-1} + b^{n-2} + b^{n-3} + \ldots . b^2 + b + 1 \\ + b^{n-2} + b^{n-3} + \ldots . b^2 + b + 1 \\ + b^{n-3} + \ldots . b^2 + b + 1 \\ . \quad . \quad . \quad . \\ b + 1 \\ + 1 \end{array} \right|$$

Durch Addition der Verticalreihen innerhalb der Klammern erhält man:

$$\frac{N-S}{b-1} = a_n [b^{n-1} + 2\, b^{n-2} + 3\, b^{n-3} + \ldots . (n-2)\, b^2 + (n-1)\, b + n]$$

Der Ausdruck innerhalb der Klammer, der für a = 1 als Quotient erhalten wird, repräsentiert im dekadischen Zahlensystem Zahlen von der Form: 12, 123, 1234, 12345, ... 123456889

$$\begin{array}{r} 123456789 \\ 10 \\ \hline 12345678900 \end{array}, \qquad \begin{array}{r} 123456786 \\ 10 \\ 11 \\ \hline 123456789011 \end{array} \quad \text{u. s. w.}$$

Für $a_n > 1$ wird der Quotient gefunden, indem man sich zunächst den Quotienten für $a_n = 1$ bildet und diesen letzteren mit a_n multipliciert.

Beispiele:

$$(11111 - 5) : 9 = 1234, \quad (11111111 - 8) : 9 = 1234567$$

$$(1111111111111 - 13) : 9 = \begin{array}{r} 123456789 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ \hline 123456790122 \end{array}$$

$$(888888888888 - 96) : 9 = \begin{array}{r} 123456789 \\ 10 \\ 11 \\ \hline 12345678011 \times 8 \\ \hline 98765432088 \end{array}$$

$$(5555555 - 35) : 9 = \frac{123456 \times 5}{617280}$$

Die früher gefundene Beziehung:

$$a_n \cdot \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1} \equiv a_n (n + 1) \bmod (b - 1)$$

geht für $a_n = 1$ über in:

$$\frac{b^{n+1} - 1}{b - 1} - (n + 1) \equiv 0 \bmod (b - 1)$$

Multipliciert man die ganze Congruenz mit $(b - 1)$, so folgt:

$$(b^{n+1} - 1) - (n + 1)(b - 1) \equiv 0 \bmod (b - 1)^2$$

$$b^{n+1} - 1 - nb - b + n + 1 \equiv 0 \quad „ \quad „$$

$$b(b^n - 1) - n(b - 1) \equiv 0 \bmod (b - 1)^2$$

Da diese Relation für jedes beliebige positive ganzzahlige n, also auch für $n = b$ gilt, so ist:

$$b(b^b - 1) - b(b - 1) \equiv 0 \bmod (b - 1)^2$$

Die letzte Congruenz darf, weil b gegen $(b - 1)^2$ relativ prim, durch b dividiert werden.

Es ist demnach:

$$b^b - 1 - b + 1 \equiv 0 \bmod (b - 1)^2$$

oder:

$$b^b \equiv b \bmod (b - 1)^2$$

Beispiele:

$(10 \times 99 - 2 \times 9) : 81 = 12 = 11 + 1$

$(10 \times 999 - 3 \times 9) : 81 = 123 = 111 + 11 + 1$

$(10 \times 9999 - 4 \times 9) : 81 = 1234 = 1111 + 111 + 11 + 1$

$(10 \times 99999 - 5 \times 9) : 81 = 12345 = 11111 + 1111 + 111 + 11 + 1$ u. s. w.

$3^3 \equiv 3 \mod 4, \; 7^7 \equiv 7 \mod 36, \; 10^{10} \equiv 10 \mod 81.$

Bezeichnet S_g die Ziffernsumme an den geraden, S_u die Ziffernsumme an den ungeraden Stellen der Systemzahl N, so ist allgemein :

$$N \equiv (S_u - S_g) \mod (b + 1) \qquad 1.)$$

oder :

$$N - (S_u - S_g) \equiv 0 \mod (b + 1)$$

Sind ferner N_2, N_1, N_3 .... N_n Zahlen desselben Zahlensystems und sind S_{g1}, S_{g2}, S_{g3} .... S_{gn}, S_{u1}, S_{u2}, S_{u3} .... S_{un} die Ziffersummen an den geraden, beziehungsweise an den ungeraden Stellen, so ist:

$$N_1 + N_2 + N_3 + \ldots . N_n \equiv (S_{u1} + S_{u2} + S_{u3} + \ldots . S_{un}) - (S_{g1} + S_{g2} + S_{g3} + \ldots . S_{gn}) \mod (b + 1)$$

oder :

$$\Sigma (N) \equiv \Sigma (S_u) - \Sigma (S_g) \mod (b + 1) \qquad 2.)$$

$$\Sigma (N) - [\Sigma (S_u) - \Sigma (S_g)] \equiv 0 \mod (b + 1)$$

Durch Multiplication erhält man :

$$N_1 \, N_2 \, N_3 \ldots . N_n \equiv (S_{u1} - S_{g1}) \, (S_{u2} - S_{g2}) \ldots . (S_{un} - S_{gn}) \mod (b + 1)$$

oder :

$$\Pi (N) \equiv \Pi (S_u - S_g) \mod (b + 1) \qquad 3.)$$

$$\Pi (N) - \Pi (S_u - S_g) \equiv 0 \mod (b + 1)$$

Wird $N_1 = N_2 = N_3 = \ldots . N_n$ gesetzt, so ist :

$$N_1^{\,n} \equiv (S_u - S_g)^n \mod (b + 1) \qquad 4.)$$

Da ferner $N_1 : N_2 = q + \frac{r}{N_2}$

sein soll, so ist $N_1 = N_2 q + r$. Daraus folgt :

$$N_1 \equiv N_2 q + r \mod (b + 1)$$

oder weil :

$$N_1 \equiv S_{u1} - S_{g1} \mod (b + 1),$$

so ist :

$$S_{u1} - S_{g1} \equiv N_2 q + r \mod (b + 1) \qquad 5.)$$

Aus den mit 1—5 bezeichneten Formeln ergeben sich für die Substitution $b = 10$ nebst einer Reihe von Eigenschaften, von denen nur einige im folgenden kurz erwähnt werden sollen, die Regeln für die Eilferprobe im dekadischen Zahlensysteme.

Beispiele:

$$\begin{array}{rl} 43256 \equiv & 4 \text{ mod } 11 \\ 9896 \equiv & -4 \text{ „ „} \\ 14276 \equiv & -2 \text{ „ „} \\ 394657 \equiv & 10 \text{ „ „} \\ \hline 462085 \equiv & 8 \text{ mod } 11 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 94367823 \equiv & \Theta \text{ mod } 11 \\ 9812567 \equiv & 6 \text{ „ „} \\ \hline -84555256 \equiv & -6 \equiv 5 \text{ mod } 11 \\ 4325^2 = & 18705625 \\ 2^2 \equiv & 18705625 \text{ mod } 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 825 \times 362 \times 213 = 63612450 \\ \Theta \times -1 \times 4 \equiv \Theta \text{ mod } 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 82436 : 512 = 161 \\ 3123 \\ \quad 516 \\ \qquad 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 18-5 \equiv & 512 \times 161 + 4 \text{ mod } 11 \\ 13 \equiv & 6 \times -4 + 4 \text{ „ „} \\ 13 \equiv & -20 \text{ „ „} \\ 2 \equiv & -9 \text{ mod } 11 \end{array}$$

Hinsichtlich der praktischen Verwendbarkeit und Zuverlässigkeit dieser Probe gilt im allgemeinen dasselbe, was in dieser Beziehung über die Neunerprobe bereits erwähnt worden ist.

Bezeichnet N_1 eine Zahl von gerader Stellenzahl und N_2 eine Zahl, welche dieselben Ziffern aber genau in umgekehrter Ordnung enthält, so ist, weil in N_2 die Ziffern ihre Stellung vertauschen:

$$\begin{array}{rl} N_1 \equiv & S_u - S_g \text{ mod } 11 \\ N_2 \equiv & S_g - S_u \text{ „ „} \\ \hline \end{array}$$

Daher: $$N_1 + N_2 \equiv 0 \text{ mod } 11.$$

$$N_1 - N_2 \equiv 2\,(S_u - S_g) \text{ mod } 11$$

oder: $$(N_1 - N_2) - 2\,(S_u - S_g) \equiv \Theta \text{ mod } 11$$

Analog erhält man durch Multiplication:

$$N_1\,N_2 \equiv (S_u - S_g)\,(S_g - S_u) \equiv -(S_u - S_g)^2 \text{ mod } 11$$

oder: $$N_1\,N_2 + (S_u - S_g)^2 \equiv 0 \text{ mod } 11.$$

Die Summe zweier solchen Zahlen ist daher stets, die Differenz und das Product aber nur dann theilbar, wenn $S_u - S_g = 0$, also $S_u = S_g$ oder N_1 durch 11 theilbar ist. Vermindert man hingegen die Differenz der beiden Zahlen um die doppelte Differenz aus der Ziffersumme der ungeraden und der geraden Stellen, so ist diese Differenz stets durch 11 theilbar.

Ebenso ist das um das Quadrat der genannten Differenz vermehrte Product durch 11 theilbar.

Beispiele:

$$\begin{array}{rl}
56843794 \equiv & -4 \bmod 11 \\
49734865 \equiv & 4 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
\hline
106578659 \equiv & 0 \quad \text{„} \quad \text{„}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
531891 \equiv & \ominus \bmod 11 \\
498135 \equiv & 0 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
\hline
33759 \equiv & \ominus \bmod 11
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
56843794 \equiv & -4 \bmod 11 \\
49734865 \equiv & 4 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
\hline
7108929 \equiv & 3 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
+8 & \\
\hline
7108937 \equiv & 0 \quad \text{„} \quad \text{„}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
4356 \times 6534 \\
\hline
28462104 \\
4356 \equiv \ominus \bmod 11 \\
28462104 \equiv \ominus \bmod 11
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
1322 \times 2231 \\
\hline
2949382 + 4 = 2949386 \equiv \ominus \bmod 11.
\end{array}
\qquad
(S_u - S_g)^2 = 2^2 = 4$$

Ist die Zahl N_1 hingegen von ungerader Stellenanzahl und N_2 jene Permutation ihrer Ziffern, welche diese genau in umgekehrter Ordnung enthält, so hat man, weil die Ziffern an den ungeraden Stellen in N_1 diese Stellung auch in N_2 behaupten:

$$N_1 \equiv S_u - S_g \bmod 11$$

und

$$\begin{array}{l}
N_2 \equiv S_u - S_g \quad \text{„} \quad \text{„} \\
\hline
\end{array}$$

daher:

$$N_1 + N_2 \equiv 2\,(S_u - S_g) \bmod 11$$
$$(N_1 + N_2) - 2\,(S_u - S_g) \equiv 0 \bmod 11$$
$$N_1 - N_2 \equiv \ominus \bmod 11$$
$$N_1\, N_2 \equiv (S_u - S_g)^2 \bmod 11.$$

Während also die Differenz zweier solchen Zahlen stets durch 11 theilbar ist, kommt diese Eigenschaft der Summe und dem Producte nur dann zu, wenn $S_u = S_g$ oder $N_1 \equiv 0 \bmod 11$ ist. Summe und Product aber werden durch 11 theilbar, wenn die erstere um die doppelte Differenz der Ziffersumme an den ungeraden und geraden Stellen, das letztere um das Quadrat dieser Differenz vermindert wird.

Beispiele:

$$\begin{array}{rl}
98435 \equiv & 7 \bmod 11 \\
53489 \equiv & 7 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
\hline
151924 \equiv & 3 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
-14 & \\
\hline
151910 \equiv & \ominus \quad \text{„} \quad \text{„}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
98435 \equiv & 7 \bmod 11 \\
53489 \equiv & 7 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
\hline
44946 \equiv & 9 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
457 \times 754 & (S_u - S_g)^2 = 6^2 \\
\hline
344578 & \\
-36 & \\
\hline
344542 \equiv & 0 \bmod 11.
\end{array}$$

III.

Anwendung der Zahlencongruenzen zur Lösung einiger chronologischer Aufgaben.

Seit den frühesten Zeiten galt die Bestimmung und Feststellung eines auf der Bewegung der Himmelskörper und auf den damit in Verbindung stehenden Erscheinungen beruhenden Zeitmaßes als eine der wichtigsten Aufgaben der Astronomie. Der regelmäßige und gleichförmige Wechsel von Tag und Nacht bot zu allen Zeiten und an allen bewohnten Orten der Erdoberfläche die auffallendste Einheit des Zeitmaßes dar. Für ausschließlich chronologische Zwecke wäre auch die Messung irgend eines Zeitabschnittes oder die Fixierung eines geschichtlichen Ereignisses mit Hilfe jener Zeiteinheit, dem Tage, wenn auch nicht die bequemste, so doch die sicherste gewesen und hätte einen Grad von Zuverlässigkeit erlangt, der jede Unbestimmtheit und Ungewissheit über historische Daten a priori ausgeschlossen hätte. Für Zwecke des bürgerlichen Lebens hingegen musste zur Messung größerer Zeitintervalle aus naheliegenden Gründen eine größere Einheit, das Jahr, gewählt werden. Da jedoch die Zahl der Tage im Jahre zu groß ist, um direct mit ihnen zu rechnen, so war noch ein zwischen den genannten Einheiten liegendes Zeitmaß nothwendig. Ein solches war durch die Bewegung und die Phasen des Mondes gegeben. Durch den Neumond, der in ungefähr 30-tägigen Intervallen aus den Strahlen der Sonne herausrückt, fand sich ein für Zeitintervalle von mittlerer Länge sehr passendes Zeitmaß.

Die bisher angeführten Einheiten zur Zeitmessung: Tag, Monat, Jahr beruhen auf den Bewegungen der Sonne und des Mondes, entsprechen also gewissen astronomischen Cyklen. Bei der Woche hingegen, deren Anwendung als Zeitmaß sehr weit zurückreicht, ist das letztere nicht der Fall; denn die Woche ist in dieser Beziehung ein von Monat und Jahr durchaus unabhängiger Zeitabschnitt.

Da ein Mondmonat einen Zeitraum von 29 Tagen 12^h 44^m 3^s und das tropische *) Jahr nach der besten Bestimmung einen

*) Newcomb S „Populäre Astronomie.“ Deutsche Ausgabe von R. Engelmann. pag 39 u. ff.

solchen von 365 Tagen $5^h\ 48^m\ 46{\cdot}17^s$ umfasst, so musste mit Rücksicht darauf, dass das Verhältnis der drei auf astronomischen Cyklen beruhenden Zeiteinheiten kein einfaches ist, und die genauere Länge des Mondmonates und des tropischen Jahres erst verhältnismäßig spät festgestellt worden ist, die Zeitrechnung, um dieselbe mit der Bewegung der Himmelskörper in Uebereinstimmung zu erhalten, im Laufe der Zeit manigfache Verbesserungen erfahren.

Diese Umgestaltungen, die an dem Kalender vorgenommen werden mussten, erschweren häufig die genaue Bestimmung des Zeitpunktes historischer Begebenheiten. Und doch ist, wenn die Geschichte nicht ein bloßes Conglomerat von Begebenheiten und Ereignissen oder wie Grotefend*) sich drastisch ausdrückt: „eine wirre Masse, in der die Capitulationen von Sedan und Paris neben den Capitolinischen Gänsen ständen“ sein soll, sondern unter dem Gesichtspunkte eines nach bestimmten Gesetzen sich entwickelnden Organismus aufgepasst werden soll, gerade eine zuverlässige Bestimmung des Zeitpunktes historischer Ereignisse insofern von besonderer Wichtigkeit, weil häufig nur auf Grund derselben die causale Verkettung von Ereignissen, ihr pragmatischer Zusammenhang erkannt und sicher gestellt werden kann. Ein Verstoß von einigen Tagen im Datum einer Begebenheit kann manchmal den Hergang einer Handlung in Verwirrung bringen und die ganze Verkettung der Thatsachen auseinanderreißen.

Der Zusammenhang von Begebenheiten nach Ursache und Wirkung kann jedoch nur aus historisch richtig befundenen Ueberlieferungen und Urkunden erwiesen werden. Aus mehreren Gründen kann es nicht Aufgabe dieses Programmaufsatzes sein, die verschiedenen Kriterien für die Echtheit einer Urkunde des weiteren zu untersuchen und zu erörtern, aber so viel steht für jedermann fest, dass die Echtheit einer Urkunde an innerer Wahrscheinlichkeit gewinnt, wenn darin mehrere Daten vorkommen, die, mit einander verglichen, genau übereinstimmen. Wenn z. B. nebst dem Monatsdatum auch der Wochentag angegeben ist, an dem eine Urkunde ausgestellt ist, und man findet, dass in dem betreffenden Jahre der Tag mit dem gegebenen Monatsdatum

*) Grotefend H. Dr. „Handbuch der historischen Chronologie“. Einl.

auf den bezeichneten Wochentag fiel, so gibt das, wie Brinkmeier*) schreibt, eine starke Präsumtion zu Gunsten der Richtigkeit der Urkunde. Steht umgekehrt ihre Echtheit außer Frage, ist hingegen die Jahreszahl derselben zweifelhaft, so kann unter Umständen aus dem gegebenen Monatsdatum und dem zugehörigen Wochentage das Jahr, in dem die Urkunde ausgestellt worden ist, ermittelt werden.

Zur Lösung dieser und ähnlicher chronologischer Fragen benutzt man eine Reihe von Tabellen, die fast in jedem chronologischen Werke vollständig zu finden sind. Diese Tabellen sind jedoch, so sehr sie auch sonst wegen ihrer einfachen und bequemen Einrichtung geschätzt werden, häufig nur für eine beschränkte Anzahl von Jahren giltig, ihre Benutzung setzt in vielen Fragen die Kenntnis einer Reihe von Mittelbegriffen voraus, die, obwohl sie ihrer etwas ungewöhnlichen Bezeichnungen wegen uns von vornherein nicht besonders ansprechen, trotzdem von jedermann, der überhaupt mit den Tabellen operieren will, ganz genau erfasst werden müssen. Aber abgesehen von diesem subjectiven Momente ist, wie im folgenden an Beispielen gezeigt werden soll, die Lösung gewisser chronologischer Probleme mittelst der Tabellen überaus compliciert, in einzelnen Fällen geradezu unmöglich. Namentlich gehören hierher z. B. jene Aufgaben, in welchen es auf die Bestimmung von Jahren ankommt, die hinsichtlich der chronologischen Elemente gewissen Bedingungen entsprechen sollen. Aufgaben dieser Art fallen in den Bereich der unbestimmten Analytik, welche in den bezeichneten Fällen vor allem die gegenseitige Abhängigkeit der chronologischen Elemente in Gleichungen auszudrücken und letztere nach jeder darin vorkommenden Größe aufzulösen hat. Der eigentlich rein mathematische Charakter chronologischer Aufgaben, sonst gewissermaßen durch Mittelbegriffe und Tabellen verdeckt, tritt dadurch in den Vordergrund und die auf diesem Wege gewonnenen Resultate sind sowohl wegen ihrer allgemeinen Giltigkeit als auch, weil sie gerade die Lösung schwieriger Probleme ermöglichen und in sich schließen, für die Chronologie von besonderer Bedeutung.

Durchblättert man nun die verschiedenen chronologischen

*) Brinkmeier Ed. Dr.: „Praktisches Handbuch der historischen Chronologie". Einl.

Werke, um sich gegebenen Falles zum Zwecke der Lösung einer solchen Aufgabe zu berathen, so sucht man entweder wie z. B. in Ideler's*) oder Grotefend's u. a. m. vorzüglichen chronologischen Handbüchern vergeblich nach Formeln, die eine Lösung der vorliegenden Aufgabe ermöglichen, oder wenn schon Formeln angegeben werden, so fehlt, wie es z. B. in Piper's**) Kirchenrechnung der Fall ist, deren Begründung. Solchen empirischen Formeln aber, die eines Beweises entbehren und deren Richtigkeit nur durch Beispiele mit besonderen Zahlen geprüft werden kann, darf hinsichtlich der durch die gewonnenen Resultate eine apodiktische Richtigkeit nicht zugesprochen werden. Ebenso wenig zuverlässige Resultate geben aus demselben Grunde die häufig in Worte gefassten Regeln, welche chronologischen Bestimmungen dienen sollen. Als Beleg hiefür möge die von Brinkmeier***) aus Delambre's: „Histoire de l'astronomie moderne" mitgetheilte Osterregel, die auch im folgenden an geeigneter Stelle angeführt werden soll, gelten, nach welcher selbst in dem als Muster gewählten Beispiel ein unrichtiges Datum für den Ostersonntag erhalten wird.

Mit Rücksicht auf das soeben Dargelegte glaube ich keinen Fehlgriff zu thun, wenn ich an die Theilbarkeit der Systemzahlen als weitere Anwendung der im ersten Abschnitte aus der Zahlenlehre angeführten Lehrsätze die Ableitung einiger Kalenderformeln anfüge, welche die Lösung einiger chronologischer Fragen ermöglichen sollen. Nicht wenig trug zur Ausführung des gefassten Planes die Ueberlegung bei, dass nicht jedermann alle zur Lösung solcher Fragen nöthigen chronologischen Behelfe besitzt und dass also auch in diesem Falle einige wenige Formeln einen vollständigen Ersatz für die Tabellen bieten können. Dies umsomehr, da sich, wie im folgenden gezeigt werden soll, die Tabellen jederzeit aus den Formeln herleiten lassen. Auch die Absicht, die irrthümliche Auffassung zu widerlegen, dass zur mathematischen Lösung chronologischer Fragen weitergehende und besondere mathematische Kenntnisse nothwendig seien, erhöhte das Interesse für diese Frage. Wie nämlich im folgenden gezeigt werden soll,

---

*) Ideler Ludwig: „Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie."

**) Crelle's Journal. B. XXII. pag. 97 u. ff.

***) Brinkmeier pag. 108.

genügen die wenigen im ersten Abschnitte dargelegten Sätze aus der Lehre von den Zahlencongruenzen vollständig, um damit eine Reihe von chronologischen Aufgaben zu lösen. Sogar für den Fall, dass man sich der Benützung des überaus vortheilhaften analytischen Darstellungsmittels, nämlich der Zahlencongruenzen, entschlagen wollte, lassen sich, wenn auch etwas umständlicher, die im folgenden gewonnenen Resultate und Formeln auch mittelst der vier Grundoperationen mit ganzen Zahlen ableiten. Behauptungen *) dieser Art, wie z. B. die unten angeführte, sind daher nicht gerechtfertigt.

Mit Rücksicht auf den in der Einleitung auseinandergesetzten Zweck des Programmaufsatzes wurde bei den Deductionen das Hauptaugenmerk auf eine möglichst einfache, kurze und präcise Ausdrucksweise gerichtet. Aus demselben Grunde wurde, obschon es ein Leichtes ist, die Formeln in ihrer allgemeineren Form unmittelbar und die im folgenden behandelten Aufgaben als specielle Fälle durch Discussion abzuleiten, dem umgekehrten Wege, nämlich dem Fortschreiten vom besonderen zum allgemeineren der Vorzug gegeben. Auch wurden theils zur Erläuterung der abgeleiteten Formeln theils zur Belebung des Interesses an derartigen Studien eine entsprechende Anzahl von Beispielen beigegeben, bei deren Auswahl auf die „Ausnahmsfälle" besondere Rücksicht genommen wurde. In Anbetracht des erwähnten Zweckes und des hauptsächlichen praktischen Bedürfnisses glaubte ich mich auch auf Jahre nach Christi Geburt beschränken zu können.

Nach diesen Gesichtspunkten wurde der folgende Abschnitt abgefasst. Derselbe gliedert sich in nachstehende Unterabtheilungen:

A.	Bestimmung des Wochentages aus Monatstag und Jahr für den:	a) julianischen Kalender. b) gregorianischen Kalender.
B.	Bestimmung des Datums des Osterfestes für den:	a) julianischen Kalender. b) gregorianischen Kalender.

Unter B. (a. und b.) sollen zugleich die bekannten Gauss'schen Osterformeln abgeleitet und kurz deren Literatur angegeben werden.

---

*) Günther Sieg. Dr.: „Grundlehren der mathematischen Geographie" pag. 151. „Die berühmte Osterformel von Gauss, zu deren Herleitung eine ziemliche Kenntnis der höheren Arithmetik erfordert wird, gestattet eine ganz schematische Berechnung des Festtermins".

A. a) Bestimmung des Wochentages aus Monatstag und Jahr für den julianischen Kalender.

Da die Reihenfolge der Wochentage trotz aller Umgestaltungen und Veränderungen, die der Kalender im Laufe der Zeit erfahren musste, aufrecht erhalten blieb, so ist man heute noch imstande, den Wochentag, an dem ein Ereignis sich zutrug, anzugeben, wenn das astronomische Datum dieses Tages festgestellt ist.

Zum Zwecke der Bestimmung des Wochentages, der einem Datum in einem gegebenen Jahre entspricht, ist es zunächst erforderlich, den Wochentag eines bestimmten Datums der nachchristlichen Aera zu ermitteln und von diesem an die bis zu einem bestimmten Zeitpunkte verflossenen Tage zu zählen. Als Nullpunkt für diese Zählung soll der 1. Jänner des Jahres 2 n. Chr. gewählt werden. Der Wochentag, welcher diesem bestimmten Datum zukommt, kann durch folgende einfache Ueberlegung gefunden werden.

Nimmt man den Sonntag, Montag, Dienstag, u. s. w. als 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten}, u. s. w. Tag der Woche, so wird der n^{te} Tag nach dem Sonntage, von dem an man die Zählung begonnen, ein Sonntag, Montag, Dienstag, u. s. w. sein, je nachdem man bei der Division von n durch 7 den Rest 1, 2, 3, u. s. w. erhält oder je nachdem:

$$n \equiv 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0 \bmod 7.$$

Welchen Wochentag hat unter dieser Voraussetzung der 16, 78, 104, 256^{te} Tag?

Antwort: Montag, Sonntag, Freitag, Mittwoch.

Bezeichnet s eine der Zahlen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, so ist allgemein:

$$n \equiv s \bmod 7.$$

Weil aber für die Voraussetzung, dass k eine positive ganze Zahl:

$\pm 7\,k \equiv 0, \qquad \pm 7\,k \pm 1 \equiv \pm 1, \qquad \pm 7\,k \pm 2 \equiv \pm 2 \bmod 7$

u. s. w. ist, so erhält man durch Addition dieser letzteren Congruenzen mit $n \equiv s \bmod 7$ die Ausdrücke, welche die Bestimmung des Wochentages eines beliebigen Datums aus dem Wochentage eines bestimmten Datums ermöglichen. Dieses letztere Datum sei etwa der 1. Jänner 1887 a. St., welcher nach dem Kalender auf einen Donnerstag fällt. Nach der früheren Bezeichnungsweise muss also für diesen Tag:

$$n \equiv 5 \bmod 7$$

sein. Da als Nullpunkt der Zählung der 1. Jänner des Jahres 2 n. Chr. angenommen worden ist, so bezeichnet in der letzten Congruenz n die Anzahl der Tage nach dem 1. Jänner des Jahres 2 n. Chr. bis 1. Jänner 1887 a. St. Die Anzahl dieser Tage ergibt sich sofort, wenn man berücksichtigt, dass die mittlere Dauer des julianischen Jahres mit $365\frac{1}{4}$ Tagen angenommen wurde und dass infolge dessen jedes vierte Jahr ein Schaltjahr sein musste. Da nun nach Christi Geburt im julianischen Kalender alle*) Jahre, die sich durch 4 ohne Rest dividieren lassen, Schaltjahre sind, so ist die Anzahl der Tage nach dem 1. Jänner des Jahres 2 bis zum 1. Jänner 1887 gegeben durch:

$$1885 \times 365 + \frac{1886}{4}\text{**)}$$

Das weggelassene Jahr 1 n. Chr. Geburt hat keinen Einfluss auf die Anzahl der Schaltjahre; es konnte daher die Anzahl der Schaltjahre bis zum Jahre 1887 durch $\frac{1886}{4}$ ausgedrückt werden. Ist x der Wochentagszeiger des 1. Jänner des Jahres 2 n. Chr. d. i. die aus der Zahlenreihe: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0 dem 1. Jänner des letztgenannten Jahres zukommende Zahl, so ist:

$$n - \left(1885 \times 365 + \frac{1886}{4}\right) \equiv x \bmod 7$$

Subtrahiert man diese Congruenz von $n \equiv 5 \bmod 7$, so ergibt sich der Wert von x aus:

$$1885 \times 365 + \frac{1886}{4} \equiv 5 - x \bmod 7.$$

Da $365 \equiv 1 \bmod 7$, daher auch $1885 \times 365 \equiv 1885 \bmod 7$, ferner $1885 \equiv 2$ und $\frac{1886}{4} = 471 \equiv 2 \bmod 7$, so hat man zur Bestimmung von x:

---

*) Brinkmeier pag. 7.

**) Die Schreibweise $\frac{a}{b}$ soll den ganzzahligen Quotienten, $\left(\frac{a}{b}\right)$ den bei dieser Division sich ergebenden Rest bezeichnen.

$$2 + 2 \equiv 5 - x \bmod 7$$

oder: $$x \equiv 1 \bmod 7.$$

Der 1. Jänner des Jahres 2 n. Chr. war also ein Sonntag.

Daraus kann der Wochentag des 1. Jänner für ein beliebiges Jahr der julianischen Zeitrechnung bestimmt werden. Bezeichnet nämlich Z die Zahl eines Jahres a. St., so sind vom 1. Jänner des Jahres 2 n. Chr. bis zum 1. Jänner des Jahres Z Z — 2 Jahre a. St. verflossen. Zu den $(Z - 2) \times 365$ Tagen dieser Jahre haben nach dem früheren noch $\frac{Z-1}{4}$ Schaltage zu treten. Man hat daher, weil für den ersten Jänner des Jahres 2 n. Chr.

$$n \equiv 1 \bmod 7$$

und für den ersten Jänner des Jahres Z a. St.

$$n + (Z - 2) + \frac{Z-1}{4} \equiv x \bmod 7,$$

zur Bestimmung des Wochentagszeigers des 1. Jänner des Jahres Z a. St.

$$Z - 2 + \frac{Z-1}{4} \equiv x - 1 \bmod 7$$

oder $$Z - 1 + \frac{Z-1}{4} \equiv x \bmod 7.$$

Man findet also den Wochentag des ersten Jänners eines beliebigen Jahres a. St., indem man die Jahreszahl Z um 1 vermindert, die so erhaltene Zahl durch 4 dividiert und den ganzzahligen Quotienten dieser Division zu der um die Einheit verminderten Jahreszahl addiert. Diese Summe durch 7 dividiert gibt den Wochentag des 1. Jänner, der ein Sonntag, Montag, Dienstag ist u. s. w., jenachdem der Rest der letzten Division 1, 2, 3, u. s. w. ist.

Beispiele:

Man bestimme den Wochentagszeiger für den ersten Jänner folgender Jahre a. St.:

$Z = 33$	$Z = 800$	$Z = 1272$	$Z = 1335$
32	799	1271	1353
8	199	317	338
$40 \equiv 5 \bmod 7$	$998 \equiv 4$	$1588 \equiv 6$	$1692 \equiv 5$
Donnerstag	Mittwoch	Freitag	Donnerstag

$Z = 1549$	$Z = 1880$	$Z = 2347$	$Z = 3178$
1548	1879	2346	3177
387	469	586	794
$1935 \equiv 3$	$2348 \equiv 3$	$2932 \equiv 6$	$3971 \equiv 2$
Dienstag	Dienstag	Freitag	Montag

Aus dem Wochentage des 1. Jänners eines Jahres ergibt sich der Sonntagsbuchstabe des betreffenden Jahres. Theilt man nämlich die sämmtlichen Tage eines Jahres vom 1. Jänner angefangen in Gruppen zu sieben Tagen und bezeichnet die einzelnen Tage der ersten Gruppe mit A, B, C, D, E, F, G, so ist der auf den ersten Sonntag des Jänners entfallende Buchstabe der Sonntagsbuchstabe des Jahres. Da wegen $365 \equiv 1 \bmod 7$ ein gemeines Jahr mit demselben Wochentage, mit dem es begonnen, ein Schaltjahr mit dem Wochentage schliesst, der auf den Wochentag folgt, mit dem es angefangen, so ergibt sich, dass der Sonntagsbuchstabe eines Jahres, das sich an ein gemeines Jahr anschließt, um eine Stelle, eines Jahres hingegen, das auf ein Schaltjahr folgt, um zwei Stellen in der Reihe A, B, C, D, E, F, G zurückgehen muss. Das Schaltjahr selbst hat zwei Sonntagsbuchstaben, von denen der eine vom 1. Jänner des betreffenden Jahres bis zum Schalttage, der andere vom Schalttage bis zum Schlusse des Jahres gilt.

Der Sonntagsbuchstabe steht in Beziehung zu dem Sonnenzirkel, einem Cyklus von 28 Jahren, nach deren Ablauf die einzelnen Monatsdaten im julianischen Kalender wieder auf denselben Wochentag fallen. Da der erste Sonnenzirkel mit dem Jahre 9 v. Chr. begann, welches als Schaltjahr den Sonntagsbuchstaben GF hatte, so findet man, das wie vielte Jahr im Sonnenzirkel ein Jahr ist, indem man die Jahreszahl Z um 9 vermehrt und diese Summe durch 28 dividiert Der bei dieser Division sich ergebende Rest gibt den Sonntagsbuchstaben S. Es ist daher:

$$\left(\frac{Z+9}{28}\right) = S \text{ oder } Z + 9 \equiv S \bmod 28,$$

wobei jedoch in der Congruenz nur positive Reste zu berücksichtigen sind.

Aus der früheren Angabe, dass das Jahr 9 v. Christi den Sonntagsbuchstaben GF hatte, lassen sich die Sonntagsbuchstaben für die 28 Jahre des Sonnenzirkels unmittelbar bestimmen.

So einfach auch diese Art der Bestimmung des Sonntagsbuchstaben eines Jahres im allgemeinen ist, so setzt deren Benutzung doch voraus, dass man den Sonntagsbuchstaben für irgend ein Jahr des Sonnenzirkels kennt, aus dem dann der Sonntagsbuchstabe des in Frage stehenden Jahres hergeleitet werden kann, oder dass man folgende, das Verhältnis der Sonntagsbuchstaben zu den Jahren des Sonnenzirkels bestimmende Tabelle *) zur Hand hat.

Sonnenzirkel	Sonntags-buchstabe	Sonnenzirkel	Sonntags-buchstabe	Sonnenzirkel	Sonntags-buchstabe	Sonnenzirkel	Sonntags-buchstabe
+ 1	GF	8	E	15	C	22	A
2	E	+ 9	DC	16	B	23	G
3	D	10	B	+ 17	AG	24	F
4	C	11	A	18	F	+ 25	ED
+ 5	BA	12	G	19	E	26	C
6	G	+ 13	FE	20	D	27	B
7	F	14	D	+ 21	CB	28	A

Die mit + bezeichneten Jahre sind Schaltjahre.

Hat man jedoch eine solche Tabelle nicht zur Verfügung und kann man auch nicht den einem beliebigen Jahre des Sonnenzirkels entsprechenden Sonntagsbuchstaben mit Bestimmtheit angeben, um sich daraus die Tabelle herzustellen, so lässt sich doch der Sonntagsbuchstabe jederzeit aus dem Wochentagszeiger des 1. Jänner des betreffenden Jahres sofort ermitteln. Findet man z. B. als Wochentagszeiger die Zahl 1, so ist, weil der erste Jänner selbst ein Sonntag ist, der Sonntagsbuchstabe des Jahres A. Für den Wochentagszeiger 2 ergibt sich, weil der erste Jänner auf einen Montag fällt, der Sonntagsbuchstabe G; dem Wochentagszeiger 3 entspricht der Sonntagsbuchstabe F u. s. w. — — — Dem Wochentagszeiger 0 der Sonntagsbuchstabe B.

Der auf diese Weise für ein Schaltjahr bestimmte Sonntagsbuchstabe gilt für die Zeit vom 1. Jänner bis zum Schalttage; der dem übrigen Theile des Jahres zukommende Sonntagsbuch-

*) Brinkmeier pag. 52.

stabe ist der jenem Buchstaben in der Reihe A, B, C, D, E, F, G vorhergehende Buchstabe.

Beispiele:

Welcher Sonntagsbuchstabe kommt folgenden Jahren a. St. zu:

	$Z = 33$	$Z = 800$	$Z = 1272$	$Z = 1355$
1. Jänner:	Donnerstag	Mittwoch	Freitag	Donnerstag
Sonntagsbuchstabe:	D	ED	CB	D
	$Z = 1549$	$Z = 1880$	$Z = 2347$	$Z = 3178$
	Dienstag	Dienstag	Freitag	Montag
	F	FE	C	G

Mit dem Wochentage des 1. Jänner eines Jahres ist, weil das Weihnachtsfest acht Tage vor den 1. Jänner fällt, auch der Wochentag des Christtages des vorhergehenden Jahres gegeben.

Aus der früher abgeleiteten Formel:

$$Z - 1 + \frac{Z-1}{4} \equiv x \bmod 7$$

kann der Wochentagszeiger w für einen beliebigen Tag, dessen Monatsdatum bekannt ist; gerechnet werden. Ist der betreffende Tag der t^{te} Tag des Jahres, also der $(t-1)^{\text{te}}$ Tag nach dem 1. Jänner, so wird für diesen Tag, weil die obige Congruenz für den 1. Jänner gilt, die Congruenz bestehen:

$$t - 1 + Z - 1 + \frac{Z-1}{4} \equiv x + (t-1) \bmod 7.$$

Wird nun $x + t - 1 \equiv w \bmod 7$ gesetzt, so erhält man:

$$t + Z + \frac{Z-1}{4} - 2 \equiv w \bmod 7.$$

Die Giltigkeit dieser Formel ist, wofern man bei der Bestimmung von t den etwa vorhandenen Schalttag berücksichtigt, an keine Bedingung geknüft.

Zur bequemeren Bestimmung von t sei an dieser Stelle eine Tabelle eingeschaltet, welche angibt, wie viele Tage bis zum ersten eines jeden Monats in einem gemeinen Jahre verflossen sind.

Jänner . . .	0	April	90	Juli	181	October . .	273
Februar . .	31	Mai	120	August . .	212	November .	304
März	59	Juni	151	September .	243	December .	334

Will man die letzte Formel so einrichten, dass man für Tage nach dem Schalttage auf den Schalttag keine Rücksicht zu nehmen braucht, so ist dieselbe so umzugestalten, dass t für Tage, die im Schaltjahre auf den Schalttag folgen, um die Einheit zunimmt. Dies kann dadurch erreicht werden, dass man in der obigen Formel an die Stelle von $\frac{Z-1}{4}$ den Wert $\frac{Z}{4}$ setzt. Denn ist Z ein Schaltjahr, so ist $\frac{Z}{4} = \frac{Z-1}{4} + 1$, während für ein gemeines Jahr die ganzzahligen Quotienten $\frac{Z}{4}$ und $\frac{Z-1}{4}$ einerlei Wert besitzen. Infolge dessen kann der letzten Congruenz auch die Form gegeben werden:

$$t + Z + \frac{Z}{4} - 2 \equiv w \bmod 7.$$

Soll diese Formel, die für Tage in gemeinen Jahren und in Schaltjahren für Tage nach dem Schalttage ausnahmslos gilt, auch in Schaltjahren für Tage vor dem Schalttage benutzt werden, so hat man in diesem letzteren Falle t um die Einheit zu vermindern.

Beispiele:

Man bestimme den Wochentag für den:

25. März 29	16. Juli 622	28. October 1273
$84 + 29$	$197 + 622$	$301 + 1273$
$+ 7$	$+ 155$	$+ 318$
$120 - 2 = 118$	$974 - 2 = 972$	$1892 - 2 = 1890$
$118 \equiv 6$	$972 \equiv 6$	$1890 \equiv 0$
Freitag	Freitag *)	Samstag **)
4. October 1582	21. Jänner 1880	1. März 2143
$277 + 1582$	$20 + 1880$	$60 + 2143$
$+ 395$	$+ 470$	$+ 535$
$2254 - 2 = 2252$	$2370 - 2 = 2368$	$2738 - 2 = 2736$
$2252 \equiv 5$	$2368 \equiv 2$	$2736 \equiv 6$
Donnerstag ***)	Montag	Freitag.

---

*) Tag der Flucht Muhameds von Mekka nach Medina; nach einigen Chronologen der Beginn der Aera der Hedschra.

**) Krönungstag Rudolfs von Habsburg.

***) Tag der Einführung des gregorianischen Kalenders.

Shakespeare ist am 23. April 1564 geboren und an demselben Datum im Jahre 1616 gestorben. Man bestimme die Wochentage für den 23. April der Jahre 1564 und 1616.

$$\text{Shakespeare}\begin{cases} 23.\ \text{April } 1564:\ 113 + 1564 + 391 - 2 \equiv 1\ \text{Sonntag,} \\ 23.\ \text{April } 1616:\ 113 + 1616 + 404 - 2 \equiv 3\ \text{Dienstag.} \end{cases}$$

Der gregorianische Kalender wurde in England erst im Jahre 1752 eingeführt.

Denkt man sich die Jahreszahl Z von rechts nach links in zweiziffrige Classen getheilt und die absoluten Werte dieser so erhaltenen Zahlen mit N und H bezeichnet, so lässt sich Z darstellen durch:

$$Z = 100\,H + N$$

Substituiert man diese Werte von Z in:

$$t + Z + \frac{Z}{4} - 2 \equiv w \bmod 7$$

so erhält man:

$$t + 100\,H + N + \frac{100\,H + N}{4} - 2 \equiv w \bmod 7$$

oder:
$$t + 100\,H + N + 25\,H + \frac{N}{4} - 2 \equiv w \bmod 7$$

$$t + 125\,H + N + \frac{N}{4} - 2 \equiv w \bmod 7$$

Weil aber $125\,H \equiv 6\,H \equiv -H \bmod 7$, so geht die letzte Congruenz über in:

$$t + N + \frac{N}{4} - (H + 2) \equiv w \bmod 7.$$

Diese Formel gibt unter der früher gemachten Voraussetzung den Wochentagszeiger für jeden beliebigen Tag eines julianischen Jahres. Man findet also den Wochentag des t^{ten} Tages eines julianischen Jahres, indem man t um die aus den Einern und Zehnern der Jahreszahl bestehende Zahl und um den Quotienten dieser letztgenannten Zahl durch 4 vermehrt. Von dieser Summe subtrahiere man die um 2 vergrößerte Jahrhundertzahl und dividiere diese Differenz durch 7. Der dem t^{ten} Tage entsprechende Wochentag ist ein Sonntag, Montag, Dienstag u. s. w., jenachdem bei der Division 1, 2, 3, u. s. w. zum Reste erhalten wird. Die Rechnung kann dadurch noch vereinfacht werden, dass man in den einzelnen Summanden die Vielfachen von 7 weglässt.

Auf Grund dieser zuletzt angegebenen Regel bestimme man das Datum *) folgender Urkunden:

1.) Churfürst Friedrich und Herzog Siegmund confirmieren alle Güter und Privilegia des Klosters Pforta in einer Urkunde: „— — Geben a. 1432 an Dornstag nach S. Mauricii Tage.“ Nach dem Heiligenkalender wird Mauritius [1]) am 22. September gefeiert. Der Wochentag für den 22. September ist bestimmt durch: $265 + 32 + 8 - 16 = 289 \equiv 2$ Montag. Die Urkunde wurde daher am Donnerstag den 25. September 1432 ausgestellt.

2.) Graf Heinrich von Schwarzburg und Elisabeth von Cleve verzichteten auf das Clevische in einer Urkunde: „— — geben a. 1435 Sonntags nach der heil. dreyer Könige tage.“ Da das Fest der heil. drei Könige [1]) auf den 6. Jänner fällt, so ergibt sich der Wochentag hiefür aus: $6 + 35 + 8 - 16 = 33 \equiv 5$ Donnerstag. Die Urkunde wurde daher Sonntag den 9. Jännner 1435 ausgefertigt.

3.) Das Datum einer Urkunde vom Herzog Albrecht zu Oesterreich ist gegeben durch: „— — Datum Wienne domenica (Sonntag) ante circumcisionem Domini (Neujahr) 1358.“ Der Wochentag des Neujahrs ist bestimmt durch:

$$1 + 58 + 14 - 15 = 58 \equiv 2 \text{ Montag.}$$

Die Urkunde ist daher vom Sonntag den 31. Dezember 1357 datiert.

4.) In Bezug auf die Erwählung Albrechts zum Könige von Böhmen schreibt Gelasius: „Albertum eodem anno 1438 domenica post ascensionem [2]) Domini et ipse septimana venisse Iglauiam et ibi per Barones Bohemiae aliosque fautores suos in Regem Bohemiae electum esse feria VI in crastino [3]) Corporis Christi, quod erat feria VI ante S. Viti die 13. Junii — —“. Der Tag S. Viti ist der 15. Juni und die „feria VI ante S. Viti die“ der vorhergehende Freitag. Der Wochentag für den 15. Juni ist bestimmt durch: $166 + 38 + 9 - 16 = 197 \equiv 1$ Sonntag; daher der 13. Juni ein Freitag. Die Angaben stimmen also überein.

*) Die angeführten Beispiele sind aus Brinkmeier pag. 127, 131, 247, 248 249 entnommen.

[1]) Grotenfend. Tafel XV. Heiligenverzeichnis pag. 103 u. ff.

[2]) Grotenfend. Taf. XIII. Lateinisches Glossar pag. 77 u. ff.

[3]) Grotenfend. pag. 36. „Die crastino“ mit dem Genetiv eines Festtages heißt stets am unmittelbar folgenden Tage nach diesem Feste.

5) Die Urkunde, kraft welcher die beiden römischen Könige Friedrich und Ludwig sich vereinigen, mit einander gemeinschaftlich ohne Vorzug zu regieren, fängt mit folgenden Worten an: „Wir Ludowich vnd Friederich von Gotsgnaden Romische Chunige ze allen Zeiten merer des Reiches — — — —“ und endet: „geben zu München an dem Pfincztag vor vnser Vrowentag als sie geboren wart 1325.“ Da Pfincztag Donnerstag bedeutet und Maria Geburt als unbewegliches Fest immer auf den 8. September fällt, so ergibt sich das Datum der Urkunde aus dem Wochentage des 8. September. Derselbe ist bestimmt durch: $251 + 25 + 6 - 15 = 257 \equiv 1$ Sonntag. Der Donnerstag vor dem Frauentag war daher der 5. September.

6.) Das Datum einer Urkunde Karls IV. hat folgenden Wortlaut: „Wir Charel — — — — geben zu Graecz 1347 des Fritages nach sant Jakobstag, in dem andern Jar unseres Römischen Ryches, vnd in dem ersten Jar unser Chunich Reiches Behaim.“ Nach dem Verzeichnis der gebräuchlichen unbeweglichen Feste und Heiligentage fällt der Jakobstag auf den 25. Juli, also auf den 206. Tag des Jahres. Der Wochentag dieses Tages ist wegen: $206 + 47 + 11 - 15 = 249 \equiv 4$ ein Mittwoch; daher der Freitag nach dem S. Jakobstage der 27. Juli

A. b) Bestimmung des Wochentages aus Monatstag und Jahr für den gregorianischen Kalender.

Da dem julianischen Kalender ein Jahr von 365·25 Tagen zugrunde lag, die mittlere Länge des tropischen Jahres hingegen nach Bruhn's*) 365·242217, nach Newcomb 365·242201 Tage umfasst, so ist nach der ersteren Angabe das julianische Jahr um 0·007783 Tage zu lang. Für 1000 Jahre beträgt dieser Unterschied 7·783 Tage; um so viel Tage mussten daher in diesem Zeitraume die an bestimmte Jahreszeiten geknüpften Daten im julianischen Kalender zurückweichen. Namentlich galt dies von dem Frühlingsäquinoctium, welches nach den Bestimmungen der ökumenischen Kirchenversammlung zu Nicaea im Jahre 325 n. Chr. irrthümlich ein für allemal auf den 21. März verlegt wurde. Als nun im Jahre 1582 durch Papst Gregor XIII. die Kalenderreform durchgeführt wurde und infolge des Unterschiedes zwischen dem

*) Brokmann F. J. „System der Chronologie“ pag. 30, 46, 49.

julianischen und dem tropischen Jahre das Aequinoctium statt auf den 21. März zwischen dem 9. und 10. März*) zu liegen kam, ließ man, um das Aequinoctium wieder auf den 21. März zu bringen, 10 volle Tage ausfallen. Zugleich wurde, um für einen längeren Zeitraum die Nachtgleichen auf dem 21. März zu erhalten, festgesetzt, dass in Zukunft von den Säcularjahren nur die durch 400 theilbaren Schaltjahre sein sollten. Demnach sind im gregorianischen Kalender nur die Säcularjahre 1600, 2000, 2400 u. s. w. Schaltjahre, während die Säcularjahre 1700, 1800, 1900, 2100 u. s. w. als gemeine Jahre zu gelten haben. Nach diesem Einschaltungsmodus ergibt sich die Länge des bürgerlichen Jahres mit 365·2425 Tagen. Dasselbe ist um 365·2425 — 365·242217 = 0·000283 Tage länger als das tropische Jahr. Dieser Unterschied ist jedoch so gering, dass er erst nach 4000 Jahren einen Fehler von $0·000283 \times 4000 = 1·132$ Tagen und nach 10000 Jahren einen Fehler von $0·000283 \times 10000 = 2·83$ Tagen zur Folge hat. Bei einer Rechnung nach dem gregorianischen Kalender kann also erst nach 10000 Jahren das Frühlingsaequinoctium auf den 18. März fallen.

Aus dem angeführten gregorianischen Einschaltungsmodus ergibt sich der Unterschied zwischen dem julianischen und gregorianischen Datum eines Tages. Wenn t und T angeben, der wie vielte Tag im julianischen beziehungsweise im gregorianischen Jahre ein bestimmter Tag ist, so müsste, wenn seit Christi Geburt auch nach dem gregorianischen Kalender gerechnet worden und keines der Säcularjahre ein Schaltjahr gewesen wäre, der Unterschied

$$U = T - t = H$$

Tage betragen. Weil aber jedes durch 400 theilbare Säcularjahr im gregorianischen Kalender ebenfalls ein Schaltjahr ist, so ist der früher angegebene Unterschied um $\frac{H}{4}$ Tage zu groß, und es ist daher:

$$U = T - t = H - \frac{H}{4}.$$

Als man im Jahre 1582 die Kalenderreform vornahm, betrug dieser Unterschied:

$$U = T - t = 15 - \frac{15}{4} = 12 \text{ Tage,}$$

*) Newcomb pag. 43.

ein Wert, der auch aus der Differenz zwischen dem julianischen und dem gregorianischen Jahre bestimmt werden kann. Es ist nämlich:

$$(365{\cdot}25 - 365{\cdot}2425)\ 1582 = 11{\cdot}865.$$

Da man aber nicht 12, sondern nur 10 Tage ausfallen ließ, so hat man von U auch noch die $12 - 10 = 2$ Tage in Abzug zu bringen, so dass schließlich der Unterschied zwischen der gregorianischen und julianischen Datierung gegeben ist durch:

$$U = T - t = H - \frac{H}{4} - 2.$$

Löst man diese Gleichung nach t auf und substituiert t in:

$$t + N + \frac{N}{4} - (H + 2) \equiv w \bmod 7,$$

so erhält man eine Congruenz, aus der sich der Wochentag, der einem gegebenen Monatstage im gregorianischen Kalender entspricht, bestimmen lässt. Es ist:

$$T - H + \frac{H}{4} + 2 + N + \frac{N}{4} - H - 2 \equiv w \bmod 7$$

oder:

$$T + N + \frac{N}{4} + \frac{H}{4} - 2\,H \equiv w \bmod 7.$$

Um also den einem gegebenen Monatstag zukommenden Wochentag zu berechnen, ermittle man zunächst, der wievielte Tag im Jahre der betreffende Tag ist. Bei dieser Bestimmung von T hat man auf den Schalttag nur insoweit Rücksicht zu nehmen, dass man, wenn der T^{te} Tag vor dem Schalttage liegt, T um die Einheit zu vermindern hat. Zu T addiere man die 2 letzten Ziffern der Jahreszahl als Zahl genommen, nehme von dieser letzteren sowohl als von den beiden ersten Ziffern der Jahreszahl ebenfalls als Zahl genommen den vierten Theil und addiere diese Quotienten ebenfalls zu T. Von dieser Summe subtrahiere man die doppelte Anzahl der Jahrhunderte. Gibt diese Differenz durch 7 dividiert, den Rest 1, so ist der Wochentag ein Sonntag, für den Rest 2 ein Montag u. s. w., für den Rest 0 ein Samstag.

Der überaus einfache Rechnungsmechanismus kann dadurch, dass man die Vielfachen des Modulus 7 weglässt und sofort statt der einzelnen Summanden ihre kleinsten, beziehungsweise absolut kleinsten Reste in Rechnung zieht, nicht unwesentlich vereinfacht werden. Ich möchte fast behaupten, dass bei einiger Geläufigkeit in der Division durch 7 mit Hilfe der von mir abgeleiteten Formeln der Wochentag irgend eines Datums nach dem julianischen oder gregorianischen Kalenders ebenso rasch wie mittels eines immerwährenden oder stellbaren Kalenders bestimmt werden kann. Insbesondere dürfte dies der Fall sein, wenn es sich um Wochentagsbestimmungen von Monatsdaten handelt, deren jedes einem andern Jahre angehört. Der Zeitaufwand für die genaue Einstellung der entsprechenden Rubriken dürfte kein geringerer sein, als der für die Ausführung dieser elementaren Operationen. Unbedingt aber bietet die Formel den Vortheil, dass sie für jedes beliebige Jahr der nachchristlichen Aera benützt werden kann, während z. B. die früher bezeichneten stellbaren Kalender doch nur für eine beschränkte Anzahl von Jahren eingerichtet sind.

Man bestimme mit Hilfe der letzten Formel den Wochentag für den:

23. April 1584: $113 + 84 + 21 + 3 - 30 = 191 \equiv 2$ Montag
24. Januar 1712: $23 + 12 + 3 + 4 - 34 = 8 \equiv 1$ Sonntag

Goethe
28. August 1749: $240 + 49 + 12 + 4 - 34 = 271 \equiv 5$ Donnerstag
22. März 1832: $81 + 32 + 8 + 4 - 36 = 89 \equiv 5$ Donnerstag

Mit Benutzung der kleinsten, beziehungsweise der absolut kleinsten Reste hat man:

Schiller
10. November 1759: $314 + 59 + 14 + 4 - 34 = 357 \equiv 0$ Samstag
$6 + 3 + 0 + 4 - 6 \equiv 0$
9. Mai 1805: $129 + 5 + 1 + 4 - 36 = 103 \equiv 5$ Donnerstag
$3 - 2 + 1 - 3 - 1 = -2 \equiv 5$ Donnerstag

A. v. Humboldt
14. September 1769: $257 + 69 + 17 + 4 - 34 = 313 \equiv 5$ Donnerstag
6. Mai 1859: $126 + 59 + 14 + 4 - 36 = 167 \equiv 6$ Freitag.

Gauss | 30. April 1777: $120 + 77 + 19 + 4 - 34 = 186 \equiv 4$ Mittwoch
| 23. Februar 1855: $54 + 55 + 13 + 4 - 36 = 90 \equiv 6$ Freitag.

Von den besonderen Fällen, welche sich durch Specialisierung der zuletzt entwickelten Formel ergeben, soll nur die Substitution $T = 1$ beziehungsweise $T = \theta$ berücksichtigt werden. Dieselbe liefert den Wochentagszeiger für den 1. Jänner und in analoger Weise wie im julianischen Kalender damit auch den Sonntagsbuchstaben für den gregorianischen Kalender.

Beispiele:

Man bestimme den Wochentag des 1. Jänner und daraus den Sonntagsbuchstaben nachstehender Jahre:

1676 : $0 + 76 + 19 + 4 = 99 - 32 = 67 \equiv 4$ Mittwoch ED
1777 : $1 + 77 + 19 + 4 = 101 - 34 = 67 \equiv 4$ Mittwoch E
1880 : $0 + 80 + 20 + 4 = 104 - 36 = 68 \equiv 5$ Donnerstag DC
2347 : $1 + 47 + 11 + 5 = 64 - 46 = 18 \equiv 4$ Mittwoch E
3178 : $1 + 78 + 19 + 7 = 105 - 62 = 43 \equiv 1$ Sonntag A.

Der gregorianische Sonntagsbuchstabe kann überdies aus dem julianischen Sonntagsbuchstaben desselben Jahres gerechnet werden. Die Differenz zwischen den Sonntagsbuchstaben, dieselben in diesem Falle statt mit A, B, C, D, E, F, G mit den Zahlen 1, 2, 3 . . . . 7 bezeichnet gedacht, beträgt offenbar so viele Einheiten, als die Differenz zwischen den Wochentagszeigern des 1. Jänner n. und a. St. Da die letztere allgemein durch:

$$U = H - \frac{H}{4} - 2$$

gegeben ist, so besteht zwischen dem gregorianischen Sonntagsbuchstaben S_1 und dem julianischen Sonntagsbuchstaben S desselben Jahres die Beziehung:

$$S_1 - S = U = H - \frac{H}{4} - 2$$

oder:

$$S_1 = S + H - \frac{H}{4} - 2$$

Von dieser Summe sind jedoch, weil für eine Differenz von 7 Einheiten zwischen den Sonntagsbuchstaben die frühere Ordnung hergestellt wird, alle Vielfachen von 7 wegzulassen und nur der übrigbleibende Rest zu berücksichtigen. Diese Bedingung kann durch die Congruenz:

$$S_1 \equiv S + U \mod 7$$

oder:

$$S_1 \equiv S + H - \frac{H}{4} - 2 \mod 7$$

ausgedrückt werden.

Beispiele:

Im vorhergehenden wurden für die Jahre a: St: 1880, 2347, 3178 die Sonntagsbuchstaben, FE, C und G gefunden; man bestimme daraus die gregorianischen Sonntagsbuchstaben. Es ist für:

1880, $S_1 = 6 + 18 - 4 - 2 = 18 \equiv 4$ also D C
2347, $S_1 = 3 + 23 - 5 - 2 = 19 \equiv 5$ „ E
3178, $S_1 = 7 + 31 - 7 - 2 = 29 \equiv 1$ „ A.

Im allgemeinen ergibt sich aus der obigen Formel folgende Beziehung zwischen den julianischen und gregorianischen Sonntagsbuchstaben:

Der julianische Sonntagsbuchstabe	geht bei einem Unterschiede von			
	10	11	12	13
	über in:			
A	D	E	F	G
B	E	F	G	A
C	F	G	A	B
D	G	A	B	C
E	A	B	C	D
F	B	C	D	E
G	C	D	E	F

Für U = 14 wird wieder die Reihe der julianischen Sonntagsbuchstaben erhalten.

Die Bestimmung des Datums des christlichen Osterfestes und die in der Einleitung mit IV und V bezeichneten Abschnitte sollen den Inhalt eines künftigen Jahresprogrammes bilden.

Schulnachrichten.

I. Lehrpersonal.

A. Veränderungen und Beurlaubungen.

Im Stande des Lehrkörpers trat nur insofern eine Aenderung ein, als an Stelle des Supplenten Herrn Simon Kirchtag, welcher zum Gymnasiallehrer in Freistadt (Oberösterreich) ernannt wurde, mit Genehmigung des hochlöbl. k. k. schles. Landesschulrathes vom 8. October 1886 Z. 2834 der Supplent Herr Vincenz Vřešťál trat.

Dem Professor Herrn Josef Biolek wurde die zweite und dem Professor Herrn Dr. Johann Eibl die erste Quinquennal-Zulage zuerkannt laut hoher Erlässe des k. k. schles. Landesschulrathes vom 23. September 1886, Z. 1941 und vom 23. September 1886, Z. 2433. Der Gymnasiallehrer Herr Alexander Knauer wurde laut hohen Erlasses vom 28. October 1886, Z. 2764 unter Zuerkennung des Titels: „Professor" im Lehramte definitiv bestätigt.

B. Personalstand des Lehrkörpers und Fächervertheilung 1886/87.

a) Für die obligaten Fächer.

1. Dr. Gustav Waniek, k. k. Gymnasialdirector; Deutsch in Cl. VII, philosoph. Propädeutik in Cl. VIII. — 5 St.
2. Karl Kolbenheyer, k. k. Professor (VIII. Rangclasse), Mitglied der physiographischen Commission der k. k. Akademie der Wissenschaften in Krakau, Ordinarius der VI. Classe; Latein in Cl. V, Latein und Griechisch in Cl. VI. — 17 St.

3. Dr. Eduard Brand, k. k. Professor, Ordinarius der IIIb Classe; Latein und Griechisch in Cl. IIIb, Griechisch in Cl. V. — 16 St.
4. Josef Kanamüller, k. k. Professor und Custos des natur-historischen Cabinets; Ordinarius der V. Classe; Naturgeschichte in Classe IIIa, IIIb und V, Mathematik in Cl. Ia, IIIa, IV und V. — 19 St.
5. Josef Biolek, k. k. Professor; für katholischen Religionsunterricht in allen Classen. — 10 St.
6. Oswald Kaiser, k. k. Professor und Custos des physikalischen Cabinets; Ordinarius der VII. Classe; Mathematik in Cl. IIa, VI, VII, VIII, Physik in Cl. IV, VII, VIII. — 20 St.
7. Benedict Pichler, k. k. Professor und Custos der Lehrerbibliothek; Ordinarius der IIb Classe; Latein und Deutsch in Cl. IIb, Latein in Cl. VII. — 17 St.
8. Franz Poppler, k. k. Professor, Ordinarius der Ib Classe; Latein und Deutsch in Cl. Ib, Latein in Cl. VIII. — 17 St.
9. Ferdinand Wotschitzky, k. k. Professor und Custos des geographischen Cabinets; Ordinarius der VIII. Classe; Deutsch in Cl. VI, VIII, Geographie und Geschichte in Cl. IIb, IV, VIII. — 17 St.
10. Dr. Johann Eibl, k. k. Professor, Ordinarius der IIa Classe; Latein und Deutsch in Cl. IIa, Griechisch in Cl. VII, philos. Propädeutik in Cl. VII. — 18 St.
11. Alexander Knauer, k. k. Professor und Custos der Schülerbibliothek; Ordinarius der IV. Classe; Latein und Griechisch in Cl. IV, Griechisch in Cl. VIII. — 15 St.
12. Johann Appl, k. k. Gymnasiallehrer; Deutsch in Cl. IV, V, Geographie und Geschichte in Cl. Ib, IIIa und VI. — 16 St.
13. Theodor Täuber, k. k. Professor (im Status der k. k. Realschule); für evangelischen Religionsunterricht in allen Classen. — 9 St.
14. Josef Wolf, geprüfter Supplent, Ordinarius der Ia Classe; Latein und Deutsch in Cl. Ia, Deutsch in Cl. IIIa. — 15 St.

15. Alois Frick, geprüfter Supplent, Ordinarius der IIIa Classe; Latein und Griechisch in Cl. IIIa, Geographie und Geschichte in Cl. VII. — 14 St.
16. Anton Juroszek, geprüfter Supplent; Mathematik in Cl. Ib, IIb, IIIb; Naturgeschichte in Cl. Ia, Ib, IIa, IIb, VI. — 19 St.
17. Vincenz Vřeštál, geprüfter Supplent; Geographie und Geschichte in Cl. Ia, IIa, IIIb, V; Deutsch in IIIb. — 16 St.
18. Dr. Adolf Kurrein, Rabbiner; für mosaischen Religionsunterricht in allen Classen. — 8 St.

b) Für die freien Gegenstände.

1. Wenzel Horák, k. k. Realschulprofessor; Französische Sprache für Schüler des Obergymnasiums in 2 Cursen. — 4 St.
2. Heinrich Löwy, Supplent an der k. k. Oberrealschule; Freihandzeichnen für Schüler aller Classen von Cl. II aufwärts in 3 Cursen. — 6 St.
3. Dr. Eduard Brand, (siehe oben); Stenographie für Schüler des Obergymnasiums in 2 Cursen. — 3 St.
4. Karl Kolbenheyer, (siehe oben); Kalligraphie für Schüler der I. Classe in 2 Abtheilungen. — 4 St.
5. Robert Hertrich, Hauptlehrer an der evangelischen Lehrerbildungs-Anstalt; Gesang für Schüler aller Classen in 2 Cursen. — 2 St.
6. Robert Keller, Turnlehrer; Turnen für Schüler aller Classen in 7 Abtheilungen. — 12 St.

II. Lehrverfassung.

Dem Unterrichte lag der durch den hohen Min.-Erl. vom 26. Mai 1884, Z. 10.128 vorgeschriebene Lehrplan zugrunde.

Verzeichnis der absolvierten Lectüre.

Latein.

V. Classe: Livius I, XXI. — Ovid Metam. I 163—415, II 1—366, VI 146—312, VIII 611—729, X 1—77, XI 85—193, Fast.

I 543—586, II 83—118, 195—242, 475—512, 687—710. Amor. I 15.

VI. Classe: Sallust. Bellum Iugurthinum. — Cic. in Catilin. orat. I. — Caes. d. bello civili I 1—31. — Verg. Ecl. I, V, Georg. III 339—383, 478—566, IV 315—558. Aen. I.

VII. Classe: Cic. pro Archia poeta, de imperio Cn. Pomp. Laelius. — Verg. Aen. II, IV, VI.

VIII. Classe: Tacit. Germania (capp. 1—27); Annal. I. 1—15, 72—81; III 1—19. V 1—13, 39—42, 52—54, 57—60. — Hor. Od. und Epod. (Auswahl); Sat. I 6. 9. Epist. I. 2, 16, II 2, 3.

Griechisch.

V. Classe: Xenoph. Anabasis. (Auswahl). — Homer Il. I, II, III.

VI. Classe: Homer Il. V, VI, XVIII, XXII, XXIV. — Herodot VIII; Xenoph. Anab. (Forts). Comment. II § 21—34, II. 3.

VII. Classe: Hom. Od. ε, ζ, η, ϑ, ι. — Dem. Phil. I, II, III.

VIII. Classe: Platon Apologia, Euthyphron, Laches. — Sophokles, Antigone. — Homer, Odyssee κ, λ.

III. Verzeichnis der im Schuljahre 1886/87 verwendeten Lehrbücher.

1. Religion. A. Kathol.: Fischer, katholische Religionslehre Cl. I, Liturgik Cl. II. Geschichte der Offenbarung des alten und neuen Testaments Cl. III, IV, Wappler, Lehrbuch der katholischen Religion, 4. Th., Cl. V—VIII.

   B. Evang. Biblische Geschichte und Luthers Katechismus Cl. I, II, Palmer, der christliche Glaube Cl. III, IV. Hagenbach, Leitfaden für den Religionsunterricht Cl. V—VIII, Novum testamentum graece Cl. VIII.

   C. Mos. Pentateuch und Levy's biblische Geschichte Cl. I, II, Cassel, Leitfaden für den Unterricht in der jüdischen Geschichte und Literatur Cl. III—VIII, Psalm III.

2. Lateinische Sprache. Goldbacher, Lateinische Grammatik Cl. I—IV. Nahrhaft, lateinisches Uebungsbuch Cl. I, II. Schultz, kl. lat. Sprachlehre Cl. V—VIII. Schultz, Aufgabensammlung zur Einübung der Syntax

Cl. III, IV. Süpfle, lat. Stilübungen II. Cl. V, VI. Seyffert, Uebungsbuch zum Uebersetzen etc. Cl. VII, VIII. Von den Classikern mit Ausnahme des Ovid (Grysar) die Teubner'schen Textausgaben.

3. Griechische Sprache. Curtius, griech. Schulgrammatik Cl. III—VIII. Schenkl, griech. Elementarbuch Cl. III, IV. Schenkl, Chrestomathie aus Xenophon Cl. V, VI. Schenkl, Uebungsbuch zum Uebersetzen etc. Cl. VII, VIII. Von den Classikern die Teubner'schen Textausgaben.
4. Deutsch. Gurcke, Deutsche Schulgrammatik Cl. I—IV. Egger, Deutsches Lesebuch Cl. I—IV. Egger, Deutsches Lehr- und Lesebuch Cl. V—VIII.
5. Geographie und Geschichte. Supan, Lehrbuch der Geographie Cl. I—IV. Hannak, Oesterreichische Vaterlandskunde Cl. IV, VIII. Hannak, Lehrbuch der Geschichte Cl. II—IV. Hannak, Lehrbuch der Geschichte für die oberen Classen Cl. V—VII. Kozenn, Schulatlas Cl. I—VIII. Haardt, Atlas der österr.-ungar. Monarchie für Mittelschulen Cl. IV—VIII. Putzger, historischer Schulatlas Cl. II—VIII.
6. Mathematik. Močnik, Lehrbuch der Arithmetik Cl. I—IV. Močnik, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra Cl. V—VIII. Močnik, Geometrische Anschauungslehre Cl. I—IV. Wiegand, Lehrbuch der Mathematik Cl. V—VIII. Frischauf, Einleitung in die analytische Geometrie Cl. VII, VIII. Stampfer, Logarithmen.
7. Physik. Mach und Odstrčil, Grundriss der Naturlehre Cl. III. Krist, Anfangsgründe der Physik Cl. IV. Handl, Lehrbuch der Physik Cl. VII, VIII.
8. Naturgeschichte. Pokorny, Naturgeschichte des Thier-, Pflanzen- und Mineralreiches Cl. I—III. Standfest, Leitfaden der Mineralogie Cl. V. Wretschko, Schule der Botanik Cl. V. Woldřich, Leitfaden der Zoologie Cl. VI.
9. Philosophische Propädeutik. Drbal, Lehrbuch der formalen Logik Cl. VII. Lindner, Lehrbuch der Psychologie Cl. VIII.

10. Französisch. Plötz, Elementargrammatik, Schulgrammatik, Chrestomathie.
11. Stenographie. Albrecht, Lehrbuch der Gabelsbergerschen Stenographie I, Faulmann, Schule der stenogr. Praxis, Erzherzog Rudolf, Fünfzehn Tage auf der Donau.
12. Gesang. Hertrich, Lieder und Gesänge.

IV. Themen zu den deutschen Aufsätzen.

V. Classe.

1. Ein Landschaftsbild im Herbste.
2. Die Sage von der wilden Jagd mit Rücksicht auf Bürgers „Wilden Jäger" und Goethes „Getreuen Eckart".
3. Welche Tropen und Figuren kommen in Bürgers „Wildem Jäger" vor, und welche Wirkung will der Dichter damit erzielen?
4. Der Einfluss der natürlichen Beschaffenheit der Erde auf das Vorkommen und die Cultur der Menschen.
5. Das Volksthümliche in Bürgers „Wildem Jäger".
6. Der Einfluss der natürlichen Beschaffenheit Oesterreich-Ungarns auf die Zahl und Cultur seiner Bewohner.
7. Warum sind „Der Fischer" von Goethe und „Das Glöcklein des Glückes" von Seidel Balladen?
8. Warum ist uns unser Vaterland Oesterreich so lieb und wert?
9. Sprachliche Abweichungen in der Uhland'schen Inhaltsangabe des Nibelungenliedes (Siegfrieds Tod) von der neuhochdeutschen Schriftsprache.
10. Charakteristik Gunthers.
11. Charakteristik Hagens.
12. Das Motiv der Treue in der Nibelungendichtung.
13. Das Motiv des Eigennutzes in der Nibelungendichtung.
14. Die historischen Grundlagen des Nibelungenliedes.
15. Der mythische und historische Hintergrund der Gudrun.
16. Der örtliche Schauplatz der Gudrun und des Nibelungenliedes.
17. Warum sind Ortnit, Hug- und Wolfdietrich dem Inhalte nach nicht Märchen, sondern Sagen?

18. Welche Vortheile gewährt das Reisen?
19. Das Wasser nach seinem Nutzen und Schaden.
20. Die Hauptmotive der Handlung in den deutschen Volksepen des Mittelalters.

J. Appl.

VI. Classe.

1. Culturbild Roms zur Zeit der punischen Kriege.
2. Charakteristik der deutschen Literatur zur Zeit Karls des Großen.
3. Welche Beweggründe treiben Hagen zur Ermordnng Siegfrieds?
4. Charakteristik der höfischen Dichtung im Mittelalter.
5. Der Antheil Oesterreichs an der deutschen Literatur im Mittelalter.
6. Die Anfänge der Cultur in den Ländern der österreichisch-ungarischen Monarchie.
7. Der Landesfürst, zugleich der Landesvater.
8. Welchen Einfluss nimmt der Wald auf die physikalische Beschaffenheit eines Landes?
9. Schilderung des Naturmenschen — nach Hallers „Alpen".
10. Es soll der wohlthätige Einfluss der Natur auf den Menschen dargelegt werden.
11 Auf welche Ursachen ist der Verfall des deutschen Königthums zurückzuführen?
12. Es sind Schillers Worte: „Wer im Besitz ist, lerne verlieren; wer im Glück ist, lerne den Schmerz!" zu erklären und zu begründen.

J. Wotschitzky.

VII. Classe.

1. Der Aufbau von Lessings „Minna von Barnhelm".
2. Welche historischen Ereignisse haben die erste Blüte der deutschen Literatur gefördert.
3. Welche Folgerungen zog Herder aus seiner Würdigung der Volkspoesie?
4. Inwiefern ist Bürgers „Lied vom braven Manne" ein volksthümliches Gedicht?
5. Welche Bedeutung hat der Grundsatz „Divide et impera" im Leben des Einzelnen und in der Geschichte?
6. Charakteristik des Götz von Berlichingen in Goethes gleichnamigem Drama.

7. Das Werden und Wirken des Genius in der Geschichte. (Nach „Mahomets Gesang" von Goethe).
8. Gedächtnisrede auf Prinz Eugen.
9. Orest und Pylades (Charakteristik).
10. Worin besteht die Läuterung Tassos in Goethes gleichnamigem Drama?
11. Gedankengang des Schiller'schen Gedichtes: „Die Künstler".
12. Inwiefern tragen Goethes und Schillers Jugenddramen den Charakter der Sturm- und Drangzeit an sich?
13. Anwendung des Spruches:

> „Willst Du, dass wir mit hinein
> In das Haus Dich bauen,
> Lass es Dir gefallen, Stein,
> Dass wir Dich behauen".

Dr. G. Waniek.

VIII. Classe.

1. Warum zögert Wallenstein mit dem Verrathe und Abfalle vom Kaiser?
2. Welche Bedeutung hat der erste Aufzug in „Wilhelm Tell" für das ganze Drama?
3. Durch welche Umstände werden die Hauptwendungen der Handlung in Goethes „Hermann und Dorothea" bewirkt?
4. Welche Bedeutung hat die Entdeckung Galvanis für die moderne Cultur?
5. Es soll der epische Charakter der Dichtung „Hermann und Dorothea" dargelegt werden.
6. Die Machtstellung des Hauses Habsburg im 13. und 14. Jahrhundert.
7. Die gute Sache stärkt den schwachen Arm.
8. Charakteristik der Balladen Schillers hinsichtlich ihres sittlichen Gehaltes.
9. Vergleich zwischen Schillers Beatrice und Goethes Iphigenie hinsichtlich ihres Schicksals und ihres Charakters.
10. Die Wurzeln der Bildung sind bitter, die Früchte aber süß.
11. Woran erkennt man die wahre Vaterlandsliebe?

J. Wotschitzky.

V. Statistik der Schüler.

	Classe											Zusammen
	I		II		III		IV	V	VI	VII	VIII	
	a	b	a	b	a	b						
I. Zahl.												
Zu Ende 1885/86	36	37	36^{1}	32	38^{1}		26+29	40	23	17^{1}	16	330^{1}
Zu Anfang 1886/87	46	47	36	29	33^{1}	30^{1}	32^{1}	47	34	20	18	372^{3}
Während des Schuljahres eingetreten	—	—	—	—	—	—	—	—	—		—	—
Im ganzen also aufgenommen	46	47	36	29	33^{1}	30^{1}	32^{1}	47	34	20	18	372^{3}
Darunter: Neu aufgenommen u. zwar: aufgestiegen	42	40	5	1	6	1	2	2	1	2	1	103
Repetenten	2	1	—	1	1	—	—	1	—	—	—	6
Wieder aufgenommen und zwar: aufgestiegen	—	—	27	24	26	28	29	39	31	18	17	239
Repetenten	2	6	4	3	1	2	2	5	2	—	—	27
Während des Schuljahres ausgetreten	5	5	3	4	1	—	1	—	1	1	—	21
Schülerzahl zu Ende 1886/87	41	42	33	25	33	31	32	47	33	19	18	354
Darunter: Oeffentliche Schüler	41	42	32	25	31	30	31	47	32	19	18	348
Privatisten	—	—	1	—	2	1	1	—	1	—	—	6
2. Geburtsort (Vaterland).												
Bielitz	7	8	5	10	6	6	7	8	8	5	1	71
Biala-Lipnik	7	4	8	3	4	7	6	5	6	3	3	56
Schlesien außer Bielitz	13	11	6	5	10^{1}	2	7^{1}	8	7	5	5	79^{2}
Galizien außer Biala-Lipnik	11	16	10^{1}	4	7^{1}	11^{1}	6	16	8	4	6	99^{3}
Böhmen	—	—	1	—	—	—	1	—	—	—	1	3
Mähren	—	2	1	1	2	1	2	3	1^{1}	1	—	14^{1}
Niederösterreich	1	1	1	1	1	—	1	1	—	1	1	9
Oberösterreich	—	—	—	1	—	1	—	2	—	—	—	4
Istrien	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	1
Bukowina	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1
Ungarn	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1
Deutsches Reich	1	—	—	—	1	—	—	2	—	—	—	4
Russland	1	—	—	—	—	1	—	1	2	—	1	6
Summe	41	42	32^{1}	25	31^{2}	30^{1}	31^{1}	47	32^{1}	19	18	348^{6}

3. Muttersprache.

	Classe I a	I b	II a	II b	III a	III b	IV	V	VI	VII	VIII	Zusammen
Deutsch	30	30	24^1	21	23^2	17^1	23^1	29	22^1	19	12	250^6
Polnisch	11	12	8	4	8	13	8	15	10	—	5	94
Czechisch	—	—	—	—	—	—	—	3	—	—	1	4
Summe	41	42	32^1	25	31^2	30^1	31^1	47	32^1	19	18	348^6

4. Religionsbekenntnis.

	Classe I a	I b	II a	II b	III a	III b	IV	V	VI	VII	VIII	Zusammen
Katholisch des lat. Ritus	15	17	13	6	16^1	13	12^1	24	13^1	8	5	142^3
Evangelisch Augsburger Confession	12	7	7	6	6	4	6	11	7	5	4	75
Israelitisch	14	18	12^1	13	9^1	13^1	13	12	12	6	9	131^3
Summe	41	42	32^1	25	31^2	30^1	31^1	47	32^1	19	18	348^6

5. Lebensalter.

	Classe I a	I b	II a	II b	III a	III b	IV	V	VI	VII	VIII	Zusammen
10 Jahre	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
11 "	8	5	2	—	—	—	—	—	—	—	—	15
12 "	18	15	6^1	6	1^1	0^1	—	—	—	—	—	46^3
13 "	11	14	15	11	6	9	2	—	—	—	—	68
14 "	3	4	7	6	14^1	9	7	4	—	—	—	54^1
15 "	—	2	1	2	6	5	14^1	12	2	—	—	44^1
16 "	—	1	1	—	2	5	5	14	7	—	—	35
17 "	—	—	—	—	1	2	3	10	15^1	4	1	36^1
18 "	—	—	—	—	1	—	—	5	4	10	6	26
19 "	—	—	—	—	—	—	—	2	3	2	5	12
20 "	—	—	—	—	—	—	—	—	1	2	3	6
21 "	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2
22 "	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1
23 "	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1
Summe	41	42	32^1	25	31^2	30^1	31^1	47	32^1	19	18	348^6

	Classe I a	I b	II a	II b	III a	III b	IV	V	VI	VII	VIII	Zusammen
6. Nach dem Wohnorte der Eltern.												
Ortsangehörige: Bielitz	12	13	7	14	6	7	11	10	8	10	3	101
Ortsangehörige: Biala-Lipnik	12	7	9	2	6	7	5	9	7^{1}	4	3	71^{1}
Auswärtige	17	22	16^{1}	9	19^{2}	16^{1}	15^{1}	28	17	5	12	176^{5}
Summe	41	42	32^{1}	25	31^{2}	30^{1}	31^{1}	47	32^{1}	19	18	348^{6}
7. Classification.												
a) Zu Ende des Schuljahres 1886/87.												
I. Fortgangsclasse mit Vorzug	7	9	6	6	6	5	3	6	6	3	4	61
I. „	25	21	16	11	16^{1}	20^{1}	23^{1}	24	16	11	12	195^{3}
Zu einer Wiederholungsprüfung zugelassen	2	1	3	2	4	3	1	2	5	3	—	26
II. Fortgangsclasse	3	6	7^{1}	3	4^{1}	2	4	13	4	2	2	50^{2}
III. Fortgangsclasse	4	5	—	2	1	—	—	1	1	—	—	14
Zu einer Nachtragsprüfung krankheitshalber zugelassen	—	—	—	1	—	—	—	1	0^{1}	—	—	2^{1}
Außerordentliche Schüler	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Summe	41	42	32^{1}	25	31^{2}	30^{1}	31^{1}	47	32^{1}	19	18	348^{6}
b) Nachtrag zum Schuljahre 1885/86.							a b					
Wiederholungsprüfungen waren bewilligt	2	1	4	1	—	—	4	3	—	3	—	18
Entsprochen haben	2	1	4	—	—	—	3	—	—	3	—	13
Nicht entsprochen haben (oder nicht erschienen sind)	—	—	—	1	—	—	1	3	—	—	—	5
Nachtragsprüfungen waren bewilligt	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
Nicht erschienen sind	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1

	I a	I b	II a	II b	III a	III b	IV	V	VI	VII	VIII	Zusammen
Darnach ist das Endergebnis für 1885/86:							a b					
I. Fortgangsclasse mit Vorzug	5	5	6	8	6		2+5	6	2	4	5	54
I. „	24	21	23^1	19	25^1		20+20	27	16	13^1	11	219^5
II. „	6	5	5	4	6		3+4	7	4	—	—	44
III. „	—	6	2	1	1		1 —	—	1	—	—	12
Ungeprüft blieben	1	—	—	—	—		—	—	—	—	—	1
Summe	36	37	36^1	32	38^1		26+29	40	23	17^1	16	330^3

8. Geldleistungen der Schüler.

	I a	I b	II a	II b	III a	III b	IV	V	VI	VII	VIII	Zusammen
Das Schulgeld zu zahlen waren verpflichtet												
im 1. Semester	46	46	27	20	26^1	15^1	21^1	30	22	13	12	278^9
im 2. Semester	29	26	25^1	19	26^2	17^1	20^1	31	20^1	14	13	240^6
Zur Hälfte waren befreit												
im 1. Semester	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	1
im 2. Semester	1	1	—	—	—	—	—	—	—	1	—	3
Ganz befreit waren												
im 1. Semester	—	—	9	8	7	15	11	16	12	7	6	91
im 2. Semester	12	15	8	7	6	13	11	16	12	4	5	109
Das Schulgeld betrug im ganzen												
im 1. Semester	690	690	405	300	405	240	330	457·50	330	195	180	4222·50
im 2. Semester	442·50	397·50	390	285	420	270	315	465	315	217·50	195	3712·50
Zusammen	1132·50	1087·50	795	585	825	510	645	922·50	645	412·50	375	7935·00
Die Aufnahmstaxen betrugen	92·40	86·10	10·50	4·20	14·70	2·10	4·20	6·30	2·10	4·20	2.10	228·90
Die Lehrmittelbeiträge betrugen	48·30	49·35	37·80	30·45	35·70	32·55	34·65	49·35	35·70	21·—	18·90	393·75
Die Taxen für Zeugnisduplicate betrugen	—	2·—	—	8·—	—	10·—	4·—	4·—	6·—	2·—	—	36·—
Summe	140·70	137·45	48·30	42·65	50·40	44·65	42·85	59·65	43·80	27·20	21·—	658·65

9. Besuch in den relat.-oblig. und nichtobligaten Gegenständen.

		Classe I a	Classe I b	Classe II a	Classe II b	Classe III a	Classe III b	Classe IV	Classe V	Classe VI	Classe VII	Classe VIII	Zusammen
Kalligraphie (Classenunterricht)		41	42	—	—	—	—	—	—	—	—	—	83
Freihandzeichnen	I. Curs	—	—	16	10	—	—	—	—	—	—	—	26
	II. Curs	—	—	—	—	17	8	—	—	—	—	—	25
	III. Curs	—	—	—	—	—	—	12	8	2	—	—	22
Turnen (Classenturnen)		36	34	30	24	28	20	26	23	23	13	10	267
Gesang	I. Curs	10	13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	23
	II. Curs	—	—	7	5	7	5	5	10	10	10	4	63
Stenographie	I. Curs	—	—	—	—	—	—	—	39	9	—	—	48
	II. Curs	—	—	—	—	—	—	—	—	17	16	4	37
Französische Sprache	I. Curs	—	—	—	—	—	—	—	25	2	—	—	27
	II. Curs	—	—	—	—	—	—	—	—	9	5	3	17

10. Stipendien.

	Classe I a	Classe I b	Classe II a	Classe II b	Classe III a	Classe III b	Classe IV	Classe V	Classe VI	Classe VII	Classe VIII	Zusammen
Anzahl der Stipendisten	—	—	—	1	1	—	—	—	1	1	2	6
Gesammtbetrag der Stipendien	—	—	—	100	50	—	—	—	100	42	121	413

VI. Vermehrung der Lehrmittelsammlungen.

1. Bibliotheken und geogr. Cabinet.

a) Angekauft wurden (Lehrerbibliothek): Paul, Principien der Sprachgeschichte. — Heller, Geschichte der Physik. — Mommsen, röm. Geschichte, Bd. V. — Hamburgisches Schriftstellerlexikon. — Kummer, Stimmen über den österr. Gymnasiallehrplan. — Pauli, Realencyklopädie. — Stein, Entstehung der neueren Aesthetik. — Burg, Compendium der höheren Mathematik. — Schlömilch, Geometrie des Maßes. — Duhamel, Lehrbuch der reinen Mechanik. — Frischauf, Grundriss der theoretischen Astronomie. — Reye, Geometrie der Lage. — Koppe, Arithmetik und Algebra. — Monner, Verbreitung der Deutschen in Oesterreich. — Monner, Vertheilung der Bevölkerung. — Schlenther, Frau Gottsched. — Die österr.-ungar. Monarchie in Wort und Bild (Forts.) — Grimm, deutsches Wörterbuch (Forts.) — Kiepert, Schulwandatlas (Forts.) — Behm, geogr. Jahrbuch. — Schulthess, Geschichtskalender. — Möhl, oro-hydrographische Eisenbahnkarte von Deutschland. — Petermann, Mittheilungen etc. sammt Ergänzungsheften. — Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie sammt Beiblätter. — Zarncke, Literarisches Centralblatt. — Hartel und Schenkl, Zeitschrift für die österreichischen Gymnasien. — Hirschfelder und Kern, Zeitschrift für das Gymnasialwesen. — Kolbe, Bechtel und Kuhn, Zeitschrift für das Realschulwesen. — Höpfner und Zacher, Zeitschrift für deutsche Philologie. — v. Carolsfeld, Archiv für Literaturgeschichte. — Verordnungsblatt des Ministeriums für Cultus und Unterricht.

(Schülerbibliothek): Cooper, der Bravo. — Boz, David Copperfield. — Manzoni, die Verlobten. — Zschokke, Goldmacherdorf. — Fr. Reuter, Stromtid. — Hackländer, Handel und Wandel. — Reuper, der Held von Congo.

b) Geschenkt wurden: Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht: Österreichische botanische Zeitschrift XXVII, Verhandlungen der Gymnasial-Enquête-Commission im Herbste 1870.

Vom hochl. k. k. schles. Landesschulrath:

Bericht des k. k. schles. Landesschulrathes, 1886. — Kirchmayer, Diocleziano.

Von der k. k. Akademie der Wissenschaften: Die Sitzungsberichte der math.-naturhistor. Classe und der Anzeiger der philos.-histor. und der math.-naturhistor. Classe.

Von der schles. Handels- und Gewerbe-Kammer: Sitzungsberichte.

Vom Herrn Professor Karl Kolbenheyer: eine von ihm selbst angefertigte Reliefkarte des Gebirges von Bielitz im Maßstabe von 1 : 50000.

2. Physikalisches Cabinet

Apparat zum Nachweise des Mariotte'schen Gesetzes, Optometer, Patenthygrometer nach Klinkerfues, Bremsdynamometer nach Prony, Feuerspritze, Prisma zur Demonstration der totalen Reflexion, Resonator für das $\bar{a}$ der Stimmgabel, Planplatten aus Messing zur Demonstration der Adhäsion, Metallthermometer nach Breguet, Interferenzspiegel nach Stefan, Federwage mit Spiralfeder, $^1/_2$ m Wachstaffet, Thaumatrop.

3. Naturhistorisches Cabinet.

Wiederkäuermagen, Rehschädel mit Geweih, Widderschädel mit Hörner, ein Stück Haut von einem Rhinoceros, Haut von einem Gürtelthier, Walfischbarte, 4 Entwickelungsstadien des Frosches, 24 Arten der wichtigsten essbaren und 24 Arten der wichtigsten giftigen Pilze (Modelle).

4. Zeichenlehrmittel.

1 Quadrat (Nr. 14, Seite 50 cm.), 1 Würfel (Nr. 20, Seite 50 cm.), Büste einer Vestalin, Maske des Moses (Nr. 227), 2 Köpfe in Medaillon (Nr. 510, 514) Kima mit Astragal (Nr. 249), Akanthusblatt (Nr. 333), Löwenkopf (Nr. 250), 2 gothische Ornamente (Nr. 316, 317), ein eisernes Stativ für Draht und Holzmodelle (Nr. 8).

VII. Maturitätsprüfungen.

Im Herbsttermine 1886 wurde unter dem Vorsitze des k. k. Landesschulinspectors Herrn Phil. Klimscha eine Wiederholungsprüfung mit vier Abiturienten abgehalten, welche hiebei ein Zeugnis der Reife erhielten.

Zu der diesjährigen Maturitätsprüfung im Sommertermine meldeten sich sämmtliche 18 öffentliche Schüler der VIII. Classe.

Die schriftlichen Arbeiten wurden vom 23. bis 27. Mai über folgende Aufgaben angefertigt:

1) Deutscher Aufsatz: Es soll der Einfluss der Griechen auf die Bildung der übrigen Völker dargelegt werden.

2) Uebersetzung aus dem Deutschen ins Lateinische: Schultess, Vorlagen zu lat. Stilübungen. II. Heft, pag. 102: „Napoleons Raub der Kunstdenkmäler in Deutschland."

3) Uebersetzung aus dem Lateinischen ins Deutsche: Livius, lib IX. cap. XXIII.

4) Uebersetzung aus dem Griechischen ins Deutsche: Demosthenes, Περὶ τῶν ἐν Χερρονήσῳ cap. 13—18.

5) Mathematische Aufgaben. 1) Von drei Punkten A, B, C seien die gegenseitigen Entfernungen $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ gegeben. Ein vierter Punkt D liegt so, dass von ihm aus B und C nach derselben Richtung, B zwischen D und C, gesehen werden, während A unter dem Winkel $ADB = \delta$ gegen diese Richtung erblickt wird.

Wie weit ist D von B entfernt? $a = 82{\cdot}73$, $b = 65{\cdot}18$, $c = 73{\cdot}24$, $\delta = 27^0 18$.

2) Wie gross ist der Mantel und das Volumen eines abgestumpften geraden Kegels, wenn der Unterschied der beiden Grundflächen 8 dcm^2, das Verhältnis der Umfänge derselben 5 : 3 und der Neigungswinkel der Seite gegen die untere Grundfläche $\varkappa = 25^0 24'$ ist?

3) Wie lautet die Scheitelgleichung der Parabel, deren Achse parallel mit der Abscissenachse ist und welche durch die folgenden drei Punkte geht: $M_1 (4, 4)$, $M_2 (-1, 3)$, $M_3 (-4, 2)$?

4) $x^2 - y^2 + z^2 = 28$, $x^2 z + xz^2 + 126 = 0$, $2xz + y^2 = 53$.

Bei der am 6., 7. und 8. Juli 1887 unter dem Vorsitze des k. k. Landesschulinspectors Herrn Phil. Klimscha abgehaltenen mündlichen Maturitätsprüfung wurden folgende 13 Abiturienten für reif erklärt, darunter mit „Auszeichnung" (*):

Post-№	Name der appr. Abiturienten	Altersjahre	Dauer der Studien	Künftiger Beruf
1.	Fränkel Alfred	18	8 Jahre öff.	unbestimmt
2.	Góra Michael	23	8 „ „	Theologie
3.	*Gumpert Hermann	21	8 „ „	Bodencultur
4.	Halbreich Samuel	18	8 „ „	Jus
5.	*Hentschel Leonhard	19	8 „ „	„
6.	Kaufmann Oskar	17	8 „ „	Medicin
7.	Kéler Arthur	19	8 „ „	Jus
8.	*Linnert Kurt	18	8 „ „	Medicin
9.	Popper Adolf	20	8 „ „	„
10.	Robinsohn Siegmund	18	8 „ „	Jus
11.	*Tobias Emanuel	18	8 „ „	Medicin
12.	*Weissberger Bernh.	19	8 „ „	„
13.	Zeiske Gustav	20	8 „ „	Bodencultur

1 Abiturient wurde auf Grund seiner schriftlichen Leistungen bei der Maturitätsprüfung für den diesjährigen Prüfungstermin abgewiesen, 1 trat vor der mündlichen Prüfung freiwillig zurück, 1 wurde auf ein Jahr reprobiert, 2 wurden zu einer Wiederholungsprüfung nach den Ferien zugelassen.

VIII. Wichtigere Erlässe.

1. Erl. d. h. k. k. Min. f. C. u. U. v. 20. Nov. 1886, Z. 22188, womit genehmigt wurde, dass der vormittägige Unterricht in der I. Classe am hiesigem Gymnasium auch in den Wintermonaten um 8 Uhr beginnen dürfe.

2. Erl. d. h. k. k. schles. Landesschulrathes v. 10. Nov. 1886, Z. 3210, womit besondere Weisungen über die Verhandlungsgegenstände in den Conferenzen erlassen wurden.

3. Erl. d. h. k. k. Min. f. C. u. U. v. 2. Apr. 1887, Z. 12294, womit weitere Weisungen über die Einrichtung und Führung der Schülerbibliotheken erlassen wurden.

4. Erl. d. h. k. k. Min. f. C. u. U. v. 2. Mai 1887, Z. 8752 betreffend das Classificationsverfahren sowie einige Abänderungen hinsichtlich der schriftlichen Arbeiten.

Zufolge dieses Erlasses werden im Schulgebäude Classenkataloge aufliegen, in welche die Ergebnisse der mündlichen und schriftlichen Prüfungen Tag für Tag sofort eingetragen werden. Die in diesen Classenkatalogen eingetragenen Noten werden den Eltern der Schüler oder deren Stellvertretern auf Verlangen mitgetheilt.

IX. Unterstützungen.

A. Stipendien.

1. Die Rudolf Seeliger'schen Stipendien im Betrage von je 100 fl. wurden mit h. Erlass des schles. Landesausschusses vom 10. November 1886, Z. 5082 für das Jahr 1887 verliehen an Wolf Emil in Cl. II., Antoni Alexius in Cl. VI. und Gumpert Hermann in Cl. VIII.
2. Das Rosa Schubuth'sche Stipendium im Betrage von jährlich 21 fl. genoss für die Dauer der ganzen Gymnasialzeit laut h. Erlasses des k. k. schles. Landesschulrathes vom 22. Dec. 1883, Z. 3541 der Schüler Kurt Linnert (VIII).
3. Das Adolf Fränkel'sche Stipendium im Betrage von jährlich 42 fl. genießt für die Dauer der ganzen Gymnasialzeit laut h. Erlasses des k. k. schles. Landesschulrathes vom 10. Nov. 1881, Z. 3857 der Schüler Johann Christeli (VII).
4. Die beiden Adolf Fränkel'schen Stipendien im Betrage von jährlich à 31 fl 50 kr. für zwei israelitische, nach Lipnik oder Biala zuständige Schüler des Gymnasiums konnten wegen Mangels an Bewerbern in diesem Schuljahre nicht verliehen werden. Der verfügbare Betrag pr. 63 fl. wurde in der städtischen Sparcasse deponiert.

5. Ein schles. Landesstipendium im Betrage von jährlich 50 fl. genießt für die Dauer der ganzen Studienzeit laut h. Erlasses des schles. Landesausschusses vom 20. April 1886, Z. 1761 der Schüler Baszczynski Paul in Cl. IIIa.

B. Zwölfter Rechnungsausweis des Franz-Josef-Unterstützungs-Vereines am k. k. Staats-Gymnasium in Bielitz.

Einnahmen.

1. Alphabetisches Verzeichnis

der Mitglieder, welche einen jährlichen Beitrag beisteuern.

Herr	Amster J., Hotelier in Bielitz . . . . fl.	2·—
„	Appl J., Prof. in Bielitz „	2·—
„	Bachner S., Juvelier in Bielitz . . . . . . „	2·—
„	Bathelt C. J., Fabrkt. in Bielitz . . . . . . „	5·—
„	Bathelt Vict., Fabrkt. in Bielitz . . . . . . „	2·—
„	Dr. Baum J., Fabrkt. in Bielitz . . . . . . „	2·—
„	Behar N., Fabrkt. in Bielitz . . . . „	1·—
„	Bernaczyk & Söhne, Fabrkt. in Bielitz . . „	5·—
„	Biolek J., k. k. Prof. in Bielitz . . . . . . „	2·—
„	Dr. Brand E., Prof. in Bielitz . . . . . . „	3 —
„	Brüll A., Spediteur in Bielitz . . . . „	4·—
„	Danel Fr., Erzpriester in Bielitz . . . . . . „	5·—
„	Dr. Eibl J., Prof. in Bielitz . . . . „	2·—
„	Dr. Eisenberg, Advocat in Bielitz . . . . „	3·—
„	Fialkowski Attila, Fabrikant in Bielitz . . „	5·—
„	Förster C. Tr., Fabrkt. in Bielitz . . . . . „	2·—
„	Förster Gust., Fabrkt. in Bielitz . . . . „	2·—
„	Förster Hein., Fabrikant in Bielitz . . . „	2·—
„	A. Fränkels Söhne, Fabrkt. in Lipnik . . „	10·—
	Transport fl.	64·—
	Transport fl.	64·—
Herr	Fritsche Herm., evang. Pfarrer in Biala . . „	3·—
„	Fritsche M., Agent in Biala . . . . „	1·—
„	Fröhlich W., Buchh. in Bielitz . . . . . . „	4·—
„	Gross J. und Söhne, Fabrkt. in Biala . . „	10·—
„	Gülcher O., Fabrkt. in Biala . . . . „	10·—
„	Haberfeld S., Kaufm. in Biala . . . . . . „	1·—
„	Hähnel J. W., Fabrkt. in Bielitz . . . . . . „	10·—
„	Harok R., Kaufm. in Bielitz . . . . „	1·—
„	Hauptig W., Fabrkt. in Bielitz . . . . . . „	2·—
„	Hein E., Fabrkt. in in Bielitz . . . . . . „	1·—
„	Heller A., Kaufm. in Bielitz . . . . „	2·—
„	Hensler R., Kaufm. in Bielitz . . . . „	1·—
„	Hess K., Fabrkt. in Biala . . . . „	5·—
„	Hoffmann H., Bürgermeister in Bielitz . . „	5·—
„	Dr. Ichheiser, Advoc. in Biala . . . . . . „	3·—
„	Jankowski K., Fabrkt. in Bielitz . . . . . . „	5·—
„	Josephy G., Fabrkt. in Bielitz . . . . . . „	5·—
„	Kaiser O., Prof. in Bielitz . . . . „	2·—
	Transport fl.	135·—

Transport fl.	135·—
Herr Kanamüller J., Prof. in Bielitz . . . . . . „	2·—
„ v. Kéler Er., Apotheker in Biala . . . . . . „	1·—
„ Kellermann in Bielitz „	1·—
„ Knauer A., Prof. in Bielitz . . . . „	2·—
„ Kolbenheyer E. in Bielitz . . . . „	2·—
„ Kolbenheyer K., Prof. in Bielitz. . . . . . „	1·—
„ Korn K., Architekt in Bielitz. . . . . . „	2·—
„ Korn J., Fabrkt. in Lipnik . . . . „	3·—
„ Kornhaber, Kaufm. in Lipnik . . . . „	2·—
„ Kramer Gust. in Bielitz „	1·—
„ Kraus E., Kaufm. in Lipnik . . . . „	3·—
„ Kupka K., Glaser in Bielitz . . . . „	1·—
„ Dr. Kurrein A., Rab. in Bielitz. . . . . . „	1·—
„ Laubenberger A., Fabrikant in Bielitz . . „	5·—
„ Lauterbach W. T., Fabrikant in Bielitz . . „	4·—
„ Dr. Lazarski St., Adv. in Biala . . . . . . „	2·—
„ Lukas R., Fabrkt. in Biala . . . . „	3·—
„ Lubich A., Kaufm. in Bielitz . . . . „	1·—
„ Lupinski A., Kaufm. in Bielitz. . . . . . „	3.—
„ Dr. Markusfeld, Adv. in Bielitz. . . . . . „	2·—
„ Mänhardt Ad., Fabrkt. in Bielitz. . . . . . „	4·—
„ Mänhardt K., Fabrkt. in Bielitz. . . . . . „	2·—
„ Mehlo H., Fabrkt. in Bielitz . . . . „	2·—
„ Molenda G., Färber in Bielitz. . . . . . „	2·—
„ Morawitz Ign., Kaufm. in Bielitz. . . . . . „	1·—
„ Dr. Münz W., Advoc. in Bielitz. . . . . . „	3·—
„ Nahowski, Bürgermeister in Biala . . „	2·—
„ Dr. Peterek F., Adv. in Biala . . . . . . „	2·—
„ Pfister E., Curator in Biala . . . . „	1·—
Transport fl.	196·—

Transport fl.	196·—
Herr Pichler B., Professor in Bielitz. . . . . . „	2·—
„ Piesch E., Fabrkt. in Bielitz . . . . „	1·—
„ Pollak A., Kaufm. in Bielitz . . . . „	2·—
„ Pollak Sal., Kaufm. in Bielitz. . . . . . „	3·—
„ Pongratz H., Juvelier in Biala . . . . . . „	2·—
„ Pongratz R., Fabrkt. in Bielitz. . . . . . „	2·—
„ Poppler Fr., Professor in Bielitz. . . . . . „	2·—
„ Putschek G., Kaufm in Bielitz. . . . . . „	1·—
„ Dr. Reich L., pr. Arzt in Bielitz. . . . . . „	2·—
„ Reich M., Fabrkt. in Lipnik . . . . . . „	5·—
„ Dr. Rosner J., Adv. in Biala . . . . . . „	5·—
„ Dr. Rössler, Adv. in Bielitz . . . . „	5·—
„ Rost Em., Architekt in Biala . . . . . . „	3·—
„ Roth J., Fabrkt. in Bielitz . . . . „	5·—
„ Schäffer W., Fabrkt. in Bielitz. . . . . . „	5·—
„ Schirn Em., Fabrkt. in Biala . . . . . . „	2·—
„ Schorr Em., Fabrkt. in Bielitz. . . . . . „	5·—
„ Dr. Schorr, pr. Arzt in Bielitz. . . . . . „	5·—
„ Schrenk A., Schneidermeister in Biala . . „	2·—
„ Schubert W., Schulrath in Bielitz. . . . . . „	3·—
„ Schur F., evang. Pfarrer in Bielitz. . . . „	2·—
„ Dr. Söwy, pr. Arzt in Bielitz. . . . . . „	2·—
„ v. Stavro Etienne in Bielitz . . . . „	2·—
„ Stefan K., Bäcker in Bielitz . . . . „	2·—
„ Sternickel Arth., Fabrikant in Biala . . „	2·—
„ Strzygowski Fr., Fabrikant in Biala . . „	5·—
„ Thuretzky Herm. in Biala . . . . „	1·—
„ Dr. Tischler A., pr. Arzt in Bielitz . . . „	2·—
Transport fl.	276·—

Transport fl. 276·—

Herr Tugendhat M., Kaufm. in Bielitz . . . . . . „ 1·—
„ Tugendhat S. in Bielitz „ 1·—
„ Dr. Tugendhat J., k. k. Bezirksarzt in Biala „ 2·—
„ Dr. Türk E., Advoc. in Bielitz . . . . . . „ 2·—
„ Twerdy Em., Maschinenschlosser in Bielitz „ 2·—
„ Waltschok, Architekt in Bielitz . . . . . . „ 3·—
„ Dr. Waniek G., Gymnasialdirct. in Bielitz „ 3·—
„ Wiedmann R., Fabrkt. in Bielitz . . . . . . „ 3·—

Transport fl. 293·—

Transport fl. 293·—

Herr Wilke Severin, Kaufm. in Bielitz . . . . . . „ 1·—
„ Dr. Winkler K., Adv. in Bielitz . . . . . . „ 5·—
„ Wenzel M., Kaufm. in Bielitz . . . . „ 5·—
„ Wolf J., Professor in Bielitz . . . . „ 1·—
„ Wolf K. jun., Fabrkt. in Bielitz . . . . . . „ 2·—
„ Wotschitzky F., Professor in Bielitz . . . „ 2·—
„ Dr. Zoll S., Advocat in Bielitz . . . . . . „ 5·—

Summa ö. W. fl. 314·—

2. Einmalige Beiträge spendeten:

Der hohe schles. Landtag . . . . fl. 30·—
Die löbl. Bielitzer Sparcassa . . . . „ 20·—
Herr Ludw. Komarek, Adv. in Friedek . . „ 1·65
Herr Wagner . . . . „ 2·50
Glajcar Gustav (IV. Cl.) . . . . „ 0·75

Summa fl. 54·90

3. Beiträge der Schüler.

(In beiden Semestern zusammen):

Classe Ia.

Aufricht R. 0·50, Bartelmuss Joh. 1·50, Bathelt Osk. 2·00, Biowski P. 0·60, Górniak G. 0·20, Gutwinski V. 0·75, Guzmann R. 0·40, Haberfeld E. 0·20, Haberfeld H. 0·40, Herholz A. 0·50, Herlinger Th. 0·20, Hodurek E. 0·40, Jankowski E. 1·00, Jurczyk L. 0·20, Kohn K. 0·30, Kramer O. 0·30, Kramer R. 1·10 . fl. 10·55

Classe Ib.

Manhardt A. 1·00, Marguette J. 0·50, Meese A. 0·90, Nikiel H. 0·50, Pilzer J. 0·50, Polatschek A. 0·30, Robinsohn J. 0·50, Rusch E. 0·20, Rzegocinski B. 0·30, Wilke V. 1·50, Zabystrzan E. 1·50 . . . . fl. 7·70

Transport fl. 18·25

Transport fl. 18·25

Classe IIa.

Adwentowski B. 0·30, Chlebowski 0·50, Dieffenbach F. 2·00, Fialkowski A. 2·00, Förster V. 1·00, Gasch H. 1·00, Goldlust M. 0·20, Gross Er. 2·50, Heller E. 2·00, Knopf W. 0·50, v. Launsky K. 0·20, Lukas H. 1·00, Macher Os. 0·40, Mayer F. 1·00 fl. 14·60

Classe IIb.

Nitsch R. 0·30, Ripper W. 0·50, Robinsohn J. 1·00, Roth O. 0·60, Sachs O. 0·50, Schaffer E. 2·00, Schneeweiss S. 0·75, Schratter 0·60, Strauss R. 0·60, Täuber W. 0·20, Trager H. 0·40, Wiener J. 0·20, Winkler A. 2·80, Anonymus 0·30 . . . . fl. 10·75

Transport fl. 43·60

Transport fl 43·60

Classe IIIa.

Arnt M. 2·00, Cierer J. 0·20, Felsenstein O. 0·30, Gutwinski O. 0·75, Haberfeld L. 1·00, Halberstam S. 0·30, Jankowski K. 1·00, Knopf R. 0·50, Komarek A. 2·00, Kolban A. 0·70, Körbel M. 0·50, Kortüm B. 0·60, Meese H. 0·90 fl. 10·75

Classe IIIb.

Margulies S. 0·40, Ruttin A. 1·10, Samesch O. 1·50, Schorr E. 2·00, Schorr V. 2·00, Schrenk J. 2·00, Strauch A. 0·70, Tugendhat V. 0·30 . . . . . . fl. 10·00

Classe IV.

Brudniok 1·50, Fränkel S 1·00, Gross S. 1·00, Hesbia S. 3·00, Moses V. 0·30, Neumann A. 1·00, Polatschek G. 0·40, Rössler H. 1·00, Ruttin M. 1·00, Schramek K. 2·00, Vogelgesang M. 2·00. . fl. 14·20

Classe V.

Haar J. 0·50, Hertrich M. 0·90, Krick J. 1·00, Nimhin V. 0·20, Piesch B.

Transport fl. 78·55

Transport fl. 78·55

1·10, Sachs R. 0·50, Schubert W. 1·50, Tugendhat M. 1·00, v. Wanka Th. 1·00, Wilke M. 0·30. Zipser G. 1·00. . . . . fl. 9·00

Classe VI.

Janota S. 0·80, Kraus R. 1·60, Margulies J. 0·90, Sachs O. 0·50, Schneeweiss H. 1·20, Seidler A. 1·50, Steuer W. 2·00, Winkler M. 2·00. . . . fl. 10·50

Classe VII.

Basner J. 0·30, Deutsch R. 2·00, Heilpern M. 2·00, Heimann A. 2·00, Körbel J. 2·00, Kukutsch A. 1·00, Lustgarten L. 0·50, Pilzer S. 2·00, Reinprecht L. 2·00, Rusch P. 0·90, Stefan E. 2·00 . . . . fl. 16·70

Classe VIII.

Fränkel A. 4·00, Halbreich S. 1·50, Hentschel L. 1·50, Kaufmann O. 0·90, v. Kéler A. 1·50, Matzner J. 2·30, Popper A. 0·20, Robinsohn S. 1·50, Schrenk J. 2·00, Steuer A. 2·00, Tobias E. 1·50 . . . . fl. 18·90

Zusammen fl. 133·65

4. Uebersicht der Einnahmen und Ausgaben.

Einnahmen im Jahre 1886/87.	Staatspapiere fl.	kr.	Bargeld fl.	kr.
Jahresbeiträge	—	—	314	—
Einmalige Beiträge . .	—	—	54	90
Schülerbeiträge	—	—	133	65
Coupons	—	—	4	18
Zinsen a. d. städt. Sparcassa bis Ende Juni 1887	—	—	72	04
Cassarest von 1885/86	—	—	354	58
Staatspapiere	100	—	—	—
Barvermögen in der städt. Sparcassa	—	—	1801	—
Summa	100	—	2734	35
Saldo.				
An capitalisiertem Vermögen	—	—	1801	—
An Cassa	—	—	269	87
An Staatspapieren . . .	100	—	—	—
Summa	100	—	2070	87

Ausgaben im Jahre 1886/87.	Bargeld fl.	kr.
Unterstützung armer Schüler:		
1. Durch Bargeld. . .	37	—
2. Durch Kost	73	16
3. Durch Bekleidung .	440	90
4. Durch Beschuhung .	73	—
5. Durch Krankenpflege	7	14
6. Durch Bücher etc. .	21	60
Entlohnung des Dieners, Stempel etc.	10	68
Summa	663	48

Der Unterzeichnete Ausschuss des Franz - Josefs - Unterstützungsvereines hat in seiner am 9. Juli abgehaltenen Sitzung den vorstehenden Rechnungsausweis im einzelnen geprüft und richtig befunden.

J. Eibl, Professor,
S. Fränkel, Fabrikant,
O. Kaiser, Professor,
Dr. G. Waniek, Gymnasialdirector,
(J. W. Hähnel verhindert).

Die Direction spricht hiemit allen Förderern des Unterstützungsvereines den wärmsten Dank aus.

X. Chronik.

Am 29. August 1886 wurde die Anstalt von Sr. Hochgeboren dem Herrn k. k. Landespräsidenten Franz Graf Merveldt mit einem Besuche beehrt.

Am 18. September wurde das Schuljahr vorschriftsmäßig eröffnet.

Am 4. October war aus Anlass des Allerhöchsten Namensfestes Sr. Majestät des Kaisers ein Ferialtag mit Festgottesdienst.

Am 19. November war aus Anlass des Allerhöchsten Namensfestes Ihrer Majestät der Kaiserin ebenfalls ein Ferialtag mit Festgottesdienst.

Das erste Semester wurde am 12. Februar geschlossen, das zweite am 16. Februar begonnen.

Am 27. Februar betheiligte sich das Gymnasium corporativ an dem Leichenbegängnisse des k. k. Realschuldirectors Herrn Karl Ambrózy.

Am 2. Juni unternahmen die Schüler unter Leitung des Lehrkörpers bei günstigem Wetter einen Ausflug ins Luisenthal.

Am 15. Juli wurde das Schuljahr nach abgehaltenem Festgottesdienste mit einer Schulfeier geschlossen.

XI. Kundmachung.

Für das Schuljahr 1887/88.

Das Schuljahr 1887/88 wird am 18. September um 9 Uhr vormittags mit einem Festgottesdienste eröffnet.

Alle in das Gymnasium eintretenden Schüler haben sich vom 13. bis 15. September vormittags von 9—12 Uhr und nachmittags von 3—5 Uhr in der Directionskanzlei zu melden. Für die in die I. Classe eintretenden kann die Anmeldung überdies schon am 14. und 15. Juli erfolgen.

Neu eintretende Schüler haben in Begleitung ihrer Eltern oder deren Stellvertreter zu erscheinen. Beizubringen haben sie den Tauf- oder Geburtsschein, ausserdem die aus der Volksschule kommenden, das im Sinne der h. Ministerial-Verordnung vom 7. April 1878 Z. 5416 ausgefertigte Frequentations-Zeugnis, welches die Noten aus der Religionslehre, der Unterrichtssprache und dem Rechnen zu enthalten hat; die von den Volksschulen Schlesiens nach dem vorgeschriebenen Formulare ausgestellten Schulnachrichten dienen als Ersatz für die Frequentations-Zeugnisse.

Nach dem Gesetze vom 3. Juni 1887 ist zur Aufnahme in die I. Classe erforderlich, dass der Aufzunehmende noch in dem Kalenderjahre, in welches der Beginn des Schuljahres fällt, mindestens das zehnte Lebensjahr vollendet. Nach dieser Altersgrenze bestimmt sich auch das zur Aufnahme in alle folgenden Classen erforderliche Minimalalter.

Die Aufnahme in die I. Classe ist außerdem von einer Aufnahmsprüfung abhängig, bei welcher im Sinne der hohen Ministerialerlässe vom 14. März 1870, Z. 5370 und vom 27. Mai 1884, Z. 8019, jenes Maß von Wissen in der Religion, welches in den vier Jahrescursen der Volksschule erworben werden kann, Fertigkeit im Lesen und Schreiben der Unterrichtssprache und der lateinischen Schrift, Kenntnis der Elemente aus der Formenlehre der Unterrichtssprache, Fertigkeit im Analysieren einfach bekleideter Sätze, Bekanntschaft mit den Regeln der Orthographie, richtige Anwendung derselben beim Dictandoschreiben und Uebung mit den vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen gefordert wird.

Schüler, welche in eine höhere Classe eintreten wollen, haben ein staatsgiltiges, mit der Abgangs-Clausel versehenes Zeugnis über das letzte Semester beizubringen oder, falls sie Privatschüler waren, sich gegen Erlag der Taxe von 12 fl. ö. W. der vorgeschriebenen Aufnahmsprüfung zu unterziehen.

Die Aufnahmsprüfungen für die I. Classe finden am 16. und 17. Juli, sodann am 16. und 17. September statt, die Aufnahms- und Wiederholungsprüfungen für die II.—VIII. Classe ebenfalls am 16. und 17. September.

Jeder Schüler des Gymnasiums hat ausnahmslos als jährlichen Lehrmittelbeitrag 1 fl. 5 kr., die neueintretenden außerdem noch eine Aufnahmstaxe von 2 fl. 10 kr. ein- für allemal zu entrichten.

Das Schulgeld beträgt laut h. Ministerialerlasses vom 12. Juni 1886, Z. 9681 für alle Classen des Gymnasiums jährlich 30 fl. und wird zur Hälfte während der ersten 6 Wochen eines jeden Semesters mittels besonderer, beim k. k. Steueramte zu erhebender Schulgeldmarken entrichtet.

Dr. Gustav Waniek,
k. k. Gymnasialdirector.