

BIBLIOTEKA
GŁÓWNA
W
SP
KRAKÓW

84 764

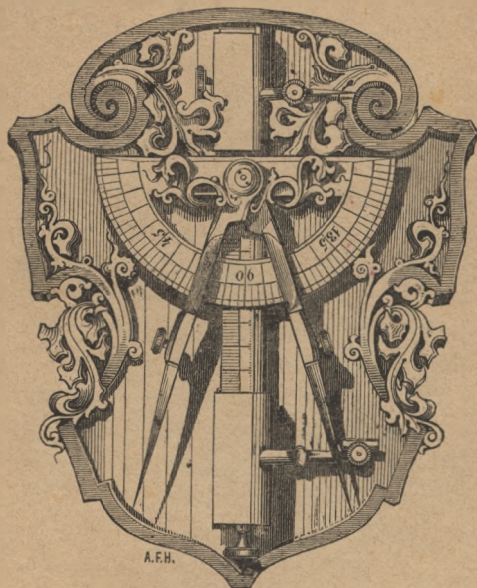
PRZEWODNIK

do

RYSUNKU CYRKLOWEGO i LINIJNEGO

jako wstępna nauka do

geometrii wykresłej, rysunków architektonicznych, machin i sytuacyjnych dla szkół realnych, gimnazyów, gimnazyów realnych, szkół przemysłowych, szkół sztuk pięknych, dla początkujących architektów i inżynierów jako też do nauki własnej



przez

FERDYNANDA A. HEISSIGA

c. k. profesora i publ. zwycz. nauczyciela przy wyższej szkole realnej na Landstrasse w Wiedniu etc.

podług

wydania trzeciego poprawnego, powiększonego i na matematycznych dowodach opartego

przełożył na język polski

A. W. J. NAWRATIL

z 7 tablicami i xylograficznemi postaciami, razem około 300 figur.

Cena 2 Złr. 40 c. w. a.

KRAKÓW 1875.

Nakładem Adolfa Dygańskiego i Sp. — Warszawa, Gebethner i Wolf.
Druk W. Korneckiego.



84764

BIBL. WSP
1966-K 500-1

PRZEDMOWA TŁOMACZA.

Przełożywszy książkę niniejszą na język polski i oddając ją do użytku publicznego pochlebiam sobie, że zdołam ułatwić znacznie początkującym uczniom naukę rysunku cyrklowego i liniowego; pragnę, aby moje usiłowania w tym względzie przyniosły pożyteczny skutek.

Zastrzedz się muszę od zarzutów, jakieby niniejszemu tłumaczeniu uczynić można, mianowicie co do wyrazownictwa bo każdy rzecz rozumiejący przyzna wielkie trudności, jakie samą terminologią przedstawia, starałem się jednak o ile możności połączyć zrozumiałość z dokładnością tłumaczenia.

Nieposiadając w naszym języku nazw właściwych dla wszystkiego, pozwoliłem sobie niektóre z nich utworzyć, inne zaś zachować w języku niemieckim o ile te u nas są w potocznym użyciu.

Na zakończenie niech mi wolno będzie złożyć należne podziękowanie **Profesorowi Ferdynandowi A. Heissigowi** za chętne a bezinteresowne zezwolenie przełożenia swojego dzieła na język polski a **Dr. Pawłowi Brzezińskiemu Dyrektorowi c. k. Instytutu technicznego w Krakowie** za rady i wskazówki czynione mi z całą gotowością i poświęceniem przy przeglądaniu rękopismu.

Kraków w Sierpniu 1875.

A. W. J. Nawratil.

Przedmowa autora do pierwszego wydania.

Pismo to opracowałem dla tych uczniów, którzy uczęszczają na naukę rysunku cyrklowego i liniowego w II i III. klasie niższej i w I. klasie wyższej szkoły realnej. Ponieważ jednak obok zwykle przychodzących elementarnych wykresień zwrócono także uwagę na zamieszczenie różnych części budowlanych i machin, jak również i na naukę nakładania farbami, przeto dziełko to może także dla początkujących rysowników praktycznych, którzy w tym kierunku dokładnego przygotowania szukają, mieć pewną wartość.

Uczący się w szkole będzie tę specjalną gałąź jeszcze gorliwiej uprawiał, jeżeli otrzyma techniczne zapiski dla swego przyszłego wyższego wykształcenia.

Aby cenę dziełka doprowadzić do minimum, a przytém aby to co jest najpotrzebniejsze przy kreśleniu uwzględnić, musiałem wykonać małe figury, które uczący się, podczas ćwiczenia, powinien powiększyć trzy do czterech razy.

Wiedeń, dnia 24 kwietnia 1855.

AUTOR.

Przedmowa do trzeciego wydania.

Uporządkowane zagadnienia w tej książce służą, jak to tytuł wskazuje, do nauczania się geometryczno-animetrycznych wykresień i tych płaskich postaci, wziętych z praktyki technicznej, których moi uczniowie z szczególniejszém zamiłowaniem już to uczą się i w nich ćwiczą, już je także badają.

Aby graficzną zręczność uczącego się rozwinąć i wykształcić, rozpoczęto od fizycznego punktu, linii, a następnie przeszło się do mechanicznych potem geometrycznych części prostej, do kątów i tak postąpiono z wprawą do nadzwyczaj ważnej nauki kreślenia figur złożonych.

Rozumie się wreszcie samo przez się, że już przy pierwszém przyłożeniu lineалу i cyrkla najważniejsze początki nauki o postaciach geometrycznych a przy dalszych ćwiczeniach także początki geometrii znane być powinny. W tém dziele przytoczone dowody dobroci wykonanych wykresień są tylko powtórzeniami geometrycznych twierdzeń, których uczono się poprzednio metodą syntetyczną a są mniejszym drukiem od drugiej części tekstu, już to tylko wskazane, już też zupełnie wyprowadzone.

Nie wszystkich dowodów może uczyć się początkujący w podanym porządku a często potrzeba pomijać ze względu na wiek młodzieńca, stopień jego przygotowania w trygonometrycznych dowodach jak też tych, które polegają na geometrii wykreslnej i nowszej, bo te sposoby dowodzenia stanowią tylko uzupełnienie innych dowodów.

Zagadnienia i rozwiązania przytoczone są większemi czcionkami drukowane od dowodów i uwag, które właściwie służą do wprawy i wyuczenia się geometrii konstrukcyjnej.

Oprócz zagadnień i potrzebnych do tego rozwiązań umieszczono także niektóre z najważniejszych twierdzeń o przystawaniu i podobieństwie, aby uczącemu się podać możność powtarzania najważniejszych twierdzeń zasadniczych powyższych ćwiczeń w związku z wykresleniami lub też początkującego z nimi zupełnie obeznać.

Łatwo spostrzedz można, że zwrócono główną uwagę na połączenie rysunku konstrukcyjnego z geometrią, a to jest zgodne z planem naukowym, podług którego w niższych klasach nie powinno się w ogólności nigdy uczyć rysunku bez geometrii i przeciwnie geometrii nigdy bez konstrukcyjnego rysunku.

Ostatnie postępowanie odbywało się wprawdzie zawsze, jednak omi- nięto dokładne wykreślenia elementarne idąc za wytkniętym celem geometryi. Połączenie tych przedmiotów w jeden, czyni zawsze w klasach niższych jasno dobitne nauczanie tak w teorii geometryi elementarnej, jakoteż i w części praktycznej graficznego przedstawienia. Doświadczenie przekonywa jak ważne są ćwiczenia elementarne w konstrukcyjnym rysunku, uczący się wykonuje postacie cyrklem i linealem, potrzebne do dowodów, wniosków i dodatków, które ma rozwiązać, a im dokładniej te postacie kreśli, tem prościej i łatwiej przychodzi mu dowodzenie na podstawie twierdzeń poprzedzających, rozwiązując zagadnienia wystarcza często sam rzut oka na linie dokładnie ułożone, aby rozpoznać związki elementów układu liniowego, i aby tem łatwiej z pomocą spokojnego namysłu wynaleźć znane twierdzenie w którym to czego się żąda, w zagadnieniu jest jako wniosek wyrażone. Wiele geometrycznych rozwiązań, zagadnień danych nie da się bez poprzedniego dokładnego przedstawienia postaci ani doprowadzić do końca ani też dowieść, sposób analityczny wskazuje najwyraźniej potrzebę dokładnego graficznego przedstawienia, jako wstępu do właściwego rozwiązywania zagadnień i odpowiedniego dowodu.

Ogół geometryczno-konstrukcyjnych ćwiczeń od ręki stanowi pierwszy, a geometryczny cyrklowy i liniowy rysunek drugi stopień jako wstęp do elementarnego technicznego rysunku.

Mnichów w Wrześniu 1874.

F. A. Heissig.

W S T Ę P.

1.

Określenia.

Celem nauki rysunku cyrklowego i linearnego jest: przedstawienie rozmaitych postaci geometrycznych na płaszczyźnie rysunkowej, jako też badanie kształtu, położenia i wielkości tychże.

Pod postacią geometryczną (figurą) przedstawioną na karcie rysunkowej rozumieć należy: płaszczyznę ograniczoną linijami. Postać taka może być zupełnie albo częściowo ograniczoną. Linije ograniczające położenie mogą być: zbiegające, przecinające, równoległe, stykające, mogą także leżeć razem lub rozproszone.

Rozciągłość jest wielkość taka, której części są rozproszone.

Przy geometrycznych postaciach należy uważać i badać ich kształt (formę), wzajemne położenie, a wreszcie ich rozciągłość (wymiary).

Cheąc przedstawić rozmaite figury, badać ich wielkość i wzajemne położenie, potrzeba naprzd znać geometryę elementarną, różne narzędzia i materiały*). Biegłość w rysunku geometrycznym nabywa się przez graficzne rozwiązywanie wielu zagadnień. Geometrya pochodzi z greckiego (*γη γη* ziemia, *μετρεω* mierzyć).

2.

Postacie geometryczne przedstawiamy w rysunku na płaszczyznach. Poniważ takowych t. j. jako płaszczyzny nie posiadamy, ale uważać je mo-

*) Wielu uważa rysowanie jako czysto mechaniczną biegłość i to porównywa z kaligrafią. Takie bezpodstawne twierdzenia nierzadko zdarzają się i często rozpowszechniane bywają, aby poniżyć tę umiejętność i sztukę, odejmując jej należyłą ważność.

żemy jako granice ciał istniejących, przeto używamy w tym celu ciał jak np. papieru, pergaminu, płótna rysunkowego, tablic drewnianych i łupkowych i t. p. Ponieważ punkta i linije, przedstawione na takich ciałach za pomocą rozmaitych materyałów, zmysłami pojmujemy, dlatego też zowią się one materyalnemi (fizycznemi) punktami i linijami, i mają trojakie wymiary, t. j. długość, szerokość i grubość. Znaki te robią się bądź mokreni, bądź też suchemi materyałami. Poruszając jeden z owych materyałów, odbywa się wzajemne ocieranie, jak np. podczas posuwania krędy po tablicy lub ołówka po papierze. W skutek tego posuwające się ciało pozostawia za sobą ślad, wskazujący drogę, jaką odbył punkt ruchomy zetknięcia. Ta widzialna droga jest tylko znakiem linii. Dla krótkości jednak zowiemy znak punktu *punktem* (Punkt), znak linii *liniją* (Linie). Dla rozróżnienia punktów pomiędzy sobą, oznaczamy je literami małego lub dużego alfabetu łacińskiego lub greckiego, jak np. punkt *A*, punkt *a*., punkt *Φ*, punkt *φ*.

Powstałe materyalne punkta i linije są użynysłowieniem idealnych czyli geometrycznych, albo matematycznych punktów i linij.

3.

Liniję prostą oznaczamy dwoma literami, z których jedną na początku, a drugą na końcu linii umieszczamy. W niektórych razach oznaczamy liniję prostą jedną tylko literą, umieszczoną na środku, mianowicie, jeśli jej długość uwzględniamy.

Krzywe linije oznacza się często kilkoma titerami, z których niektóre umieszczone są przy znaczniejszych zagięciach. Litery wymawiamy jedną po drugiej w porządku, w jakim są przy linii napisane. Nazwę linii wymawiamy czytając litery od początku lub od końca. Tak samo czyta się nazwa zamkniętej figury.

Do oznaczania geometrycznych postaci nie zawsze wystarczają litery łacińskiego abecadła, przeto zmuszeni jesteśmy posługiwać się w tym razie alfabetem greckim, który w tym celu, dla początkujących umieszczamy:

Alfabet grecki:

<i>A α</i> , alfa.	<i>I ι</i> , jota,	<i>P ρ</i> , ro.
<i>B β</i> , beta.	<i>K κ</i> , kapa.	<i>Σ σ</i> <i>ς</i> , sigma.
<i>Γ γ</i> , gama.	<i>Λ λ</i> , lambda.	<i>Τ τ</i> , tau.
<i>Δ δ</i> , delta.	<i>Μ μ</i> , mi.	<i>Υ υ</i> , ypsilonon.
<i>Ε ε</i> , epsilon.	<i>Ν ν</i> , ni.	<i>Φ φ</i> , fi.
<i>Ζ ζ</i> , zeta.	<i>Ξ ξ</i> , ksi.	<i>Χ χ</i> , chi.
<i>Η η</i> , eta.	<i>Ο ο</i> , omikron.	<i>Ψ ψ</i> , psi.
<i>Θ θ</i> , teta.	<i>Π π</i> , pi.	<i>Ω ω</i> , omega.

Niektóre narzędzia i materyały rysunkowe.

4.

Narzędzie lub materyał rysunkowy należy brać ręką czystą i następnie podczas całej roboty powinno się czysto utrzymywać ręce. Chcąc z korzyścią i zwinnie rysować, potrzeba się przyzwyczaić do pewnego porządku i to do tego stopnia, aby jeden i ten sam przyrząd lub materyał zawsze na jednym i tym samym kłase miejscu. Początkujący powinien się przyzwyczajać do dokładnego, czystego i pięknego rysowania. Ścisła dokładność jest pierwszym warunkiem skończonego rysunku cyrklowego. Wymagana czystość i dokładność ukończonego rysunku, działa korzystnie na uczącego się, bo tym spo-

sobem uczy się cierpliwości i porządku. Rysując, należy siedzieć prosto, pierś trzymać w pewnym oddaleniu od rysownicy, a oczy od płaszczyzny rysunkowej.

Przez uczenie się rysunków, nabyć można wiele zalet i przyzwyczajzeń, jak np. wytrwałą pilność, zamiłowanie spokojnej pracy, porządek, czystość i przyzwoitość. W rozpoznawaniu, pocuciu i zamiłowaniu piękna, znajduje się niejako przeciwwagę surowości i prostactwa umysłu, nieczemności zmysłowej i upodobania w żądzach poziomych. Umiejący dobrze obchodzić się z cyrklem, linealem, rajszywą i grafionem, wykonuje wiele rzeczy zręczniejsz od tego, który się rysunku cyrklowego i linearnego nie uczył.

5.

Papier rysunkowy *) powinien być dobrze klejony, gęsty, a powierzchnia jego o ile możności gładka. Dobry papier rysunkowy można często następującymi sposobami rozpoznać: a) Pierwszą oznaką dobroci papieru jest wszędzie jednakowa grubość, którą z łatwością rozpoznać można trzymając arkusz do światła. b) Zewnętrzna krawędź papieru jednostajnie zwilżona, nie powinna cheiwie i prędko pochłaniać wilgoci, lecz zmoczone miejsce winno wolno i równo wysychać; to oznacza, że papier był dobrze klejony i że jest do rysowania zdalny. c) Papier pocierany wzdłuż krawędzi gumąelastyką nie powinien przez to tracić swej gładkości.

W Anglii przygotowują do rysunków bawełniane materye, przyrządzając je w tym celu właściwymi sposobami, ku temu używają żywicy, ługu, potażu i t. p. Materya ta jest trwałą i można na niej wykończyć rysunki bardzo czysto.

Najpewniejszą próbą papieru rysunkowego jest otrzymanie na nim w czasie rysowania, bardzo czystych linii konturowych i gry farb (Farbentöne); papier posiadający te przymioty jest dobrym.

6.

Ołówki. Średnio twarde ołówki, oprawione w drzewo nie bardzo twarde, dające jednostajne, jasno-szare kręski, które z łatwością wycierać się dają, nie rozmazując się przytém, są najodpowiedniejsze do cyrklowych rysunków.

Chcąc rysunek zostawić tylko w konturze ołówkowym, należy wykonać go ołówkiem twardym. Ołówek taki, jeśli jest dobrym, winien pozostawiać ślad jednostajnie cienny; ołówki zadzierające lub nie jednakowy ślad zostawiające są złe, bo linija taka wyciągana tuszem zalewa się w zadartych miejscach. Do geometrycznych wykreśleń używa się ołówków *A. W. Fabera* Nr. 3. W austriackiej fabryce *L. et C. Hardtmuth'a* wyrabiane ołówki, z których numer 3 i 4 do rysunków geometrycznych najlepiej się nadają, są już dla swej taniości godne polecenia. Do kreślenia prostych linii z pomocą linealu, zacinamy ołówek klinowato; sposób ten jest bardzo praktyczny, bo przy rysowaniu większej ilości linii jednako grubych, niepotrzeba często zacinąć ołówka. Doświadczony rysownik posiada obok klinowato zaciętego ołówka, drugi stożkowato zacięty. Ten powinien być o jeden stopień większy i służyć do kreślenia linii krzywych wolną ręką; co też początkującym zaleca się. Ołówki zacinamy nożem, a ostrzemy koniec delikatnym pilnikiem lub pomexsem.

7.

Gumaelastyka (Gummielasticum, Kautschuk) używa się do wycierania zbytecznie długich i niepotrzebnych linii, przeciągniętych podczas prędkiego

*) Zalecenia godny jest rysunkowy papier w Wiedniu: Kärnthnerstrasse Nr. 37 i Gumpendorf Nr. 16 u J. Mayr i Fessler.

rysowania. Linije te powinny być w jednym kierunku wycierane i po wyciągnięciu tuszem nie mogą być widoczne. Gumaelastyka przy zwykłej ciepłocie nie powinna być ani twardą ani też zbyt mięką, przy wycieraniu zaś nie powinna zostawiać na papierze brudnych lub zamazanych plam. Gumaelastyka dłuższy czas używana plami papier, czemu zapobiega się, obcinając ją seczorykiem przed użyciem.

Gumaelastyka skrobaczka (*Radir-Gummilasticum*) służy do wyskrobki linii wyciągniętych farbami lub bardzo twardym ołówkiem.

Zapruszony rysunek oczyścić można świeżą ośródką z chleba, lub kuddatą białą albo jasno-żółtą skórą irelową.

8.

Tusz do wyciągania (*Ausziehtusch*). Wszystkie linije konturowe rysunków cyrklowych i linearnych nakreślone ołówkiem, wyciągamy tuszem, dla uczynienia ich wyraźniejszymi i dla uchronienia od zatarcia. Dawniej, gdy jeszcze do lawowania (rozmywanie tuszu pędzlem) większą przywiązywano wartość, starano się o dobry tusz chiński; dzisiaj rzadko się to już zdarza, gdyż farbami, bez użycia tuszu chińskiego, również ładne obrazy (rysunki), z wyjątkiem planów sytuacyjnych, wykonywać można.

Do wyciągania linii używamy tuszu wyrobu krajowego, znajdującego się w handlu, który posiada mocno czarną z niebieskawym odcieniem barwę. Dobroć tuszu rozpoznać można, pocierając go zwilgocnym końcem palca, dopóki ten nie zostanie zupełnie pokryty. Dobry tusz powinien barwić i rozcierać się powoli, nie powinien prędko sełnać, a miejsca tuszem powleczone powinny po wyschnięciu mieć pewien słaby połysk. Wyschnięta tarta powierzchnia tuszu powinna być całkiem gładką, niepopękaną, ani też chropowatą. Zasuszonym już lub starym tuszem można tylko wówczas konturowe linije wyciągać, gdy go drugi raz z wodą doskonale utrzymy. Przy wyciąganiu przedmiotów, mających być nałożonemi farbą, należy unikać zasuszonych a kilkakrotnie rozpuszczanych tuszów.

Różne farby wodne.

9.

Farby służą do uwydatnienia rozmaitych części składowych przedstawionego przedmiotu, aby ten stał się miłszym oku oglądającego. Do malowania takich przedmiotów używane są farby *Ackermann'a*, lepsze od farb *I. Anreiter'a*, lecz te ostatnie z powodu przystępnych cen są więcej używane. Dobre i tanie farby *I. Anreitera* nabyć można u *I. Mayr i Fessler w Wiedniu, Kärnthnerstrasse Nr. 37* i u tegoż na *Gumpendorf, Kirchenplatz Nr. 16*. Polecenia godne są także farby *G. Bormann'a* następców w Berlinie, handel przy *Brüderstrasse Nr. 39*, fabryka zaś przy *Holzmarktstrasse Nr. 5*. Wspomniona firma sprzedaje także rozgatunkowane farby t. z. miodowe (*Honigfarben*) Nr. III po cenie 1 thr., a tuszowe farby (*Tuschfarben*) po cenie 1 thr. i 5 sgr. Używane są także mokre farby (*feuchte Wasserfarben*) *Dra Fr. Schönfeld'a i Spółki w Düsseldorf*. Wszystkie poniżej wymienione farby tuszowe, najlepiej ucierać z wodą przekroploną (destylowaną) lub z deszczówką, gdy mają być użyte do nakładania, wówczas uciera się je na palcu lub lekko na matowej szklanej płycie, albo porcelanowej tabliczce.

I. Anreiter w Wiedniu wyrabia farby w kształcie guzików (*Calottenform*) po niżej podanych cenach. Początkujący winien zaopatrzyć się tylko w najpotrzebniejsze z nich i to wówczas tylko, jeżeli już posiada należytą biegłość w kręśleniu, aby mógł uczyć się nakładania farbami.

Cennik rozmaitych farb wodnych.

10.

Cytynowo-żółta (*Citronengelb*), żółta neapolitańska (*Neapelgelb*), chromowo-żółta (*Chromgelb*) Nr. 1, Nr. 2, Nr. 3, gumiguta (*Gummigutti*), jasny ugier (*Lichtocker*), pojedynczo 5 cent. w. a. Żółta indyjska (*Indischgelb*) po 15 cent. Ugier cielisty (*Fleischocker*) po 5 c. Kamień żółciowy (*Gallstein*) po 10 c. Minija (*Minium*), cynober (*Zinnober*) po 5 c. Karmin (*Carmin*) po 15 c. Lak monachijski (*Münchnerlack*) po 10 c. Karmin Nr. 3 po 5 c. Róż indyjski (*Indischrot*), róż wenecki (*Venetianer rot*) po 5 c. Róż (*Rosakrapp*) po 10 c. Siena palona (*Siena gebrannt*), róż żelazny (*Eisenrot*), ziemia angielska (*Engelrot*), ugier palony (*Ocker gebrannt*), ziemia Pozzuolo (*Pozzuolo-Erde*) po 5 c. Lak marzannowy brunatny (*Braunlack*), lak żółty (*Gelblack*) po 10 c. Ziemia Cassler (*Casslererde*), bistr (*Bistre*), umbra palona (*Umbra gebrannt*), umbra (*Umbra*), brunatna Vandeyk'a (*Vandeyckbraun*), sepia R. (*Sepia R.*), sepia (*Sepia*), smocza krew (*Drachenblut*) po 5 c. Ciemno-marzannowa (*Dunkelkrapp*), lak Cezara (*Cäsarlack*) po 10 c. Żółta purpura (*Goldpurpur*) po 15 c. Fiolet (*Violet*), fiolet żelaza (*Eisenviolet*), róż atramentowy (*Neutral-Tintroth*), błękit atramentowy (*Neutraltinte*), błękit opielaty (*Aschblau*) po 5 c. Kobalt (*Cobaltblau*) po 10 c. Błękit pruski (*Berlinerblau*) po 5 c. Ultramaryn (*Ultramarin*) po 10 c. Błękit paryski (*Pariserblau*), błękit indychtu (*Indigoblau*), zieleń ciemna (*Mitisgrün*), zieleń jasna (*Engelgrün*), zieleń roślinna (*Softgrün*), zieleń chromowa (*Chromgrün*), zielony cynober (*Zinnobergrün*), zieleń płowa (*Oelgrün*), zieleń oliwkowa (*Olivengrün*), czerni z sadzy (*Beinschwarz*) i czerni lampowa (*Lampenschwarz*) po 5 c.

Farby dla początkujących. Chromowo-żółta Nr. 1, gumiguta, kamień żółciowy, siena palona, ciemny ugier, minia, karmin, róż indyjski, ugier palony, bistr, smocza krew, błękit atramentowy, kobalt, błękit pruski, błękit indychtu, zieleń ciemna, zieleń roślinna i biel ołowiowa.

Mieszanie farb i nakładanie geometrycznych figur.

11.

Co się tyczy wyboru pojedynczo wymienionych farb do nakładania figur, jest rzeczą niemożliwą, podać dokładne przepisy mieszania tychże, dlatego też przedstawię krótko w następujący sposób, jak przez nakładanie narysowanej płaszczyzny, techniczny przedmiot przybliżenie oznaczamy.

Ponieważ nakładania pojedynczych płaszczyzn na planach sytuacyjnych w krótkim czasie i bez trudności nauczyć się można, zaś kolorowanie *planów budowniczych* i machin więcej nauki i technicznej biegłości wymaga, przeto przedstawię w krótkości, jakimi mieszaninami farb pojedyncze parcele i przedmioty planu sytuacyjnego zwykle nakładane bywają.

Budowle kamienne i inne kamienne przedmioty, jako to: szerokie mury, posagi i t. p. karminem jasno; publiczne budynki karminem jaśniej. *Budowle drewniane*: chromowo-żółtą, średnio ciemno. *Mosty*: drewniane paloną sieną, kamienne: karminem średnio-ciemno. *Gościńce pocztowe* bardzo bladym karminem. *Drogi*: sepią z paloną sieną; chcąc oznaczyć drogi polne i ścieżki, dodać należy więcej sepia i nakładać dość ciemno. Drogi krajowe i drogi gminne tą samą mieszaniną, tylko rozcieńczoną. Na *ulice, place* i *podwórza* rozcieńcza się jeszcze więcej poprzednią mieszaniną. Do oznaczania dróg ogrodowych powinna siena palona przeważać. *Kopalnie gliny*: paloną sieną dwoma do trzech odcieni, a większe szczeliny sepią. *Piaszek* tak jak ogrodowe ścieżki, tylko jaśniej. *Skały* sepią dwoma do czterech odcieni, nakładając

ostro i spieczasto. *Pastwiska*: rozcieńczonym grynspanem z małym dodatkiem gumiguty, bardzo blado.

Łąki: tą samą mieszaniną, mniej rozwodnioną, zawierającą jednak nieco więcej gumiguty. *Łasy*: najpierw średnio ciemny odcień tuszem, potem nakłada się rozcieńczoną farbą łąkową. *Polas*: blado żółtym wyciągiem z tytoniu; wyciąg ten przygotowuje się, nalewając na tytoni (średni gatunek niesaletrowany) tyle wody, aby tenże po nad jej powierzchnię nie wystawał, po kilku godzinach odlewa się płyn i przesącza (filtruje). *Ogrody warzywne*: grynspanem z dodatkiem nieco gumiguty i tuszu lub niebieskiej farby, albo też tylko samą zielenią roślinną. *Ogrody owocowe*, sady: tak jak łąki, tylko nieco żywiej (moeniej). *Winnice*: karminem z gumigutą lub lepiej dodać jeszcze nieco palonej sieni i dostatecznie rozcieńczyć. *Wody*: błękitem pruskim. Wąskie strumyki, całą parcelę średnim odcieniem, szerokie zaś zmywa się od brzegów ku środkowi, lub też nakłada pasami, ku brzegom coraz węższymi i ciemniejszymi.

Drzewa, winorośle, chmiel, żywe płoty nakrapia się ciemną zielenią. *Grzędy kwiatów w ogrodach ozdobnych* (spacerowych — Ziergärten) nakładamy najpierw w pewnych miejscach farbą łąkową, a następnie pstrzy się je różnobarwnie. *Granice pojedynczych okręgów, gmin i części krajów*, nakłada się w całej ich długości wązkim kolorowym paskiem.

Pojedyncze części niektórych architektonicznych przedmiotów i machin nakłada się następującymi mieszaninami farb:

Mury z kamieni łomowych. Fugi pokładowe i fugi zetknięć w murach z kamienia łomowego powinny być narysowane tylko ołówkiem; wewnątrz tych granic ołówkowych nakłada się płaszczyzny mieszaniną z błękitu pruskiego, dodając trochę minii a mało karminu. To samo odnosi się do murów z kamienia ciosowego. Dalsze wykończenie pędzlem wykonuje rysujący według własnego upodobania. Praktyczne doświadczenie okazało, że nakładając pędzlem łatwiej i pewniej dojdziemy do celu, gdy tak zwane światło odbite (linije refleksyjne) przed nakładaniem powlecemy zupełnie białym woskiem, zaciętym jak ołówek i oprawionym w obsadkę; miejsca woskiem nakreślone pozostaną białe, po nałożeniu farbą.

Mury z cegieł nakłada się różem Saturna z małym dodatkiem karminu; podczas nakładania pojedynczych cegiełek tą mieszaniną, bierze się w odwrotny pędzel rozpuszczony błękit atramentowy, to znów chromowo-żółtą farbą i w ten sposób zmieniając za każdą cegielką, nakłada się odpowiednio całą powierzchnię muru.

Zaprawy wapienne uwydatnia się bardzo rozcieńczonym roztworem błękitu atramentowego i różu Saturna, przyczem, od czasu do czasu, przybierać trzeba w ten sam pędzel nieco palonej sieni i sepii.

Przekroje ziemi oznaczają się mieszaniną karminu z przeważną ilością bistry, przyczem, podczas nakładania w pewnych miejscach, przybiera się w ten sam pędzel błękitu atramentowego i palonej sieni.

Łupki nakładamy mieszaniną błękitu atramentowego, bistry i tuszu.

Żelazo kute: mieszaniną błękitu atramentowego i błękitu pruskiego, a w niektórych razach dodaje się bardzo mało karminu, — wszystko to lekko rozpuszczone daje ładną barwę kutego żelaza. Jeżeli obok tego koloru przedstawić mamy także rdzę (utlenione żelazo kute), to podczas nakładania dodajemy jeszcze palonej sieni.

Żelazo lane: tuszem i błękitem atramentowym. Rdza wyraża się powlekając już suchą powierzchnią paloną sienią.

Miedź: karminem z błękitem pruskim. Jeżeli chcemy uwydatnić stopień śniedzi, to podczas nakładania dodają się do pędzla farby, któreby ją cechowały.

Cynk: błękitem indygotu i tuszem — ostatni powinien przeważać.

Ołów: błękitem atramentowym z tuszem i małą ilością białej farby.

Mosiądz: chromowo-żółtą lub gumigutą z bistrą.

Drzewo twarde: bistra i bardzo mało karminu, przyczem podczas nakładania przybiera się w pędzel nieco palonej sieni. Drzewo czołowe (Hirnholz) twarde, mieszaniną z karminu ciemnego i sepii lub bistrą.

Miękkie drzewo: paloną sieną dobrze rozcieńczoną. Drzewo czołowe rozcieńczonym roztworem karminu ciemnego lub minią.

Wodę: odcieniem rozcieńczonego kobaltu, a na to nakłada się w niektórych miejscach, w kształcie poziomych prostokątów mieszaniną błękitu pruskiego i palonej ugry. W niektórych razach także paloną sieną z zielenią roślinną jako ostatni częściowy odcień.

Powietrze: kobaltem.

Cień rzucony i samocień (cień właściwy) nakłada się w odpowiednich miejscach farbą odpowiednią materyałowi. Cienie rzucone murów, nieco niebieską — drzew, czerwono-brunatną. Wystrzegać się należy nakładania białą farbą, w celu wyrażenia odbitego światła, gdyż się to najczęściej nie udaje.

Naciąganie papieru na rysownice. Lineał, trójkąt i podziałki.

12.

Naciąganie papieru. Gdy rysunek ma być kolorowany, przylepiamy papier gumą lub karukiem rozpuszczającym się w ślinie (Mundleim); w tym celu zaginamy brzegi i odwrotną stronę papieru zwilżamy mokrą gąbką. Zagięte brzegi snarujemy gumą lub karukiem, następnie odginamy je napowrót i przylepiamy do deski. Papier przylepiony nie ustawia się pionowo. Chcąc tylko obwód jakiegoś przedmiotu odrysować wystarcza przypiąć papier do rysownicy pluskiewkami (Heftnägel). Na **Tab. I., Fig. 49.** przedstawia powiększoną pluskiewkę. Ścięty stożek przedstawiający główkę jest mosiężny, druga część ze stali. Do średnio-dużego arkusza potrzeba tylko 4 pluskiewki, któremi rogi papieru w miękkie drzewo a nie twarde listwy książką lub linealem wgniatamy.

13.

Rysownica v. Rajs Bret (Reissbrett). U nas najwięcej są rozpowszechnione rysownice z dwoma listwami po bokach. Wielkość ich jest rozmaita; rozróżniamy trzy numery tj. 2, 3½ i 6. Nr. 2 obejmuje rysownice 13" szerokie, 18" długie. Nr. 3½ mają 17" szerokości a 22" długości zaś Nr. 6 są 24" szerokie a 33" długie. Pierwsze sprzedają po 55 cent. Nr. 3½ po 75 c. a Nr. 6 po 1 złr. 60 c. w. a. Rysownica z dobrego wysuszonego drzewa sosnowego, jodłowego lub lipowego bez sęków i rys, zupełnie gładka, może być użytą do naciągania papieru, przeznaczonego do konstruocyj.

14.

Lineał rysunkowy v. rajszyzna (Reisslineal v. Reisssehene). Aby się o jej dokładności przekonać kreślimy podług niej linią prostą i uważamy czy takowa we wszystkich punktach szczerlnie dotyka krawędzi lineálu, nawet gdybyśmy położenie tego lineálu zmienili tj. umiescili go nad lub pod linią. Lineał czyniący zadość tym warunkom jest dobry, w przeciwnym razie jest

albo z jednej lub z obydwóch stron do nieużycia. Zamiast lineału rysunkowego, można się posługiwać także zwykłym linealem. *L. M. Tab. I., Fig. 34.*

15.

Trójkąt (Winkelbrett). O dokładności jego przekonać się możemy w następujący sposób: jedną przyprostokątną opieramy o lineal a podług drugiej kreslimy prostą, następnie obracamy trójkąt około nakreślonej linii tak, aby znów ta sama przyprostokątnia dotykała szczelnie z drugiej strony całą długość prostą; a jeżeli jednocześnie i druga przyprostokątnia szczelnie przylega do linealu, wówczas trójkąt jest dobry. Kto z korzyścią chce rysować, musi być zaopatrzony w dwa trójkąty, które dostać można w handlu pod nazwą trójkąt o 45° i trójkąt o 60° .

Podziałki są albo calowe lub centymetrowe z drzewa, fiszbinu lub metalu.

Opis rajscajgu i jego części składowych.

16.

Tab. I. Fig. A. *Cyrkiel do mierzenia (Handzirkel).* Środkowa część główki (osada—Charnieres) i końce nówek cyrkla powinny być zrobione z dobrej bardzo hartowanej stali, aby się ani nie zaginały, ani też łamały. U dobrych cyrkli środkowa część osady jest stalowa, boki zaś są mosiężne; aby ruchy cyrkla odbywały się jednostajnie i bez zbytecznego tarcia. Końce nie powinny występować nagle z grubej nówki cyrkla, ale powinny posiadać raczej kształt wysłupki lub igły, ażeby nie dziurawiły zanadto papieru. Końce nówek zamkniętego cyrkla powinny się w jednym punkcie schodzić. Podczas otwierania i zamykania cyrkla powinny się ramiona poruszać jednostajnie i nie zbyt twardo, a także i nie lekko. Jeżeli przy otwieraniu lub zamykaniu używać trzeba nieco większej siły, to tarcie należy zmniejszyć. W tym celu wkładamy kluczyk cyrklowy w dwa małe otworki w główce umieszczone a przez odpowiedni obrót można górną płytkę zwolnić. Wystrzegać się należy, aby cyrkiel nie upadał na ziemię, bo albo końce mogą się ułamać albo osada rozsunać a przez to końce nie będą się schodzić w jednym punkcie. Mierzając cyrklem, lub przenosząc nim miarę, należy go o ile możności stawiać pionowo do płaszczyzny rysunkowej.

17.

Fig. B. *Cyrkiel kolankowy (Stockzirkel)* służy do zataczania (kreślenia) kół a także do przenoszenia miar długości. Cyrkiel ten bywa dwójakiego rodzaju tj. o jednej śrubce lub o dwóch — i ten ostatni jest lepszym, chociaż nie znajduje się we wszystkich rajscajgach. Dwie śrubki *a* i *b* służą do przymocowania nówek *c* i *d* a w tym stanie można go także używać jako cyrkla do mierzenia.

Chcąc tym cyrklem zatoczyć koło, odkręca się nieco jedną ze śrubek *a* lub *b*, wyjmuje odpowiednią nówkę *c* lub *d* z trzonów i wkłada natomiast ołówek (kolanko, Bleiknie) **Fig. C**, którą znowu śrubką w trzonie przytwierdzamy. Do rurki *f g* wprawiamy ostro zacięty, średnio twardy ołówek a ustalamy go przykręcając śrubkę przy *f g*. Przy *h* u góry jest staw, w którym kolanko według potrzeby naginać można; ochwianym stawem *h* nie można kreślić porządnie kół, a przez to i kolanko takie jest nie do użycia. Dla uniknięcia wielkich dziur w papierze, jakie się końcem zwykłej nówki wykłują, zastępujemy ją nówką, opatrzoną w igłę **Fig. D**. Nówka ta posiada przy *h* staw, podobnie jak ołówek i zakończona jest od dołu stół-

kowatą nasadą, w której śrubką k igłę l o utwierdzamy. Nóżkę z igłą używamy bardzo korzystnie, szczególnie zaś przy kreśleniu tuszem kilka kół współśrodkowych. Staw przy h powinien posiadać przymioty stawu ołównika.

18.

Fig. F. *Przedłużnik* (Verlängerungsstange). Często cyrkiel nie wystarcza do przenoszenia większych miar lub zataczania kół o wielkim promieniu; w tym wypadku używamy przedłużnika **F.**, który wstawiamy w trzon kolankowego cyrkla, po wyjęciu zeń nóżki c lub d , i utwierdzamy go śrubką a lub b . W dolną część n przedłużnika wprawiamy ołownik, przytwierdzamy go śrubką p do osady, a zestawionym tak cyrklem zataczać można koła o dość znacznym promieniu. Zamiast kolanka, można także nóżkę kolankowego cyrkla w osadę n wprawić, i tę zapomocą p umocować a wtedy cyrklem takim długie miary przenosić można.

19.

Figury H i K. *Grafiony* (Die Reissfedern). Przy rysowaniu używamy grafionu ręcznego i cyrklowego.

Grafion ręczny (Die Ziehfeder). **Fig. H** służy do wyciągania prostych linii; cyrklowy (Zirkelfeder) zaś **Fig. K** do wyciągania kół.

Od grafionu zależy czystość, delikatność, ostrość i jednostajność rysunku. Ramiona grafionu są stalowe, jednako hartowane. Ramię b porusza się w stawie d . W ramieniu b jest okrągły otwór lub gwint śrubowy, w którym śrubka f jest osadzoną a w gwint ramienia c wśrubowaną być może. Ramiona te powinny być ściśle jednakowej długości a dolne ich końce płasko zaokrąglone. W niektórych rajscajgach są grafiony, których trzonek g wśrubowanym być może, a wtedy koniec jego opatrzony jest igłą, służącą do odkłuwania. Grafion nie powinien wrzynać się w papier, powinien bardzo czyste, jednostajnie grube linije wyciągać. Samiem oglądaniem rzadko rozpoznać można dobroć grafionu, dopiero przy użyciu poznać można jego wartość. Po każdym używaniu grafionu należy ramiona jego starannie oczyścić i czystą oliwą lekko natrzeć, w celu uchronienia go od rdzy.

Fig. K. *Grafion cyrklowy* ma podobnie jak ołownik, przy h staw, w którym przy wyciąganiu kół o większych promieniach zginany bywa, aby ramiona c i b o ile możności poruszały się pionowo po rysunkowej płaszczyźnie. Grafion cyrklowy użyty powinien być jedynie do kreślenia kół i łuków a starannie utrzymywany.

Obok wymienionych narzędzi, są jeszcze inne używane, jak np. cyrkiel do zataczania kół o bardzo wielkich promieniach (Stangenzirkel), cyrkiel proporcjonalny (Proportionalzirkel). Cyrkiel do zataczania kół o bardzo małych promieniach (Nullenzirkel). Cyrkiel do bardzo dokładnego mierzenia (Haarzirkel), kółko do kropkowania v. punktowania (Punktirradchen). Najlepsze rajscajgi wyrabiają w Aarau, w Szwajcarii.

Do niezbędnych materiałów rysunkowych należą także: miseczki na tusz i farby, szklanka na wodę, pędzel, gąbka, nóż, płytka rogowa, gwoździć do podkładania pod cyrkiel, przy zataczaniu kół (Einsatzstiftchen).



Konstrukcje cyrklowe i linearne oparte na zasadach matematycznych.

Określenia i wyjaśnienia.

§. 1.

Punkt.

Punkt matematyczny (idealny) zamieniamy na materyalny (fizyczny), gdy go na płaszczyźnie rysunkowej, okrągłym punkcikiem, lub kółeczkiem przedstawimy.

Cwiczenia w kreśleniu prostych.

§. 2.

Linia *prosta* ma wszystkie swe części w jednakowym kierunku.

Linie prostą nazwaćby można także obrazem pojedynczym.

Obraz pojedynczy składa się z czterech boków, z których dwa przeciwległe są na tej samej powierzchni papieru a dwa inne boki obrazu na przeciwnych stronach papieru.

Tab. I., Fig. 1 przedstawia prostą w położeniu poziomem, której grubość stosuje się do jej długości. Im dłuższa jest prosta w porównaniu do drugiej, tem grubiej powinna być wyciągnięta. Linije należące do jednego obrazu, mają być jednakowej grubości, tylko w linearnej perspektywie zachodzi wyjątek.

Fig. 2 przedstawia liniję kropkowaną (punktirte Linie), której punkta są małemi przystającemi prostokątami. Prostą można także przedstawiać okrągłemi punktami, których odstępy muszą być tak wielkie, jak ich grubość. Punktowanych linij używamy w konstrukcyi jako *linij pomocniczych* (Hilfslinie).

Fig. 3. Przedstawiona tu prosta składa się z krótkich prostych linii i punktów; używamy jej na oznaczenie *linii wypadkowej* (Resultatlinie).

§. 3.

Linije takie powinny być czysto i pięknie rysowane, biegłości w tém kreśleniu nabywamy jedynie przez pilne ćwiczenie się.

Ponieważ łuki kół często używane być muszą, przy kreśleniu linii równoległych i równych, przy połowieniu prostych, przy wyprowadzaniu i spuszczeniu prostopadłych, przy przedłużaniu prostej itp., jest przeto rzeczą konieczną, ćwiczyć się w ich kreśleniu.

Gdy otworzymy cyrkiel, jeden koniec jego nóżki wbijemy w płaszczyznę papieru, a koniec drugiego ramienia obracać będziemy na tejże płaszczyźnie rysunkowej, dopóki nie powróci do punktu wyjścia, to cyrkiel zatoczy *okrąg koła* (Kreislinie); jeżeli cyrkiel poruszając się nie powraca do punktu wyjścia, to zatacza wtedy *łuk* (Kreisbogen, arcus). Ponieważ oddalenie obu końców cyrkla jest oddaleniem środka od okręgu koła, przeto otwór cyrkla równy jest zawsze promieniowi zatoczonego okręgu koła. Zamiast więc powiedzieć: oznaczonym otworem cyrkla zatoczyć koło, mówi się także: oznaczonym promieniem ma być koło zatoczone.

§. 4.

Zagadnienia. 1. Zatoczyć dowolny okrąg koła. 2. Z danego punktu zatoczyć dowolny okrąg koła. 3. Danym promieniem, w jakimkolwiek położeniu, zatoczyć okrąg koła. 4. Z danego punktu danym promieniem zatoczyć okrąg koła. 5. Zatoczyć łuk na takich samych danych.

§. 5.

Fig. 4. Jeżeli tu dwie proste tak się przecinają, że powstałe ztąd kąty wierzchołkiem przeciwległe, są kątami prostymi, to otrzymamy punkt przecięcia, który końcem cyrkla łatwo da się oznaczyć i ten do jakiegokolwiek konstruowania z *korzyścią* użytym być może. Należy się przyzwyczaić do oznaczania kółeczkiem każdego z punktów, podobnie jak to w tej figurze jest przedstawione.

Fig. 5. W przedstawionych tu prostych punkt przecięcia nie tak łatwo oznaczyć można, dlatego też unikać należy przecinania prostych, któreby do siebie pod bardzo ostrym kątem nachylone były, gdyż w takim razie ten punkt pomocniczy nie da się ściśle oznaczyć.

Fig. 6. Ta figura przedstawia przecięcie dwóch łuków. Części łuków, znajdujące się w pobliżu punktu przecięcia, stoją na sobie prawie pionowo, dlatego też ich punkt przecięcia łatwo oznaczonym być może.

Przedłużenie prostej.

§. 6.

Określenie. Prosta dana zowie się *przedłużoną* (verlängerte Gerade), gdy linija wyprowadzona z jej końca lub początku, leży z nią w tym samym kierunku.

Zagadnienie. **Fig. 7.** Daną prostą AB przedłużyć.

Rozwiązanie. Wstawiwszy jedną nóżkę cyrkla w B otwieramy takowy aż po a za A . Tym promieniem (większym jak AB) zataczamy łuk, który przecinamy w a i b drugim łukiem, zatoczonym z A dowolnym promieniem.

Następnie wstawiamy w a jedną nóżkę cyrkla i większym promieniem zataczamy łuk, przecinając go drugim łukiem zatoczonym z b , tym samym promieniem; w ten sposób otrzymamy punkt przecięcia c . Prosta cA jest przedłużeniem danej linii AB .

Wyobraźmy sobie c połączony z a i b , B z a i b , A z a i b liniami prostymi.

1. $AB = Aa$, $bB = aB$, $AB = AB$ przeto $\triangle AbB \cong \triangle AaB$ podług IIIgo twierdzenia o przyst. trójk., $\sphericalangle bBo = \sphericalangle aBo$, $aB = bB$, $oB = oC$ przeto $\triangle obB \cong \triangle oab$ podług IIgo twierdzenia o przyst. trójk., a ztąd $\sphericalangle bob = \sphericalangle aob = P$ (jeden prosty), zatem $ab \perp AB$.

2. $ao = bo$, $ac = cb$, $co = co$ przeto $\triangle aco \cong \triangle bco$, zatem $\sphericalangle coa = \sphericalangle cob = P$, $BA \perp ab$ w punkcie o i $co \perp ab$ w o , ztąd wynika, że cAB jest prostą, tj., że c jest w tym samym kierunku co i BA czyli AB i co mają AO wspólne, dlatego tworzą tylko jedną prostą.

§. 7.

Zagadnienie. Fig. 8. Przedłużyć prostą w obie strony linealem, nie używając cyrkla.

Rozwiązanie. W końcowy i początkowy punkt prostej wbijamy igiełki, do odkłuwania, przedstawione na Fig. 9 i do tych przykładamy lineał. W krawędzi lineału leży przedłużenie prostej.

Dla ćwiczenia przedłużmy prostą pionową, nie obracając przytęm rysownicy.

Cztery główne działania liniami prostymi.

Dodawanie.

§. 8.

Określenia. 1. Pod sumą dwóch lub więcej prostych, rozumiemy ową prostą, której długość równa jest długości pojedynczych linii razem wziętych, albo, która jest tak długa, jak tamte razem wzięte.

2. Wynałazć sumę dwóch lub więcej prostych znaczy: dodać te linie do siebie.

3. Proste mające być dodane, zowią się *dodajniki* (Summanden, Addenden, Posten).

Zagadnienie. Fig. 10. Proste a , b i c dodać do siebie.

Rozwiązanie. Kreślimy prostą nieoznaczonąj długości i przenosimy na nią pojedyncze dane linie np. $a = a'$ $b = b'$ wreszcie $c = c'$ tak, aby punkt końcowy jednej części dotykał początkowego punktu części drugiej. Otrzymamy wtedy $a + b + c = a' + b' + c' = AB$.

Odejmowanie.

§. 9.

Określenia. 1. Pod różnicą (Differenz) dwóch prostych rozumiemy ową prostą, jaką trzeba dodać do drugiej prostej tj. do odjemnika, aby otrzymać pierwszą prostą, tj. odjemną.

2. Oznaczyć różnicę dwóch prostych, znaczy drugą prostą od pierwszej odjąć.

Zagadnienie. Fig. 11. Od prostej AB odjąć prostą f .

Rozwiązanie. Cyrklelem objąwszy prostą f przenosimy ją np. od B w lewo na BA tak, aby koniec jej leżący po lewej stronie przypadał w k a przeto $f' = f$. Ztąd otrzymamy: $AB - f = AK$, a zatem AK jest szukaną resztą.

Mnożenie.

§. 10.

Określenia. 1. Dwie proste pomnożyć przez siebie znaczy, z pierwszą prostą tj. mnożną, zawierającą pewną ilość jednostek miary, utworzyć ilo-

czyn w ten sam sposób, w jaki druga prosta tj. mnożna, zawierająca pewną ilość jednostek miary powstała z jedności.

2. Wynaleźć iloczyn z dwóch prostych znaczy: pierwszą prostą pomnożyć przez drugą.

3. Iloczyn dwóch prostych jest prostokątem; przytem jednak proste należy uważać jako zbiór jednostek miary.

§. 11.

Zagadnienie. Prosta 4 centymetry długa, ma być pomnożoną przez drugą prostą o długości 5 cm.

Rozwiązanie. 4 cm. pomnożyć przez 5 cm. znaczy (podług 1) z 4 cm. w ten sam sposób utworzyć iloczyn, w jaki sposób 5 powstało z jedności; 5 zaś powstało z jedności w ten sposób, że jedność pięć razy za dodajnika użyto, bo $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, przeto wzięwszy liczbę 4 pięć razy za dodajnik a wtedy będzie $4^{cm} \cdot 5^{cm} = 4^{cm} + 4^{cm} + 4^{cm} + 4^{cm} + 4^{cm} = 20^{cm}$. miary kwadratowej; tj., że wypadek z działania przedstawia się jako prostokąt obejmujący $20 \square$ centymetrów. Takie jest właściwe mnożenie prostych.

Niewłaściwe mnożenie.

§. 12.

Zagadnienie. Fig. 12. Prosta mn mamy wziąć trzy razy tj. $nm \cdot 3$.

Rozwiązanie. Na prostą nieoznaczoną długości przenosimy nm jako dodajnik trzy razy. $nm \cdot 3 = ce$.

Wniosek. Suma dowolnej ilości równych prostych równa się iloczynowi, którego mnożną jest jedna z tych równych linii a mnożnikiem ich ilość.

Dzielenie.

§. 13.

Określenia. 1. Dzielić znaczy: znając iloczyn dwóch czynników, z których każdy jest prostą, zawierającą pewną ilość jednostek miary, i jedną z tych prostych linii — wyszukać drugą.

2. Dany iloczyn, który jest prostokątem, uważamy za *dzielną*, dana linia (czynnik) zowie się *dzielnikiem* a szukana prosta (czynnik) zowie się *ilorazem*. Pod dzielnikiem i ilorazem rozumie się liczby, oznaczające ilość jednostek miary, zawartych w tych prostych.

Przykład. Jeżeli prostokąt $ABCD$ dany jest przez dwa przytykające boki (linie proste), z których $AB = 5$ jednostek linearnych (dm) zaś $BC = 3$ jednostek linearnych (dm) wynosi, natenczas

$$5^{dm} \cdot 3^{dm} : 5^{dm} = 15 \square^{dm} : 5^{dm} = 3^{dm}.$$

§. 14.

Zagadnienie. Iloczyn dwóch prostych, z których każda odnosi się do tej samej jednostki linearnej, równa się $32 \square$ jednostek, jedna prosta, t. j. dzielnik ma 8 jedności (części); jak wielką jest druga prosta, czyli iloraz?

Rozwiązanie $32 \square^{cz} : 8^{cz} = 8^{cz} \cdot 4^{cz} : 8^{cz} = 4^{cz}$. Wysokość więc czyli drugi przytykający bok prostokąta równa się 4 jednostkom.

Uwaga. Powyższe określenie jest nawet wtedy ważne, gdy dzielna i dzielnik są podane w kształcie ułamków.

Niewłaściwe dzielenie.

§. 15.

Zagadnienie. Fig. 13. Prosta CD podzielić na siedem równych części.

Rozwiązanie. Pewien kawałek prostej obieramy według miary oka jako siódmą część i przenosimy go na daną linię siedem razy. Jeżeli część ta nie była właściwie siódmą częścią danej linii, wówczas zmniejszamy lub powiększamy otwór cyrkla, dopóki nie znajdziemy żądanej siódmej części.

$$CD : 7 = C1 = 1, 2 = 2, 3 = \dots 6, D, \text{ bo } C, 1 \cdot 7 = CD.$$

Różne zagadnienia.

§. 16.

Zagadnienie. Znaleźć iloczyn z $(4 + \frac{1}{5}) G$.

Rozwiązanie. Na prostej dowolnie nakreślonej przenosimy daną linię G cztery razy, a do tej sumy dodajemy jeszcze piątą część linii G . Razem wzięte te części stanowią żądany iloczyn.

§. 17.

Zagadnienie. Prosta G podzielić na $5 + \frac{1}{4}$ części.

Rozwiązanie. $G : (5 + \frac{1}{4}) = G : \frac{21}{4}$; prostą G dzielimy na 21 równych części i 4 z nich bierzemy za iloraz; gdyż:

$$G : \frac{21}{4} = \frac{4}{21} G, \text{ bo } \frac{21}{4} \cdot \frac{4}{21} G = G.$$

§. 18.

Zagadnienie. Fig. 14. Prosta AB podzielić na kilka części będących do siebie w stosunku jak $2 : 3 : 4 : 5$.

Rozwiązanie. Prosta dzielimy na tyle równych części, ile wynosi suma danych liczb stosunkowych. $2 + 3 + 4 + 5 = 14$. Prosta AB dzielimy na 14 równych części i oznaczamy na niej punkta C, D, E , a przez to otrzymujemy:

$$AC : CD : DE : EB = 2 : 3 : 4 : 5.$$

Kreślenie linii prostopadłych.

§. 19.

Określenie. Prosta jest do drugiej prostopadłą, gdy tworzy z nią równe kąty przyległe.

Zagadnienie. Fig. 15. Do linii FG poprowadzić prostopadłą, przechodzącą przez jej środek.

Rozwiązanie. Pierwszy sposób. Koniec cyrkla wstawiamy w F i pewnym otworem cyrkla, większym od połowy FG , zataczamy łuki nad i pod prostą; tym samym otworem cyrkla przecinamy te łuki z punktu G , a tak otrzymane punkta przecięcia a i b łączymy prostą ab , która jest prostopadłą do FG i przechodzi przez punkt środkowy o .

$\triangle a F b \cong \triangle a G b$, podług 3go twierdzenia o przyst. trójk. $\triangle a F o \cong \triangle a G o$, bo $a F = a G$, $ao = ao$, $\sphericalangle F a o = \sphericalangle G a o$, przeto $F o = G o$, zatem punkt o jest środkowy, $\sphericalangle a o F = \sphericalangle a o G = P$, $ao \perp FG$.

Drugi sposób. Fig. 16. Pewnym otworem cyrkla, większym aniżeli $\frac{AB}{2}$, zataczamy z B łuk 1, 2 i przecinamy takowy z A tym samym promieniem, ztąd powstaje punkt przecięcia a . Następnie jeszcze większym otworem cyrkla

zataczamy z A łuk 7, 8, zaś z B tym samym promieniem łuk 5, 6; oba te łuki przetną się w punkcie b . Połączmy a z b , to CD jest prostopadłą do AB i przechodzi przez punkt środkowy C .

Połączmy A i B z a i b prostymi. $AB = Bb$, $Aa = Ba$.

$\triangle Aab \cong \triangle Bab$ podług 3go twierdz. o przyst. trójk., przeto $\sphericalangle AbC = \sphericalangle BbC$.

$\triangle AbC \cong \triangle BbC$ podług 2go twierdz. o przyst. trójk., zatem $AC = BC$, przeto C jest punkt środkowy, $\sphericalangle ACb = \sphericalangle BbC = P$ czyli $CD \perp AB$.

Uwaga. Sposób ten jest szczególnie wtedy korzystnym; gdy z drugiej strony, na tej samej płaszczyźnie rysunkowej, nie ma miejsca na pomieszczenie linii pomocniczych.

§. 20.

Zagadnienie. Fig. 17. Z danego punktu o wyprowadzić do AB prostopadłą.

Rozwiązanie. Dowolnym otworem cyrkla odeinam na linii AB z punktu o równe kawałki, przez co otrzymuję $ro = os$. Z r opisuję większym otworem cyrkla aniżeli $rs : 2$, łuki ab i gh , które z s tym samym otworem cyrkla łukami cd , kl przecinam. Połączywszy punkt przecięcia f z o , otrzymam żadaną prostą fo prostopadłą w o , fo przedłużoną przechodzić musi przez n .

Bo $or = os$, $fr = fs$, $fo = fo$, zatem $\triangle fro \cong fs o$ podług 3go twierdz. o przyst. trójk., przeto $\sphericalangle for = \sphericalangle fos = P$, t. j. $fo \perp AB$. Przedłużona fo jest miejscem geometrycznym wszystkich punktów, które od r i s są jednakowo oddalone; ale odległości nr i ns są sobie równe, przeto n leży w miejscu geometrycznym, czyli kierunek fo przechodzi przez n .

§. 21.

Zagadnienie. Fig. 17. Z punktu f poprowadzić prostopadłą do AB .

Rozwiązanie. Z f zataczam łuk, mający przechodzić przez r i s ; połowiąc rs w o , a linią łączącą f z o , t. j. fo jest do AB prostopadłą.

Dowód jak wyżej.

§. 22.

Zagadnienie. Fig. 18. Z końca punktu c prostą bc wyprowadzić do niej prostopadłą.

Rozwiązanie. 1szy sposób. Zewnątrz prostą bc obieramy dowolny punkt C , nad nią leżący. Z tego punktu promieniem Cc zataczamy łuk acg . Otrzymany punkt przecięcia b łączymy z C prostą bC i przedłużamy ją aż do przecięcia się z łukiem w punkcie d . Połączmy c z d , to otrzymamy żadaną prostopadłą kc .

Bo kąt kcb jest kątem na okręgu $= \sphericalangle \frac{bcd}{2}$.

Uwaga. Sposób ten zaleca się bardzo praktykom.

2gi sposób. Fig. 19. Otrzymamy CB prostopadłą do AB w końcu B , gdy dowolnym otworem cyrkla Ba zatoczmy z B łuk i przeniesiemy nań z a dwa razy promień. Tym samym otworem zataczamy z c i d łuki cg i dk , które się w t przetną. Połączywszy punkt f z B , otrzymamy żadaną prostopadłą CB do AB wyprowadzoną z punktu B .

Bo $\triangle acB$ i $\triangle cdB$ są równobocznymi trójkątami, przeto $\sphericalangle abc = \sphericalangle cbd = 60^\circ$; $\triangle Bcf \cong \triangle Bdf$ podług 3go twierdz. o przyst. trójk., zatem $\sphericalangle dbf = \sphericalangle cbc = 30^\circ$, $\sphericalangle 60^\circ + \sphericalangle 30^\circ = 90^\circ$, a więc $CB \perp AB$.

3ci sposób. Fig. 20. Dowolnym otworem cyrkla Ba opisujemy łuk ak i przecinamy go tym samym otworem cyrkla z a punkcie b ; a łączymy z b prostą i zataczamy tym samym promieniem z b łuk mn , przez co otrzymamy punkt przecięcia o ; prosta łącząca o z B jest żadaną pionową CB .

Bo trójkąty obB , bkB , bko są równoboczne przystające, $\sphericalangle ABb = 60^\circ$, $\sphericalangle bBo = 30^\circ$, $\sphericalangle ABb + \sphericalangle bBo = P$ czyli $CB \perp AB$ w punkcie B .

1sza uwaga. Ponieważ dwa promienie, połowiące kąty przyległe, są do siebie prostopadłe, można więc na mocy tego łatwo nakreślić kąt prosty. Do

tego część **Fig. 44.** Założenie. Promienie df i dt połowią nierówne kąty przyległe cdC i cdD .

Twierdzenie. $\sphericalangle fdt = P$.

Dowód. $\sphericalangle Cdf = \sphericalangle cdf$
 $\sphericalangle tdD = \sphericalangle cdt$ } z wykreślenia

$\sphericalangle Cdf + \sphericalangle tdD = \sphericalangle cdf + \sphericalangle cdt$. Wyobraźmy sobie promień td przedłużony w lewo na dół, i nazwijmy go np. tdz , to $\sphericalangle Cdz = \sphericalangle tdD$, jako kąty wierzchołkiem przeciwległe; przez podstawienie $\sphericalangle Cdf + \sphericalangle Cdz = \sphericalangle cdf + \sphericalangle cdt$ lub $\sphericalangle zdf = \sphericalangle fdt$, jeżeli jednak kąty przyległe są równe, to każdy z nich jest prostym.

2ga uwaga. **Fig 21.** Jeżeli przy kreśleniu kół, przenoszeniu jednostek miary lub dzieleniu prostych, nie lekko i z ręcznie z cyrklem obchodzono się, to bardzo łatwo może się zdarzyć, że albo oba ramiona $S'S'$ lub jedno z nich za głęboko w papier wbito, przez co popełnia się błędy dające się spostrzedz już to z samego początku, już to przy samym końcu rysunku. Błędy te usunąć można, rysując na nowym papierze cały rysunek po raz drugi. Przy kreśleniu kół zdarza się nieraz błąd, że końcowy punkt linii kołowej nie schodzi się z początkowym, czyli, że rysujące ramie cyrkla nie powraca w miejsce z którego wyszło, z którego zaczęło kreślić koło; pochodzi to często ztąd, że chociaż w chwili rozpoczętego kreślenia, koniec b spoczywał w c a koniec a poruszał się, jednakże w ciągu dalszej roboty ramię S zagłębiało się w papier, a w skutek tego środek koła c obniżył się aż do b , a przez to punkt końcowy wypadł bliżej środka aniżeli początkowy. Jeżeli przy przenoszeniu miary $ba = R$ na jakąś prostą od strony lewej ku prawej np. do c , jeden koniec cyrkla np. b za głęboko wbijemy, natenczas na płaszczyźnie rysunkowej nie otrzymamy miary ba , lecz mniejszą od niej ca . Gdy staw cyrkla jest wolny, to mogą być prócz tego inne jeszcze błędy.

Proste równoległe użyte jako konstrukcyja pomocnicza przy dzieleniu linii prostych.

§. 23.

Określenie. Linije proste, będące wszędzie jednako od siebie oddalone, zowiemy *linijami równoległymi* (Parallellinien).

§. 24.

Zagadnienie. Stosownie do powyższego określenia mamy do prostej cg , **Fig. 134**, Tab. III nakreślić równoległą, przechodzącą przez dany punkt a .

Rozwiązanie. Z danego punktu a sposobem podanym w **Fig. 17** tab. I spuszczaemy na cg prostopadłą ag , z jakiegokolwiek punktu prostej cg np. c , wyprowadzamy do niej prostopadłą cO i z c odcinamy na nią w tym samym kierunku jak ga odległość $ga = cf$, w końcu przez punkta f i a kreślimy prostą fa , a ta będzie żadaną równoległą do cg w danej odległości ag .

Dowód. $ag = cf$ i $ag \parallel cf$, bo gdy dwie proste są do trzeciej prostopadłe, to są równoległe, zatem $agcf$ jest równoległobokiem, ponieważ boki przeciwne są parami sobie równe i równoległe, a zatem $fa \parallel gc$.

§. 25.

Zagadnienie. Do prostej PR (**Fig. 62**, tabl. II) nakreślić dwie linije równoległe i równe co do długości.

Rozwiązanie. W końcowych punktach P i R wystawiam podług figur 18, 19 lub 20 prostopadłe, odcinam $RA = PB = AL = BN$ i przez punkta A, B , potem przez L i N kreślę proste, przez co otrzymam $AB \parallel RP$ i $LN \parallel RP$.

Gdyż $LR \parallel NP$, ponieważ kąty R i P jako jednostronne spełniające (Anwinkel) wynoszą razem $2P$; przeto $RPBA$ i $RPNL$ są równoległobokami. w których boki przeciwne są równe i równoległe.

§. 26.

Zagadnienie. Kreslenie równoległych za pomocą lineatu i trójkąta lub też za pomocą dwóch trójkątów, odbywa się jak Fig. 35 wskazuje, w następujący sposób: Do trójkąta B mocno trzymanego, przykładamy trójkąt A i posuwamy go po krawędzi trójkąta B do góry lub na dół. Tak otrzymamy równoległe ab , cg i t. d.

O dzieleniu prostych za pomocą linii pomocniczych.

§. 27.

Zagadnienie. Fig. 22. Podzielić prostą na kilka równych części, np. podzielić prostą OV na pięć równych części.

Rozwiązanie. Pod prostą OV kreślimy do niej równoległą, dłuższą jednak niżeli OV i dowolnie obrany kawałek przenosimy na nią 5 razy. Łączymy A z O i B z V prostymi, które przedłużamy aż do przecięcia się w punkcie np. P , ten punkt łączymy z punktami 1, 2, 3, 4, a te proste poprowadzone promienisto przetną daną prostą OV w I, II, III i IV, zkad powstaną równe części OI , II , III , IV Rozumiemy się, że równoległą AB można i nad OV nakreślić.

Ponieważ równoległe są nierówne, przeto proste AO i BV przechodzące przez końcowe punkta tych równoległych, muszą się w punkcie P zbiegać, a $\triangle POV \sim \triangle PAB$, potem i $\triangle POI \sim \triangle PA1$, $\triangle PIH \sim \triangle P1, 2$, $\triangle PIIH \sim \triangle P2, 3$ i t. d. Dlatego:

$$PI: P1 = IO: 1, A \text{ i}$$

$$PI: P1 = IHI: 1, 2$$

$$IO: 1, A = IHI: 1, 2 \dots (1) \text{ dalej}$$

$$PII: P2 = IHI: 1, 2$$

$$PII: P2 = IHHI: 2, 3$$

$$IHI: 1, 2 = IHHI: 2, 3 \dots (2)$$

i t. d.

(1) i (2) stanowią równanie stosunkowe:

$$IO: 1, A = IHI: 1, 2 = IHHI: 2, 3 = \text{i t. d.}, \text{ lub gdy zmienimy wyrazy środkowe:}$$

$IO: IHI = 1, A: 1, 2 = IHHI: IHHI = 2, 3: 3, 4 = \dots$ Lecz według założenia z wykreślenia wynikającego, są wyrazy drugich stosunków pomiędzy sobą równe, a zatem i wyrazy pierwszego stosunku muszą być także równe między sobą, t. j. $OI = I, II = II, III = III, IV = IV, V$.

§. 28.

Zagadnienie. Fig. 23. Prosta AB podzielić na cztery równe części.

Rozwiązanie. Prosta AB połowimy najprzód w punkcie D w następujący sposób: cyrkiel zasadzamy w A i otworem większym od połowy danej linii zataczamy łuki 11, 12, 13, 14, które przecinamy łukami 9, 10, 15, 16, zataczonymi z B tym samym otworem cyrkla, otrzymamy w ten sposób punkta przecięcia górny a i dolny b . Połączymy te punkta prostą, otrzymamy punkt D t. j. środkowy punkt danej linii. Jeżeli połowy AD i DB w ten sam sposób przepołowimy w C i F , to zadanie zostanie zupełnie rozwiązane.

$$AC = CD = DF = FB = \frac{AB}{4}.$$

Dowód. $\triangle Aab \cong \triangle Bab$ podług 3go twierdz. o przyst. trójk., przeto $\sphericalangle Aad = \sphericalangle BaD$. $\triangle ADa \cong \triangle BDb$, zatem $AD = BD = AB: 2$. W ten sam sposób dowodzimy, że $AC = CD = \text{i t. d.} = \frac{1}{4} AB$.

Uwaga. Ponieważ w trójkącie AaB , $Aa + Ba > AB$, dlatego też musiano obrać promień większy od połowy danej linii.

Wniosek. Ponieważ linije pomocnicze są prostopadłe do AB , są zatem i równoległe do siebie. Można więc w równych odstępach kreślić równoległe, gdy na prostej odetniemy części równe, a w końcowych punktach tych stykających się części powyższym sposobem wykreślimy prostopadłe. Te ostatnie będą żadanymi równoległymi i równo oddalonymi od siebie.

§. 29.

Zagadnienie. Fig. 24. Nakreślić kilka prostych, na którychby dowolnie wielkie, lecz na każdej z nich równe części dały się odmierzyć cyrklem.

Rozwiązanie. 1szy sposób. Kreślimy prostą Oa i odcinamy na niej od O dowolną ilość równych części $On = nk = kg \dots$; w punktach przecięć wystawiamy prostopadłe $nm, kl, gh, cd \dots$, to te podług powyższego wniosku §. 38go są równoległe. Nakreślimy przez O proste Op, Or, Os, Ot i t. d.; każda z tych siecznych jest przez te prostopadłe równoległe podzielona na części równe. W tej figurze każda przez O poprowadzona sieczna jest podzielona na 5 równych części.

Bo Oap, Oar, Oas, Oat i t. d. są trójkątami. **Twierdzenie** Jeżeli jeden bok trójkąta podzielimy na dowolną ilość równych części, i przez wszystkie te punkta podziału wykreślimy proste, równoległe do jednego z dwóch pozostałych boków, np. do boku ap , to trzeci bok Op zostanie przez to na tyleż równych części podzielony. Z punktów przecięcia się równoległych z prostą Op , poprowadziwszy pomiędzy wspomnianymi równoległymi, równoległe do Oa , otrzymamy trójkąty przystające, podług 2go przypadku przystaw. trójk., w których boki, leżące na Op , są sobie równe.

2gi sposób. Kreślimy prostą ab dowolnie długą i odcinamy na niej z a na dół, dowolnie długie, lecz równe między sobą części $ap = pr = rs \dots$. Następnie obieramy zewnątrz prostej dowolny punkt O , łączymy go z punktami podziału $a, p, r, s \dots$ i za pomocą trójkąta kreślimy w dowolnej odległości do ab równoległe cd, gh, kl, nm ; w ten sposób można na każdej z tych równoległych odciąć równe kawałki. Dowód podobny do dowodu §. 27.

§. 30.

Zagadnienie. Fig. 24. Prostą Oa podzielić na dowolną ilość równych części, tu np. na pięć równych części.

Rozwiązanie. Z O kreślę pod dowolnym kątem ku Oa prostą Ot i odcinam na niej z punktu O pięć dowolnie wielkich lecz równych części; połączymy punkt podziału 5 z a prostą $5a$ i nakreśliwszy do niej przez punkta 4, 3, 2, 1 równoległe de, hg, lk, nm , otrzymamy $nO = nk = kg = gc = ca = \frac{1}{5} Oa$.

Dowód. Z n, k, g i t. d. kreślę $n\alpha \parallel Ot \parallel k\beta \parallel g\gamma$ etc., przyczem α na kl, β na gh, γ na cd i t. d. leżą i $n\alpha = k\beta = g\gamma$ i t. d. jako równoległe między równoległymi. Kąt $kna = \sphericalangle gk\beta = \sphericalangle cgy =$ i t. d. $= nOt$ jako kąty naprzemianległe; dalej $\sphericalangle kan = \sphericalangle g\beta k = \sphericalangle nIO =$ etc.; jako kąty, których ramiona są równoległe i t. d.; zatem $\triangle nOl \cong \triangle kna \cong \triangle k\beta g \cong \triangle g\gamma c \cong \dots$, zatem $ac = cg = \dots nO = \frac{1}{5} Oa$.

§. 31.

Zagadnienie. Fig. 24. Nakreślić podziałkę, której główne części są centymetrami.

Rozwiązanie. Na prostej aO wyprowadźmy w równych odległościach, lecz mniejszych niż 1 centymetr, prostopadłe ab, cd, gh i t. d., wzięwszy dokładnie w cyrkiel jeden centymetr, wbijamy jeden koniec tak otwartego cyrkla np. w h , a drugim końcem zataczamy łuk aż do przecięcia równoległej kl w punkcie l , przez h i l kreślimy prostą tO , a części $td = dh = hl = lm = mO$, jeżeli wykreślenie dobrze było przeprowadzone, będą rzeczywistymi centymetrami.

§. 32.

Zagadnienie. Fig. 25. Prostą OB podzielić, bez użycia linealu, na dwie równe części.

Rozwiązanie. Promieniem równym danej linii OB zataczamy z O łuk Bh a nieco większy jak półkoło; tym samym otworem cyrkla odcinamy na tym łuku 3 równe kawałki Bh , hg i ga ; z B zataczamy promieniem Bh łuk 5, 6, a z a tym samym promieniem łuk 3, 4; każdy z tych łuków przecina łuki Bf i ab w punktach n i k , których odległość wzięwszy w cyrkiel zataczamy z a łuk cd , dzielący prostą OB na 2 równe części.

Uzasadnienie wykreślenia fig. 25:

1. W O na prawo wyprowadźmy na OB prostopadłą OE , przedłużmy aB na dół, odetnijmy na przedłużeniu $B\bar{D} = aB$, to $aD = 4 \cdot aO$.
2. Przez a i k nakreślmy prostą, która przedłużona dostatecznie w prawo, przetnie prostopadłą OE w E , a otrzymamy trójkąt prostokątny aOE .
3. Połączmy k z D prostą kD , to w półkolu $akbD$ powstanie trójkąt prostokątny akD , którego kąt prosty leży wierzchołkiem w k .
4. Trójkąt prostokątny akD i trójkąt prostokątny aOE przystają do siebie, bo mają przyprostokątne ak i aO równe, a kąt ostry kaD wspólny, przez to samo także dwa drugie kąty ostre przy D i E są równe. Z tego wynika: przeciwprostokątnia aE = przeciwprostokątni aD .
5. Punkta B i E łączymy prostą BE , ztąd powstanie trójkąt prostokątny OBE , który przystaje do $\triangle aOE$, ponieważ odpowiednie przyprostokątne są sobie równe, a ztąd wynika $BE = aE$, a powstały trójkąt aEB jest równoramienny.
6. Z a jako z punktu środkowego zataczamy trzy koła współśrodkowe, promieniami ak , $2 \cdot ak$, $3 \cdot ak$, te mogą się nazywać kgO (zostało zatoczone) $FfnB$ i M ; koła te przecinają bok aE trójkąta równobocznego aEB w punktach k , F , G .
7. Z k , F , G kreślimy do aB równoległe kn , FJ i GH , które przetną bok BE w punktach n , J i H .
8. Powstaną równoramienne trójkąty EGH , EFJ , $Ek n$ i EaB podobne, a ponieważ bok aE został na cztery równe części podzielony, przeto $GH = \frac{1}{4} aB$, $FJ = \frac{1}{2} aB$, $kn = \frac{3}{4} aB = ap$; jeżeli zaś $ap = \frac{3}{4} aB$, to $Op = pB = \frac{1}{2} OB$, c. b. d. o.

§. 33.

Różne zagadnienia, których rozwiązanie bez i z linijami pomocniczymi wykonujemy. 1. Wynaleźć szesnastą część danej prostej. 2. Daną prostą podzielić na trzy równe części. 3. Daną prostą podzielić na siedem równych części. 4. Wynaleźć $\frac{3}{4}$ części danej prostej. 5. Nakreślić prostą, któraby $\frac{5}{6}$ danej prostej wynosiła. 6. Dana linija jest $\frac{2}{3}$ częścią drugiej linii, wyszukać prawdziwą wielkość tej ostatniej. 7. Nakreślić dwie proste, z którychby pierwsza $\frac{7}{8}$ a druga $\frac{3}{4}$ danej linii wynosiła. 8. Prostą podzielić na 3 części, któreby były w stosunku jak 2 : 3 : 4. 9. Podzielić daną prostą na 2 części, któreby były w tym samym stosunku jak dwie inne dane proste M i N . Obacz sposób Fig. 22.

Uwaga. Staranne i dokładne rozwiązanie poprzednich zadań, ułatwia następujące ćwiczenia graficzne.

Oznaczenie wspólnej miary dwóch prostych.

§. 34.

Określenia. 1. Prosta M zowie się miarą innej prostej A , jeżeli się w niej mieści bez reszty.

Uwaga. To samo powiedzieć można o dwóch kątach, dwóch płaszczyznach, w ogóle o dwóch jednogatunkowych wielkościach.

2. Dwie proste A i B zowią się *współmiernymi* (commensurabel), jeżeli mają pewną miarę wspólną, któraby tak w prostej A jak i w B bez reszty się mieściła.

Dwie proste X i Y są *niewspółmiernymi* (incommensurabel), jeżeli X nie ma takiej miary, któraby zarazem była miarą prostej Y .

Uwaga. Podobnie odnosi się to do kątów, płaszczyzu i wogóle do jednostek wielkości.

3. W nauce geometrycznego kreślenia uważa się dwie dane proste zawsze jako *współmierne*.

§. 35.

Zagadnienie. Fig. 14. Wynaleźć największą wspólną miarę dla dwóch danych i oddzielnych AF i FB .

Rozwiązanie. Linie FB biorę w cyrkiel i przenoszę ją na drugą prostą AF od A tyle razy, ile się zmieści; tu mogła być tylko raz przeniesiona, tak że $AD = FB$, i pozostała reszta DF . Resztę tę przenoszę od F na FB tyle razy, ile razy można; tu można było raz tylko przenieść, tak że $F, 13 =$ poprzedniej reszcie DF . Bierzymy więc znowu resztę $B, 13$ w cyrkiel i przenosimy ją od punktu D na poprzednią resztę DF znowu tyle razy, ile razy tylko zmieści się; tu zaś reszta $B, 13$ mieści się w DF dokładnie cztery razy tj. bez reszty. Przeto $B, 13$ jest największą wspólną miarą, bo w prostej AF mieści się dziewięć razy a w prostej FB pięć razy. W ten sposób można oznaczyć największą wspólną miarę dla dwóch prostych.

Oznaczenie stosunku dwóch prostych.

§. 36.

Określenie. Stosunek dwóch prostych A i B wynajdujemy, badając, ile razy jedna linia mieści się w drugiej. Jeżeli więc w A mieści się miara M np. m razy a w tej drugiej prostej B ta sama miara M mieści się n razy, to stosunek tych prostych jest: $m.M : n.M$ czyli $\frac{m.M}{n.M} = \frac{m}{n} = m : n$ z tego wynikają:

Określenia. 1. Stosunek więc dwóch prostych równa się ilorazowi z liczb wymiarowych, które otrzymujemy, gdy obie proste zmierzmy tą samą miarą.

2. Aby wyrazić, że stosunek dwóch prostych A i B uważamy, używamy formy ilorazu $A:B$; A zowie się poprzednikiem, a B następnikiem stosunku. Stosunek dwóch prostych wymierych, można zawsze dwoma całymi liczbami dokładnie wyrazić:

W fig. 14 jest przeto $AF:FB = 9:5$.

Proporcjonalność prostych.

§. 37.

Określenie. Połączenie dwóch równych stosunków znakiem równości zowie się *proporcją geometryczną*.

§. 38.

Zagadnienie. Figury 98 i 99. Dane są proste $AB, A'E'$ i AC , wynaleźć graficznie czwarty wyraz x w proporcji $AB:A'E' = AC:x$.

Rozwiązanie. 1 sposób. Kreślimy dowolny kąt BAC , ramię AB czynimy równe poprzednikowi pierwszego stosunku, a ramię AC równe poprzednikowi

drugiego stosunku, następnie $AE = A'E'$ tj. równe następnikowi pierwszego stosunku; końcowe punkta B i C łączymy prostą BC i z punktu podziału E kreślimy do ostatniej równoległą ED , otrzymamy AD , która jest żądanym czwartym wyrazem proporcji; mianowicie jest $AB:AE = AC:AD$ lub $AB:A'E' = AC:AD$, zatem $x = AD$.

2 sposób. $AB > A'E'$. Dla prostych AB i $A'E'$ oznaczymy wspólną miarę według §. 35, następnie stosunek tych prostych podług §. 36. AB jest poprzednikiem, $A'E'$ następnikiem pierwszego stosunku; daną prostą AC , to jest poprzednik drugiego stosunku, dzielimy z pomocą lub bez pomocy linii pomocniczych na tyle równych części, ile poprzednik pierwszego stosunku miar w sobie zawiera, zaś następnik drugiego stosunku zmniejszamy o tyle owych miar, o ile mniejszy jest następnik względem poprzednika pierwszego stosunku.

Kreślenie kątów.

§. 39.

Określenia. 1. Przestrzeń zawartą między dwoma prostymi przecinającymi się, zowiemy kątem.

2. Dwa kąty są równe, gdy kierunki ich ramion są od siebie jednakowo oddalone.

§. 40.

Zagadnienie. Fig. 26. Odrysować dany kąt ostry α tj. nakreślić drugi kąt, któryby był równy danemu.

Rozwiązanie. Kreślimy prostą $O'b'$, dowolnym otworem cyrkla zataczamy z O łuk 1, 2, przecinający ramiona kąta w a i b . Tym samym otworem cyrkla Ob przecinamy z obranego wierzchołka O' prostą $O'b'$ łukiem 1'2' w b' , odmierzamy łuk ab i przenosimy go z b' na łuk 1'2', a wtedy przypadnie punkt a na a' . Punkt a' łączymy z O' prostą, a wtedy $\alpha' = \alpha$. Im większym promieniem zatoczymy łuk, tém dokładniej wypadnie wykreślenie.

Wynika z przystawiania trójkątów abO i $a'b'O'$ podług IIIgo twierdz. o przyst. trójkąt.

§. 41.

Zagadnienie. Fig. 27. Odrysować kąt rozwarty AOB tj. wykreślić kąt zupełnie równy danemu.

Rozwiązanie. Ramię BO danego kąta przedłużamy do C , a otrzymamy kąt spełniający β ; kreślimy zamiast kąta AOB kąt β ; a to w następujący sposób: kreślimy prostą $B'O'$ i przedłużamy ją dowolnie w lewo. Nóżkę cyrkla wstawiamy w wierzchołek O danego kąta i zataczamy dowolnym promieniem łuk 1,2, następnie wstawiamy nożkę cyrkla w O' i tym samym promieniem zataczamy łuk 1'2'. Mierzmy następnie 1,2 i miarę tego łuku przenosimy z 2' do 1', w końcu łączymy 1' z O' prostą $O'1'$, a kąt $A'O'B'$ będzie $= AOB$.

$\angle \beta = \angle \beta'$ wynika z przystawiania trójkątów $1O2$, $1'O'2'$, podług 3go twierdz. o przyst. trójkąt. Równe kąty mają równe spełnienia (Supplemente).

Wykreślenie. Fig. 27 a. Jeżeli z punktu O obranego zewnątrz obydwóch ramion kąta ABC , spuścimy prostopadłe na te ramiona, to kąt, jaki te prostopadłe utworzą, jest równy kątowi danemu tj. $DOM = ABC$.

Uzasadnienie. W obóch trójkątach DOM i MBE kąty OMD i BME są równe, jako wierzchołkiem przeciwległe, także $ODM = OEB$, przeto i trzecie kąty MOD i MBE są równe.

Fig. 27 a.

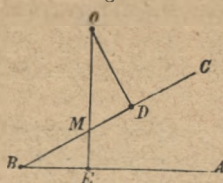
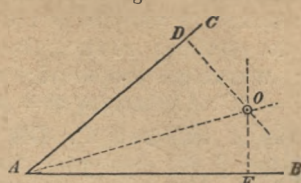


Fig. 27 b.



§. 43.

Zagadnienie. Fig. 27 a. Do kąta ABC nakreślić kąt dopełniający.

Rozwiązanie. W jakimkolwiek punkcie jednego ramienia wyprowadzamy (do niego) prostopadłą pionową np. $EO \perp AB$, otrzymamy $\angle BME$ będący dopełnieniem kąta ABC .

Dodatek. Chcąc wykreslić dopełnienie kąta danego, wystawiamy u wierzchołka na jednym ramieniu tego kąta danego prostopadłą, a ta zawierać będzie z drugim ramieniem żądane dopełnienie.

§. 44.

Wykreślenie. Fig. 27 b. Jeżeli z punktu O , obranego wewnątrz obu ramion kąta CAB spuścimy prostopadłe na te ramiona, to $\angle EOD$ jaki te prostopadłe pionowe tworzą, jest spełnieniem danego kąta CAB do dwóch prostych.

Uzasadnienie. $EAD + EOD = 2P = 180^\circ$. Poprowadźmy AO to $EOA + EAO = P = 90^\circ$ i $OAD + AOD = P = 90^\circ$, zatem powstanie przez dodanie $EOA + AOD + EAO + OAD = 2P$, zatem $EAD + EOD = 2P = 180^\circ$.

Dzielenie kątów.

§. 45.

Określenia. Kąt jest wtedy połową całego kąta, jeżeli po obroceniu go około linii poprowadzonej przez wierzchołek i płaszczyznę kątową, zawartą między ramionami całego kąta, oba ramiona całego kąta padną na siebie tj. przykryją się.

Jeżeli więc prosta poprowadzona przez wierzchołek i płaszczyznę kątową, całego kąta, dzieli takowy na dwie części, czyniące zadość powyższemu warunkowi, to jest ona *osią symetryczną* (Symmetrieaxe) czyli dwójścinną całego kąta, rozdzielającą symetrycznie obie połowy tegoż kąta.

Oba ramiona kąta przepołowionego dwusieczną zowiemy *ramionami odpowiedniami* (einander zugeordnete Schenkel).

Punkta dwóch ramion są odpowiednie, gdy są jednako od wierzchołka kąta oddalone: a jeżeli jedno z ramion odpowiednich obrócone około dwusiecznej przykrywa drugie ramię, natenczas i punkta te padają na siebie.

Odpowiednie punkta otrzymamy, gdy z wierzchołka O Fig. 28. promieniami $Oa, Oc, \dots$ itd. zatoczmy łuki; natenczas otrzymane punkta a i b, c i d są względem siebie odpowiednie.

Wszystkie łuki, zatoczone z O przecinają dwusieczną OP , a części leżące po jej jednej stronie, są względem leżących po stronie przeciwnej odpowiedniami i im równymi; wynika to z przykrywania się tych części, przez przystawanie połówek kąta.

Proste łączące dwa odpowiednie punkta, zowiemy odpowiedniami promieniami (Zuordnungsstrahlen) więc cd i ab są odpowiedniami promieniami.

Wszystkie te linie w Fig. 28, razem wzięte zowiemy *układem jednoosiowym* (einaxiges System) ponieważ jedna tylko oś symetryczna znajduje się.

§. 46.

Zagadnienie. Fig. 28. Kąt AOB przepołowić.

Rozwiązanie. 1 sposób. Z O dowolnym promieniem Oa zataczamy łuk ab , punkta przecięcia a i b połączmy prostą ab i tę podzielmy w f na dwie równe części; następnie nakreślmy OP , to $\sphericalangle AOP = \sphericalangle BOP = \frac{AOB}{2}$. Ponieważ trzy punkta f, a, O tudzież trzy inne f, b, O są tak stale połączone linijami prostymi $fa = fb$, $ao = bo$, $fo = fo$, że obróciwszy płaszczyznę kątową aOf około OP , takowa padnie na bOf i przykryje ją zupełnie; a więc $\sphericalangle AOP = \sphericalangle POB = \sphericalangle \frac{AOB}{2}$.

Drugi sposób dowodzenia. Oab jest trójkątem równoramiennym, wiemy zaś, że prosta łącząca wierzchołek trójkąta równoramiennego ze środkiem podstawy, połowi kąt przy wierzchołku i jest prostopadłą do podstawy. $Oa = Ob$, $af = bf$, $Of = Of$, przeto $\triangle Oaf \cong \triangle Obf$ podług 3go twierdzenia o przyst. trójkąt., zatem kąty aOf i bOf jako kąty jednaki są równe.

Wniosek. Wszystkie promienie odpowiednie układu jednoosiowego są do dwusiecznej prostopadłe, a względem siebie równoległe i przez dwusieczną przepołowione.

Przy połowieniu kąta n. p. $\sphericalangle AOB$ jest *wszystko jedno*, czy łuk ab lub podpasująca go cięciwę przepołowimy; inaczej zaś jest przy dzieleniu kąta na n części.

Zagadnienie. Fig. 28. Podzielić kąt AOB na 2 równe części.

Rozwiązanie. 2 sposób. Z wierzchołka O danego kąta AOB zatoczmy dowolnym promieniem łuk ab ; z tego samego punktu promieniem mniejszym niż poprzedni zatoczmy łuk cd . Połączmy c z b i a z d prostymi, a te przeczną się w g ; połączymy wreszcie O z g prostą Og i przedłużywszy ją, otrzymamy kąt $AOP = POB = \frac{AOB}{2}$.

Wyobraźmy sobie punkta a i b , tudzież c i d połączone prostymi, których f i f_1 są środkowymi punktami, następnie wyobraźmy sobie prostą PO przechodzącą przez f, f_1 i O , to możemy twierdzić, że ta linia jest: 1) dwusieczną tego jednoosiowego układu, zatem rozdziela obie połowy AOP i BOP od siebie; a 2) że punkt g leży rzeczywiście na dwusiecznej.

Podług wykreślenia jest $fo = fO$, $fa = fb$, $ao = bO$. Każde trzy punkta jak: f, a, O , tudzież f, b, O są złęczone temi prostymi. Obróciwszy trójkąt faO około prostej PO tak, iżby padł na płaszczyznę POB , spostrzeżemy, że af padnie na bok fb , cf_1 na bok f_1d , co na bok dO , Oa na bok Ob ; to wynika ztąd, że odpowiednie proste, łączące te punkta są równe; zatem kąty aOf i bOf zupełnie się przykrywają, więc OP jest osią symetryczną rozdzielającą równe kąty, będące połowami całego kąta AOB .

OP jest także osią symetryczną trapezu symetrycznego $acdb$. Obróćmy ten czworobok wraz z przekątnymi około OP , to po obrocie przykryje takowy sam siebie, tj. powróci do swego pierwotnego położenia; a ponieważ końcowe punkta przekątni są odpowiednie, przeto i przekątnie przykryją się wzajemnie a więc są sobie równe.

Punkt g należący do obu przekątni, należy zarazem do osi symetrycznej, bo obracając trapez symetryczny około osi symetrycznej wraz z jedną przekątnią, np. ad , mającą z osią symetryczną punkt wspólny, widzimy, że g podczas obrotu nie zmienia położenia, gdyż wszystkie punkta prostej PO są podczas takiego obrotu stałymi punktami. Jeżeli więc ad przyjdzie do bc , to przejdzie przez punkt prostej PO , a ten jest stałym obrotowym punktem g osi, leży na przecięciu się przekątni trapezu symetrycznego i osi symetrycznej. Z tego wynika: że część przekątni $ag =$ części przekątni bg , $gc = gd$; powyżej więc przytoczony sposób połowienia, za pomocą łuków współśrodkowych i przekątni jest już usprawiedliwiony.

Inny dowód. $\triangle Obc \cong \triangle Oad$ podług 2go twierdz. o przyst. trójkąt., zatem $\sphericalangle Ocb = \sphericalangle Oda$, $\triangle Ogc \cong \triangle Ogd$ podług 4go twierdz. o przyst. trójkąt. 1. przypadek, ponieważ $Oc = Od$, $Og = Og$ a w obóch trójkątach ten sam kąt leży naprzeciwko boku większego Og , przeto równoleżące kąty AOP i BOP są równe a każdy z nich jest połową AOB .

Dodatek. Wyobraźmy sobie oba ramiona przedłużone za O , na przedłużeniu BO odetnijmy odległość $Od_2 = Oc_2$ na przedłużeniu AO , poprowadźmy przez punkta a i d_2 , tudzież przez punkta b i c_2 proste, to te zbiegną się w jednym punkcie f_2 , który leży w kierunku osi symetrycznej i może służyć jako sprawdzenie linii połowiącej kąt.

Zastosowanie. Prosta PO przedłużyć w polu, jeżeli w płaszczyźnie kąta $d_2 Oc_2$ znajduje się nieprzebyta przeszkoda.

Wytyczmy równe kąty symetryczne AOP i BOP , przedłużmy ich ramiona za O , odetnijmy $Od_2 = Oc_2$, $Ob = Oa$; wytyczmy proste ad_2 i bc_2 i poszukajmy punktu f_2 , w którym się one przecinają. ten punkt należy do danego kierunku PO t. j. że leży w przedłużeniu PO .

3ci sposób. **Fig. 29.** Dowolnym otworem cyrkla zatoczmy z punktu O łuk cf , przecinający ramiona w c i f ; z c i f zatoczmy temi samymi promieniami łuki 1, 2 i 3, 4, a powstały punkt przecięcia r połączmy z O prostą Ors , która oddziela kąt BOS od równego mu $\sphericalangle SOA = \frac{BOA}{2}$.

Wyobraźmy sobie, że punkta c , f i r są połączone prostymi, to otrzymamy $Oc = Of$, $cr = fr$, $Or = Or$; oba trójkąty, mianowicie Ocr i Ofr mogą się nakryć, zatem OS jest osią symetryczną, a $\sphericalangle BOS = \sphericalangle SOA = \sphericalangle \frac{BOA}{2}$.

2gi dowód. $\triangle Ocr \cong \triangle Ofr$ podług 3go twierdz. o przyst. trójkąt., zatem jednakowe kąty BOS i AOS są równe, a każdy z nich jest połową kąta AOB .

4ty sposób. Ponieważ każdy punkt osi symetrycznej jest równo oddalony od ramion kąta. przeto możemy skutecznie wykreślić w następujący sposób:

Z O dowolnym promieniem zatoczmy łuk cf , z punktów c i f wyprowadźmy prostopadłe do ramion kąta, te się przetną na płaszczyźnie kąta w punkcie p , a ten jest punktem osi symetrycznej Op , ztąd wynika $\sphericalangle cOp = \sphericalangle fOp = \sphericalangle \frac{AOB}{2}$.

Gdyż każdy trójkąt prostokątny jest przez przeciwprostokątną i przyprostokątną dokładnie oznaczony; $Op = Op$ (jako przeciwprostokątna), $Oc = Of$ (jako przyprostokątna), przeto oba trójkąty Ocp i Ofp nakrywają się, jeśli np. $\triangle Ocp$ około OS tak długo obracać będziemy, dopóki nie padnie na $\triangle Ofp$, natenczas kąty AOS i BOS przykryją się, a więc są sobie równe, a każdy z nich jest połową $\sphericalangle AOB$.

§. 47.

Zagadnienie. Fig. 30. Wynałeżć połowę, czwartą, ósmą i szesnastą część danego kąta AOB .

Rozwiązanie. Fig. 30. W dowolnym oddaleniu od AO , nakreślmy do niej równoległą Nk , która przetnie OB w c . Z c promieniem cO zataczam łuk Od , który przetnie Nk w d ; następnie wykreślmy Od , to $\sphericalangle BOd = dOA = \frac{AOB}{2}$. Uczyńmy $df = dO$ i wykreślmy Of , to kąt $dOf = fOA = \frac{AOB}{4}$. Ka-

walek fg równa się fO ; połączmy g z O , to $\sphericalangle fOg = gOA = \frac{AOB}{8}$. W końcu uczynmy $gk = gO$, to otrzymamy kąt $gOk = kOA$ równy szesnastej części kąta AOB , gdyż kąt $cOd = cdO$ jako w trójkącie równoramiennym, zaś $cdO = AOd$ jako kąty naprzemianległe; a więc $\sphericalangle cOd = AOd = \frac{AOB}{2}$ i t. d.

§. 48.

Zagadnienie. Fig. 31. Kąt AOD podzielić na trzy równe części.

Rozwiązanie. Z wierzchołka O dowolnym otworem cyrkla zatoczmy łuk nm , który przetnie ramiona w n i m ; następnie podzielmy łuk nm na trzy

równe części 0,1, 1,2, 2,3, a punkta podziału połączmy z O linijami prostymi OB , OC , a otrzymamy kąty $AOB = BOC = COD = \frac{AOD}{3}$.

§. 49.

Zagadnienie. Fig. 25. Półkoło podzielić na trzy równe części.

Rozwiązanie. Z O zatoczmy półkoło i tym samym otworem cyrkla z a i B łukami 3,4 i 5,6 przetnijmy go w punktach g i h ; poprowadźmy przez O i g , następnie przez O i h promienie, to kąt $aOg = \sphericalangle gOh = \sphericalangle hOB = \sphericalangle \frac{aOB}{3}$; gdyż trójkąty aOg , gOh i hOb są równoboczne, trzy wierzchołki kątów wymienionych trójkątów równobocznych leżą w O .

Uwaga. Zwykle dzieli się kąt na 3 równe części za pomocą cyrkla przez próbowanie, nie ma bowiem żadnego sposobu dzielenia, któreby linijami pomocniczymi wykonać się dało.

§. 50.

Zagadnienie. Fig. 32. Kąt prosty bOa podzielić na dziesięć równych części.

Rozwiązanie. Promieniem Oa zataczam łuk (tu ćwierć koła), przecinający oba ramiona kąta prostego i ten dzielę albo najpierw na pięć równych części, a potem każdą piątą część na połowę, lub też dzielę całe ćwierćkoło na dwie połowy, a każdą z nich na pięć równych części. Na tem polega

Kreślenie przenośnika (Transporteur).

§. 51.

Fig. 32 przedstawia ćwierć koła podzieloną, służącą do mierzenia i przenoszenia różnych kątów. Dla ćwiczenia nakreślmy zupełny przenośnik z czterema ćwiartkami, t. j. nakreślmy w kole dwie średnice prostopadłe do siebie, przez co nie tylko kąty około środka podzielone zostaną na cztery kąty równe, zatem na cztery kąty proste, lecz nadto koło jako też i okrąg jego zostaną podzielone na cztery równe części. Każdy kąt prosty obejmie łuk, będący czwartą częścią okręgu. Podzieliwszy więc każdy z tych kątów prostych na 2, 3, 4 i t. d. równych części i przedłużywszy linie dzielące, to te podzielią odpowiednie łuki na 2, 3, 4 i t. d. równych części. W ogóle łuk zostanie w tym samym stosunku podzielony, w jakim jest podzielony odpowiedni mu kąt środkowy. Można więc z wielkości kąta sądzić o wielkości odpowiadającego mu łuku i odwrotnie z wielkości łuku o wielkości kąta jemu odpowiadającego. Że wielkość koła nie ma tu żadnego wpływu, łatwo widzieć można, bo stosunek między kątem a należącym do niego łukiem nie zmienia się, chociażby koło było małe lub wielkie. Znając przeto łuk kąta, t. j. wiedząc jaką częśćią jest ten całego koła, znamy zarazem wielkość samego kąta. W tym celu dzielimy okrąg koła na 360 równych części czyli stopni; gdy połączmy punkta podziału stopni łukowych ze środkiem koła, to te proste podzielią kąty naokoło środka na 360 równych części, czyli stopni kątowych, a mianowicie: na oznaczony kąt wypada tyle stopni kątowych, ile jego odpowiedni łuk stopni łukowych wynosi.

Liczba podająca ilość stopni łuku, oznacza zarazem i liczbę stopni, zawartych w odpowiednim kącie. Jeżeli więc powiemy: miarą kąta jest łuk zawarty pomiędzy jego ramionami, to znaczy: że liczba stopni łukowych jest zawsze równa liczbie stopni kątowych. Tak, jak stopień kątowy jest podzie-

lony na 60 równych części, tak samo stopień łukowy dzieli się na 60 równych części, które zowiemy minutami; z których znowu każdą dzieli się na 60 sekund. Takie jednak dzielenie można tylko na bardzo wielkich płaszczyznach rysunkowych wykonać. Stopień łukowy oznaczamy ($^{\circ}$), minuty kreską ($'$), a sekundy dwoma kreskami ($''$). Ponieważ okrąg koła składa się z 360° , a kąt prosty obejmuje czwartą część okręgu, przeto łuk odpowiadający P wynosi 90 stopni łukowych, więc na P przypada 90 stopni kątowych, czyli krótko 90° , na $\frac{P}{2}$, 45° .

Dołączona figura przedstawia jak należy takie ćwiartki koła rysować na papierze. W celu łatwiejszego kreślenia promieni dzielących koło na stopnie, minuty i sekundy, wbija się w punkcie O igielkę i do tej przykłada się lineal; aby zaś promienie podziału przy wyciąganiu tuszem nie zalewały się, zatacza się z O dowolnym promieniem Ob ćwierćkoła ab . Z pomocą przerośnika można kąt danej rozwartości nakreślić. Jeżeli mamy nakreślić kąt, którego rozwartość stopniami jest podana, to kreślimy najpierw ramie dowolne, obieramy na niem punkt i ten uważamy jako wierzchołek danego kąta; następnie przykładamy przerośnik tak, aby szczerlinie przylegał swym punktem środkowym do obranego punktu, a graniczącym promieniem do ramienia; na podzielonem półkolu odczytujemy oznaczoną liczbę stopni i wynaleziony tym sposobem punkt półkola zaznaczamy, a połączymy go z obranym wierzchołkiem kąta, otrzymujemy drugie ramieżądanego kąta.

Uwaga. W najdawniejszych czasach dzielono rok na 360 dni i drogę słońca na 360 równych części, prawdopodobnie dlatego i koło na 360 części jest dzielone. We Francyi około r. 1797 zaprowadzili tamtejsi matematycy system dziesiętny, według którego dzielą ćwierćkoła na 100 stopni, czyli całe koło na 400 stopni. Podział ten bywa jednak we Francyi rzadko używany. Jeden stopień podług tego systemu ma 100 minut, jedna minuta 100 sekund i t. d. Podział ten zowie się setnym.

Cztery pojedyncze działania kątami.

Dodawanie.

§. 52.

Zagadnienie. Fig. 33. Dodać trzy kąty α , β , γ , których wierzchołki leżą w O .

Rozwiązanie. Fig. 33 B. Z trzech punktów O zatoczmy jednym i tym samym, dowolnie obranym promieniem łuki fg , cd i 1, 2; obierzmy prostą $O'C$ a O' przyjmijmy za wierzchołek sumy kątów. Przyjętym promieniem ($g' = dO = aO$) zatoczmy z O' łuk ks i przenieśmy na niego łuk ab od k do l , łuk cd od l do r , a łuk fg od r do s ($ab = kl$, $cd = lr$, $fg = rs$). Przeto $sO'C$ jest żadaną sumą.

Odejmowanie.

§. 53.

Zagadnienie. Fig. 33 B. Od kąta $CO's$ odjąć kąt $(\alpha + \beta)$ figury 33.

Rozwiązanie. Z wierzchołków O , O , O' danych kątów zatoczmy dowolnym otworem cyrkla łuki tak, aby przecinały ramiona tych kątów, następnie odmierzymy łuk $sr =$ łuk. fg , a łuk $rl =$ łuk. cd i poprowadźmy promienie, — to $\sphericalangle CO's = \sphericalangle (sO'r + rO'l) = \sphericalangle CO's - \sphericalangle (\alpha + \beta) = \sphericalangle CO'l$, a ten kąt jest różnicą obu kątów $CO's$ i $IO's$.

Mnożenie.

§. 54.

Zagadnienie. Fig. 32 i 33. Oznaczyć iloczyn obu czynników, z których jeden jest kątem $\angle O\gamma = \alpha = 18^\circ$, drugi zaś jest liczbą $4 + \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie. Uczyńmy $\angle oO, 18 = \angle \alpha$; $\angle 18, O, 36 = \angle \alpha$; $\angle 36, O, 54 = \alpha$, $\angle 54, O, 72 = \angle \alpha$, a w końcu $\angle 72, O, 81 = \angle \frac{\alpha}{2}$, to iloczyn równa się 81° .

§. 55.

Zagadnienie. Fig. 31 i 33. Nakreślić $(1 + \frac{1}{2}) \cdot \angle \beta$.

Rozwiązanie. Wykreślmy kąt $\angle AOC$ równy kątowi β , podzielmy $\angle \beta$ na 2 równe części i odetnijmy $\angle COD = \frac{\beta}{2}$, to otrzymamy $\angle AOD$ jako iloczyn z powyższych czynników.

Dzielenie.

§. 56.

Zagadnienie. Kąt o $127 \cdot 5^\circ$ podzielić na 7 równych części, a iloraz graficznie za pomocą przenośnika w przybliżeniu przedstawić.

Rozwiązanie. $127 \cdot 5^\circ : 7 = 18 \cdot 2142^\circ = 18^\circ - 12' - 51''$.

Uwagi. 1. Inne przykłady znajdują się pod tytułem „dzielenie kątów”.

2. Szukanie wspólnej miary dwóch kątów i graficzne oznaczenie ich stosunku, odbywa się podobnie, jak przy prostych.

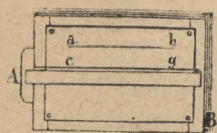
Linije równoległe.

§. 57.

Określenie. Dwie linije proste, które leżąc na tej samej płaszczyźnie nie przecinają się, chociażby je z obu stron nawet do nieskończoności przedłużono, zowią się równoległymi.

§. 58.

Fig. 35 a.



Zagadnienie. Fig. 35 a. Za pomocą linealu nakreślić proste równoległe, ale rozmaicie od siebie oddalone.

Rozwiązanie. Do stale spoczywającej rysownicy B przykładamy lineal A, dając się przesuwac i po każdym przesunięciu linealu A kreślę liniję, a otrzymam równoległe $ab, cd, \dots$

§. 59.

Zagadnienie. Fig. 34. Dane są poziome $ad, 1f, 2g, 3, \dots$ równoległe lecz różnie oddalone; nakreślić w tych samych odstępach równoległe pionowe, któreby się z pierwszemi tylko stykały, a nie przechodziły za punkta przecięcia.

Rozwiązanie. Wykonujemy to linealem i trójkątem o 45° . Najpierw przykładamy bc do ad i przesuwamy lineal LM do krawędzi trójkąta ab ; następnie kładziemy trójkąt w położenie abc przedstawione na figurze i prze-

cinamy równoległe poziome linią kątową ac . W końcu kreślimy z a , 1, 2, 3, 4, 5.... żądane pionowe równoległe.

Uwaga. Postępowanie to jest w praktyce bardzo używane.

§. 60.

Zagadnienie. Fig. 36. W danej odległości nakreślić do AB równoległą TT' . Odległość ta niechaj się równa np. 4 cm.

Rozwiązanie. Na danej prostej AB obierzmy punkta a i b nieleżące za nadto blisko siebie i równymi promieniami, wynoszącymi po 4 cm. zatoczmy z nich łuki 1, 2 i 3, 4, do których wreszcie nakreślimy styczną TT' . Punkta równoległych mają jednakie odstępny. §§. 23, 24.

§. 61.

Zagadnienie. Fig. 37. Nakreślić do MN równoległe dowolnie od siebie oddalone.

Rozwiązanie. Z dowolnego punktu O prostej MN zatoczmy półkole, a z punktów przecięć M i N odetnijmy na tém półkolu dowolnie wielkie kawałki $M1 = N2$; przez 1 i 2 nakreślimy prostą ab , to ab jest $\parallel$ do MN . Innym dowolnym otworem cyrkla, równym np. $M3$, przetnijmy półkole w 3, a z N tym samym otworem cyrkla w 4; przez 3 i 4 nakreślimy prostą cd , to cd jest $\parallel$ do MN .

Uzasadnienie. Iszy sposób. Połączmy np. O z 3 i 4 prostemi, to tu $\sphericalangle MO3 = \sphericalangle NO4$, $MO = O3 = NO = O4$; $\triangle MO3 \cong \triangle NO4$, zatem wysokości spuszczone na MN z 3 i 4 są sobie równe, a więc proste MN i cd są jednakowo oddalone, czyli że $cd \parallel MN$ i t. d.

2gi sposób. Nakreślimy cięciwę $N3$, to kąt $MN3 = \sphericalangle N3,4$ jako kąty okręgowe obejmujące równe łuki $M3$ i $N4$, a że nadto oba te kąty, jako kąty naprzemianległe są równe, przeto linie przecięte MN i cd są równoległe.

§. 62.

Zagadnienie. Fig. 38. Nakreślić do AB równoległą CD .

Rozwiązanie. Na AB obierzmy punkt K i zatoczmy z niego niezbyt małym otworem cyrkla łuk na , który przetnie prostą AB w n . Z n tym samym promieniem zatoczmy łuk KP . Z K i n tym samym promieniem przetnijmy te łuki w P i a ; połączymy teraz P i a prostą CD , otrzymamy $CD \parallel$ do AB .

Wyobraźmy sobie punkta przecięcia połączone prostemi, to $\sphericalangle nKa = \sphericalangle KnP$, trójkąty nKa i Knp są przystające (podług 2go przypadku przystawiania trójkątów), przeto prostopadłe spuszczone na AB z P i a są równe, a więc $CD \parallel AB$. §§. 23 i 24.

§. 63.

Zagadnienie. Fig. 39. Przez punkt dany nakreślić równoległą do prostej danej. AB jest dana, a mam przez O nakreślić do niej równoległą CD .

Rozwiązanie. Na AB obierzmy dowolny punkt b i z tego punktu promieniem bO zatoczmy łuk Oc ; tym samym otworem cyrkla zatoczmy z O łuk ba , weźmy cO i przeniesmy tę miarę z b do a , nareszcie nakreślimy przez a i O prostą CD , to CD jest $\parallel$ do AB .

Bo oba równoramienne trójkąty abO i bOc są przystające podług 2go przypadku przystawiania trójkątów, a jednakże kąty aOb i cbO , jako kąty naprzemianległe, są sobie równe, zatem CD jest $\parallel$ do AB .

§. 64.

Zagadnienie. Fig. 40. Przez punkt m nakreślić za pomocą kątów naprzemianległych równych prostą AB równoległą do CD .

Rozwiązanie. Na CD obierzmy dowolny punkt n i połączmy go z m prostą mn , a przez to otrzymamy kąt α . Z n zatoczmy promieniem równym lub mniejszym od mn łuk hk . Tym samym promieniem zatoczmy z danego punktu m łuk fg , odmierzymy hk i wielkość tego łuku przeniesmy z g do f , czyli odetnijmy $fg = hk$. Przez punkta f i m wykreślmy prostą AB , a ta jest równoległą do CD .

Uzasadnienie. Przedłużmy nm za AB ; to powstanie: $\sphericalangle EMA$ równy $\sphericalangle \alpha$ jako kąty jednostronne odpowiadające i równy kątowi α' jako kątowi wierzchołkiem przeciwnym.

Założenie. $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha'$. **Twierdzenie.** $AB \parallel CD$.

Dowód. Z założenia $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha'$, a że $\sphericalangle EMA = \sphericalangle \alpha'$, jako kąty wierzchołkiem przeciwnie, zatem $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle EMA$ jako jednostronne odpowiadające, czyli ztąd wynika, że $AB \parallel CD$.

§. 65.

Zagadnienie. Fig. 41. Przez dany punkt r nakreślić KL równoległą do FG , za pomocą równych kątów jednostronnych odpowiadających.

Rozwiązanie. Na FG obierzmy dowolny punkt n i nakreślmy przez niego i punkt r prostą ns . Z n promieniem mniejszym od nr lub równym nr zatoczmy łuk, który przetnie FG w w . Następnie z r zatoczmy tym samym promieniem łuk vs , odmierzymy rw i przeniesmy wielkość tego łuku do vs , tak aby łuk vs równy był łukowi wr . Przez v i r nakreślmy prostą KL , to β' jest $= \beta$ jako kąty jednostronne odpowiadające, a $KL \parallel$ do FG .

Uzasadnienie. Wyobraźmy sobie linię DrE przechodzącą przez punkt D , leżącej na płaszczyźnie kąta Krn .

Założenie. $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \beta'$. **Twierdzenie.** $KL \parallel FG$.

Dowód pośredni. Przypuścimy, że nie KL lecz DrE jest równoległa do FG , natenczas $\sphericalangle Dr$ musiałyby być równe kątowi β (bo dwie równoległe przecięte trzecią sieczną tworzą kąty jednostronne odpowiadające równe); lecz według założenia jest $\sphericalangle \beta' = \sphericalangle \beta$, przeto $\sphericalangle Dr$ musiałyby być $= \sphericalangle Krs$ lub β' , to jest jednak niemożliwe według twierdzenia, że każda wielkość w przestrzeni jest równą sobie i podobną. Za §. 64.

§. 66.

Zagadnienie. Fig. 42. Za pomocą konstrukcyi kreślenia kątów, nakreślić przez punkt 3 równoległą do FK .

Rozwiązanie. Na FK obierzmy dowolny punkt 1, im dalej za 3 w lewo tym lepiej, i połączmy go z danym punktem 3, prostą 1, 3, którą przedłużmy na dół. Na przedłużeniu obierzmy dowolny punkt O i zatoczmy z niego promieniem 10, 30 łuki ab , cd , to ab przetnie prostą FK w 2, połączmy 2 z O prostą 20, otrzymamy w ten sposób punkt przecięcia 4, przez niego i punkt 3 nakreślmy prostą LN a ta jest $\parallel$ do FK .

Dowody. Oba trójkąty równoramienne mają kąty przy O równe, przeto i kąty u podstaw są równe. $\sphericalangle O3,4 = \sphericalangle O1,2$ jako jednostr. odpowiadające, zatem $FK \parallel LN$. Albo:

Wyobraźmy sobie w trójkącie równoramiennym 102 kąt przy O przepołowiony, to dwusieczna jest do nierównego boku 1,2 tego trójkąta w p prostopadłą; bo $\triangle 1Op \cong \triangle 2Op$, podług 2go przyp. przyst. trójk., zatem $\sphericalangle 1pO = \sphericalangle 2pO$ a jako kąt przyległy $= P$. Ponieważ ta prostopadła jest także dwusieczną trójkąta 304, zatem jest do boku 3,4 prostopadłą, więc jest prostopadłą do prostej 1,2 i 3,4 a ponieważ z temi prostymi tworzy kąty jednostronne odpowiadające równe, przeto $FK \parallel LN$.

Bo $O1 = O2$, zatem $\triangle 2O1$ jest równoramienny, $O3 = O4$ zatem $\triangle 3O4$ jest równoramienny; $\sphericalangle O:O1 = \sphericalangle O:2O \dots (I)$, $\sphericalangle$ przy O jest w obóch trójkątach równy, zatem $\triangle 3O4 \sim \triangle 1O2$; przeto podług (I) bok 3,4 $\parallel$ 1,2 czyli LN przechodzi przez punkt 3 i jest do FK równoległą.

Wynalezienie kątów przy liniach zbiegających się, których punkt przecięcia na płaszczyźnie rysunkowej nie jest dany.

§. 67.

Zagadnienie. Fig. 43. Prosta ab zbiega się z prostą cd , oznaczyć wielkość kąta, jaki te dwie proste tworzą będąc przedłużone.

Rozwiązanie. W równych odstępach od ab i cd nakreślmy fg równoległą do ab , a Kh równoległą do cd , to te przetną się w O . Szukany kąt jest $\angle OK$. Bo dwa kąty, których ramiona są równoległe i w tym samym kierunku biegną, są sobie równe.

Dodatek. Podzielmy ten kąt na 2 równe części i nakreślmy dwusieczną PO , a ta dostatecznie przedłużona, spotkałaby punkt przecięcia danych prostych.

Bo wierzchołek O jest od danych, zbiegających się prostych równooddalony, i należy do dwusiecznej OP wynalezionego kąta $\angle OK$. Dwusieczna jest miejscem geometrycznym wszystkich punktów równooddalonych od ramion wynalezionego kąta. Przedłużwszy każde dwie odległości punktu na OP , to te są także dla równych odległości każdego dwóch równoległych znowu równe co do długości, zatem i OP jest miejsce geometryczne wszystkich punktów, które należą do prostej dzielącej kąt zawarty między ab , cd .

§. 68.

Zagadnienie. Fig. 44. Dane są proste zbiegające się AB i CD , których przecięcie pada po za płaszczyznę rysunkową; wykreślić dwusieczną tego kąta.

Rozwiązanie. 1. Zbiegające się proste AB i CD przetnijmy dowolnemi prostymi, ab i cd ; kąty $\angle Aob$, $\angle Cva$, $\angle Acd$, $\angle Cdc$ przepołowmy odpowiedniemi linijami op , vp , cf i df , to każde dwie z nich przetną się w punktach p i f ; wykreśliwszy przez te dwa punkta prostą LS , to ta jest dwusieczną, która punkt przecięcia S_1 spotka za płaszczyznę rysunkową. Obrawszy na LS dowolny punkt K , nakreślmy $KW \parallel AB$ i $KF \parallel CD$, to $\angle WKF$ jest prawdziwą wielkością żadanego kąta, jaki obie zbiegające się AB i CD tworzą ze sobą.

2. Aby znaleźć dwusieczną SL można zamiast punktu f przyjąć punkt r , który otrzymamy, jeżeli oba kąty $\angle Bed$ i $\angle Ddc$ podzielimy na 2 równe części, nakreślmy dwusieczne i te przedłużymy aż do przecięcia się w r . Przez r i p nakreślmy prostą LS (która cd w U przecina), ta przedłużona po za płaszczyznę rysunkową przechodzi przez wierzchołek S_1 i połowi kąt między AB i CD .

1 sposób rozwiązania polega na *twierdzeniu*: Podzieliwszy dwa kąty trójkąta na 2 równe części, nakreśliwszy dwusieczne i połączywszy punkt przecięcia się tychże z wierzchołkiem trzeciego kąta, otrzymamy prostą dzielącą kąt trzeci na 2 równe części. Wyobraźmy sobie tutaj trójkąt orS_1 , w którym pS_1 połowi kąt przy S_1 , to p i f są punktami należącymi do dwusiecznej kąta przy S_1 ; nakreślenie więc prostej SL usprawiedliwia sposób rozwiązania.

2 sposób opiera się na *twierdzeniach*: a) przepołowimy dwa kąty przyległe $\angle Acd$, $\angle Bed$ i nakreśliwszy dwusieczne, to te są do siebie prostopadłe; zatem $fe \perp cr$ i $fd \perp dr$. b) Jeżeli w czworoboku dwa kąty przeciwległe wynoszą razem 2 proste, to ten czworobok może być wpisany w koło, a nawet szczególnego rodzaju, bo $\angle c = \angle d = P$, dla tego też fr jest średnicą koła opisanego na tym czworoboku, a jej środek jest na SL , lub też ma z tym promieniem wspólny kawałek fU ; punkt r musi leżeć w kierunku SU ; gdyby bowiem r nie leżał w tym kierunku, to musiałby się znajdować w innym na obwodzie koła, może w r_1 , ale wtedy byłby $\angle fer_1 > \angle fer > P$ a $\angle fdr < \angle fdr_1 < P$, czyli, że prosta fr_1 nie byłaby średnicą koła, gdyż spełnienia przy c i d nie byłyby równe; co się sprzeciwia założeniu. A więc r musi leżeć w kierunku SfU tj. musi leżeć na dwusiecznej SL .

§. 69.

Zagadnienie. 1. Wynaleźć kąt utworzony przez dwie proste dane DA i EB zbiegające się po prawej stronie (D i E po lewej).

2. Wewnątrz kąta nakreślić prostą idącą do jego wierzchołka a dzielącą zarazem kąt po za płaszczyzną rysunkową na 2 równe części.

Rozwiązanie. Do 1. Na jednej z prostych zbiegających się np. na AD , wybieramy dowolnie punkt s , przezeń nakreślimy wewnątrz kąta równoległą cs do drugiej prostej zbieżnej EB i przepołówny otrzymany kąt csD dwusieczną, as ; to $\sphericalangle asD = \sphericalangle asc = \sphericalangle \frac{Dsc}{2}$.

Powyższe wypływa z równości kątów, których ramiona są równoległe i rozchodzą się w jedną stronę.

Do 2. Spuściwszy na dwusieczną as z dowolnie obranego punktu prostopadłą np. DE i podzieliwszy ją w b na 2 równe części tak, że $Db = Eb$ a nadto spuściwszy z punktu podziału b prostopadłą do DE , to ta jest żądaną prostą, przechodzącą przez wierzchołek S_1 kąta między DA , EB i połowiącą go.

To polega na twierdzeniu: W trójkącie równoramiennym wystawiwszy na środku nierównego boku prostopadłą, to ta przejdzie przez wierzchołek S_1 trójkąta i podzieli kąt leżący naprzeciwko boku nierównego na 2 równe części.

§. 70.

Zagadnienie. Fig. 45. Dane są proste AB i CD , rozchodzące się w różnych kierunkach i punkt l leżący pomiędzy nimi; nakreślić przez l prostą, któraby przechodziła przez wierzchołek znajdujący się po za płaszczyzną rysunkową.

Rozwiązanie. Przez l nakreślimy proste alf i bld tak, aby się proste ad i bf przecięły w T . Z T nakreślimy prostą Tc w dowolnym kierunku, jednakowoż tak, aby dane proste przecinała w c i g . Połączmy b z g i c z f , to te proste przetną się w n . Przez n i l nakreślimy prostą FS , to ta przejdzie przez wierzchołek P leżący za obrębem rysunku.

I. Wyobraźmy sobie w przestrzeni układ równoległych AB , FS , CD , przecięty innym układem równoległych ar , br , cr prostopadłe; dalej wyobraźmy sobie w prostokątach przekątne: af , db , bg , fc stale łączące oba układy równoległych; to ogół tych prostych w przestrzeni może być tak ustawiony względem oka i płaszczyzny współrzędnych, iżby jego rzut dośrodkowy na płaszczyznę rysunku przedstawiał układ perspektywiczny. Fig. 45.

II. Do usprawiedliwienia tej konstrukcyi niechaj posłużą:

1. *Twierdzenie Menelaosa.* Gdy trzy boki trójkąta, lub ich przedłużenia przetniemy dowolnie poprzeczną (Transversale), to na każdym boku dwa odcinki będą oznaczone, a mianowicie w ten sposób, że iloczyn z trzech odcinków nie leżących obok siebie, równa się iloczynowi z trzech innych odcinków.

Wyobraźmy sobie na prostej np. poziomej trzy punkta B , A i E od lewej ku prawej od siebie oddalone a nad prostą BA obierzmy dowolny punkt C i ten połączmy z dwoma pierwszymi prostymi CB i CA , to pozostanie trójkąt BAC , który następnie przetnijmy w G i F linią poprzeczną wyprowadzoną z E . To F leży na boku AC a G na BC tego trójkąta.

Dowód. Na boku AC mamy oba odcinki AF i FC , na boku BC odcinki BG i GC a na boku AB odcinki AE i BE niemające żadnego wspólnego końcowego punktu. Nakreślimy linię pomocniczą $CD \parallel GE$, przecinającą podstawę trójkąta w D . $\triangle AFE \sim \triangle ACD$, $\triangle BCD \sim \triangle BEG$, zatem $AF:CF = AE:DE$ i $BG:CG = BE:DE$. Z pierwszej proporcji otrzymamy: $DE = \frac{CF \cdot AE}{AF}$ zaś z drugiej $DE = \frac{CG \cdot BE}{BG}$, zatem $\frac{CF \cdot AE}{AF} = \frac{CG \cdot BE}{BG}$ to znaczy, że $CF \cdot AE \cdot BG = AF \cdot CG \cdot BE$.

2. *Twierdzenie. Fig. 45 a.* Trzy proste Ta , Pf i bE , wychodzące z końcowych punktów trójkąta a przecinające się w punkcie d , leżącym wewnątrz lub zewnątrz tegoż trójkąta, utworzą na bokach jego sześć odcinków, pomiędzy którymi zachodzą związki: $Tf \cdot ba \cdot PE = Pa \cdot bf \cdot TE$.

Dowód. Trójkąt TbE i poprzeczna Pdf dają podług powyższego 1. twierdzenia związek: $Tf \cdot bd \cdot PE = TP \cdot dE \cdot bf$. Trójkąt PbE i poprzeczna Tda podług tego samego twierdzenia dają stosunek: $TP \cdot dE \cdot ba = aP \cdot bE \cdot TE$. Pomnożmy te związki przez siebie, otrzymamy $Tf \cdot ab \cdot PE = Pa \cdot bf \cdot TE$.

3. **Twierdzenie.** Fig. 45 a. Jeżeli punkta końcowe trójkąta TPb połączymy z punktem d (leżącym wewnątrz lub zewnątrz trójkąta) poprzecznymi Ta , Pf , bE a następnie nakreślimy poprzeczną afV , to punkta E i V dzielą podstawę TP harmonicznie.

Dowód. $TE.Pa.bf = EP.ab.fT$ podług 2go twierdzenia i $TV.Pa.lf = VP.ab.fT'$ podług 1. twierdzenia. Podzielmy pierwszy z tych związków przez drugi otrzymamy $TE:TV = EP:VP$ lub $TE:EP = TV:VP$.

Wniosek. Można więc z pomocą samego już lineálu oznaczyć graficznie punkt harmoniczny współrzędny pewnego punktu E (zugeordnet harmonischen Punkt).

4. **Twierdzenie.** W każdym czworoboku każdą z trzech przekątni, dwie inne dzielą harmonicznie.

Dowód. Fig. 45 a. Niechaj $abfd$ będzie czworobokiem, którego trzy przekątne są bd , af i PT . Aby dowieść, że np. przekątnia PT w punktach V , E jest harmonicznie podzielona dwoma innymi przekątniami przedłużonemi, uważmy, że w trójkącie bPT poprzeczne bE , fP , aT przecinają się w punkcie d ; zatem prosta PT podzielona jest przekątnią faV i bdE harmonicznie. Również w trójkącie abf trzy poprzeczne ad , bd , fd przejdą przez punkt d , przeto bd , PT dzielą af w punktach l , V harmonicznie. W trójkącie abd wreszcie przechodzą trzy poprzeczne fb , fa , fd przez punkt f ; zatem bd jest podzielone przez fa i PT w l i E harmonicznie.

Uwaga. Wyobraźmy sobie, że są nakreślone i dostatecznie przedłużone proste PL i TL , to także każdy z czterech boków czworoboku $abfd$ będzie harmonicznie podzielony.

5. **Twierdzenie.** Fig. 45 a. Kresząc przez jakikolwiek punkt F obrany na płaszczyźnie kąta AB , CD lub BPD (gdy punkt przecięcia tych ramion przez P oznaczmy) poprzeczne Ta , Tb , Tc otrzymamy czworoboki $abfd$, $bcbf$, a punkta przecięcia l , n , ... przekątni tych czworoboków leżą w prostej przechodzącej przez wierzchołek kąta P .

Dowód. Podług poprzedniego twierdzenia (4) przekątnia bd czworoboku $abfd$ w punktach l i E (ten punkt jest punktem przecięcia przekątni bd i PT) jest harmonicznie przecięty; zatem PT , PD , Pl i PB , tworzą harmoniczny pęk promieni (harmonisches Strahlenbüschel). To samo dotyczy PT , BD , Pn i PB , zatem Pl i Pn stanowią jedną prostą.

Kąt proporecyonalny.

§. 71.

Określenie. Kąt proporecyonalny (Reductions-Winkel v. Proportional-Winkel) jest to graficzny środek pomocniczy, za pomocą którego na zasadzie proporecyonalności linii, narysowane przedmioty w zmniejszonej skali przedstawić można; używamy go nadto do powiększania rysunków, jeżeli linije dane przedmiotu nie więcej nad 2 razy mają być powiększone.

§. 72.

Zagadnienie. Przedstawiony na Fig. 46 przedmiot ma być pomniejszony tak, by nakreślony obraz w Fig. 48 był mniejszy od niego o $\frac{1}{5}$.

Rozwiązanie. Zadanie to za pomocą Fig. 47 rozwiązuje się następującym sposobem:

Wysokość danego przedmiotu równa OA , poziome zaś oddalenia punktów skrajnych od osi, przechodzącej przez środek przedmiotu, można odmierzyć.

Nakreśliwszy prostą $O'P$, odcinamy na niej od O' do P część równą wysokości i tym promieniem z O' zakreślimy łuk PBS .

Ponieważ wysokość żądanego obrazu (Fig. 48) tylko $\frac{4}{5}$ wysokości danego (Fig. 46) wynosić ma, przeto dzielimy OA na 5 równych części i czterema takimi częściami wziętymi w cyrkiel zataczamy z P łuk 1, 2, który się z łukiem PBS w R przetnie. Połączywszy R z O' , otrzymamy kąt proporecyonalny $RO'P$. Cięciwa RP jest właściwie wysokością ($R'H$) żądanego obrazu Fig. 48. Podobnie odcinamy od O' na $O'P$ długość On i tym promieniem zataczamy łuk ab , którego cięciwę znów przenosimy na Fig. 48 tak, aby było $ab = Ha'$. Dla dokładnego zmierzenia odległości gzymsu $\gamma\delta$ i $\alpha\beta$ od podstawy, kreśli się z β poziomą βr aż do przecięcia się jej z OA , następnie

częścią Or zataczamy z O' łuk cd (Fig. 47) i cięciwę jego odcinamy na Fig. 48 od H do c' . Tak samo promieniem Op zataczamy z O' łuk i przenosimy $fg = Hf'$ (Fig. 48); następnie zataczamy z O' promieniem Os łuk kh i przenosimy $kh = Hh'$ (Fig. 48). W ten sam sposób dalej postępując otrzymamy wszystkie pionowe proporcjonalne wymiary Fig. 48.

Cheąc otrzymać poziome wymiary żadanego obrazu jak np. Tt' proporcjonalne $J\beta$, zataczamy z O' promieniem $J\beta$ łuk nl , a cięciwę nl odcinamy od T (znajdującego się na osi) w kierunku poziomym tak, aby było $Tt' = nl$. W celu otrzymania reszty wymiarów postępujemy dalej wskazanym tu sposobem.

Do uzasadnienia powyższego postępowania niechaj posłuży:

Twierdzenie. Gdy pomiędzy ramionami kąta poprowadzimy dwie równoległe, to długości ich będą proporcjonalne odległościom ich od wierzchołka kąta (Fig. 62).

Założenie. Niechaj będzie rRP dowolnym kątem $og \parallel sr$.

Twierdzenie. 1. $Ro : Rr = og : sr$,

2. $Rg : Rs = go : sr$.

Dowód. Nakreślmy przez o linią $AB \parallel RP$, to według poprzedzającego twierdzenia: $Ro : Rr = sO : sr$, lecz $sO = go$, przeto:

do 1. $Ro : Rr = go : sr$ i w ten sam sposób:

do 2. $Rg : Rs = go : sr$.

Dodatek. Fig. 47: Nakreślone pomiędzy ramionami kąta $PO'R$ proste równoległe RP, ab, cd, fg, hk, ln etc. są do siebie w stosunku odległości ich punktów przecięcia z ramionami kąta od wierzchołka O' , t. j. $RP : ab = cd : fg = kh : ln = \dots$ $O'P : O'b = O'd : O'g = O'h : O'n = \dots$

§. 73.

Zagadnienie. Figury 46, 47, 48. Powiększyć obraz przedmiotu fig. 48 o $\frac{1}{4}$ jego pionowej i poziomej rozciągłości.

Rozwiązanie tego zagadnienia jest podobne do poprzednio przytoczonego.

Uwaga. Fig. 49. Rysując wiele współśrodkowych łuków należących do jednej figury, podkładamy pod cyrkiel gwoździk (Einsetzstiftchen), aby uniknąć dziurawienia papieru. Rzeczywistą wielkość takiego gwoździka wskazując fig. 49. Przy kreśleniu większych kół używamy w tym samym celu płytki rogowej przedstawionej na fig. 50.

Przystawanie trójkątów i wypływające ztąd konstrukcye trójkątów z danych części.

§. 74.

1. *Przypadek przystawania. Twierdzenie.* Dwa trójkąty przystają do siebie gdy mają po kącie równym, zawartym między odpowiednio równemi bokami

Przyjmijmy: że bok $A'B' = AB$, $A'C' = AC$, $\sphericalangle A' = \sphericalangle A$. Figury 52 i 53, tab. II.

Założenie. $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$.

Dowód. Pomyślmy sobie $\triangle A'B'C'$ położony na $\triangle ABC$ tak, aby $\sphericalangle A'$ na $\sphericalangle A$, t. j. wierzchołek A' padł na A , bok $A'B'$ poszedł po AB , zaś $A'C'$ po boku AC ; natenczas musi też B' paść na B , zaś C' na C , ponieważ $A'B' = AB$, a $A'C' = AC$; a zatem i bok $B'C'$ padnie na bok BC , czyli te dwa trójkąty przystają do siebie.

Dodatek. W trójkątach przystających naprzeciwko kątów równych leżą boki równe, zaś naprzeciwko boków równych leżą kąty równe.

§. 75.

II. *Przypadek przystawiania. Twierdzenie.* Dwa trójkąty przystają do siebie, gdy mają po równym boku i po dwa równe kąty mu przyległe.

Przyjmijmy: bok $A'B' = AB$, $\sphericalangle A' = \sphericalangle A$, $\sphericalangle B' = \sphericalangle B$. Fig. 52 i 53, tab. II.

Założenie. $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$.

Dowód. Przenieśmy $\triangle A'B'C'$ na $\triangle ABC$ tak, aby bok $A'B'$ przystał do AB , tj. aby wierzchołek A' padł na A , zaś B' na B ; ponieważ $\sphericalangle A' = \sphericalangle A$, więc też musi bok $A'C'$ pójść po boku AC , a że $\sphericalangle B' = \sphericalangle B$, więc też $B'C'$ pójdzie po BC , w skutek tego i C' padnie na C , gdyż dwie proste AC i BC przecinają się tylko w jednym punkcie A , zatem te dwa trójkąty przystają do siebie, a ztąd wynika: że części jednego trójkąta są równe odpowiednim częścią drugiego trójkąta.

§. 76.

III. *Przypadek przystawiania. Twierdzenie.* Dwa trójkąty przystają do siebie, gdy mają po trzy boki odpowiednie równe.

Przyjmijmy. Fig. 69. Bok $N_1J_1 = NJ$, $J_1K_1 = JK$, $N_1K_1 = NK$.*)

Założenie. $\triangle N_1J_1K_1 \cong \triangle NJK$.

Dowód. Połóżmy jeden trójkąt na drugim tak, aby dwa równe boki padły na siebie i przykryły się, np. N_1K_1 na NK , i poprowadźmy JL , to powstaną dwa trójkąty równoramienne JLN i JLK , w których $\sphericalangle NJL = \sphericalangle NLJ$, zaś $\sphericalangle KJL = \sphericalangle JLK$, jako kąty leżące przy podstawie trójkąta równoramiennego, zatem $\sphericalangle NLJ + \sphericalangle KLJ = \sphericalangle NJL + \sphericalangle KJL$, czyli, że kąt przy L jest równy kątowi przy J , a ponieważ te kąty leżą pomiędzy równymi bokami N_1J_1 i NJ , tudzież J_1K_1 i JK , więc schodzimy do tego przypadku przystawiania trójkątów, mających po dwa boki i po kącie między nimi zawartym równym; zatem i te dwa trójkąty przystają do siebie i $\sphericalangle N_1 = \sphericalangle N$, $\sphericalangle J_1 = \sphericalangle J$, $\sphericalangle K_1 = \sphericalangle K$.

§. 77.

IV. *Przypadek przystawiania. Twierdzenie.* Dwa trójkąty przystają do siebie, gdy mają po dwa boki równe i po kącie tym bokom przeciwległym równym.

Tu mogą zachodzić dwa przypadki: a) gdy kąt równy w obu trójkątach leży naprzeciwko boków większych, lub b) gdy kąty równe w obu trójkątach leżą naprzeciw mniejszych boków równych, i oraz gdy wiemy jakiego rodzaju jest kąt drugi, leżący naprzeciw boku większego, tj. czy jest ostry, prosty lub rozwarty.

Co do a) *przyjmijmy* (fig. 54, tab. II) w trójkątach $O'P'S'$, OPS **). $O'P' = OP$, $P'S' = PS$, $\sphericalangle \alpha' = \alpha$, a $P'S' > O'P'$, zaś $PS > OP$.

Założenie. $\triangle O'P'S' \cong \triangle OPS$.

Dowód. Połóżmy te dwa trójkąty na sobie, to $\sphericalangle O$ i $\sphericalangle O'$ jako równe przykryją się, a w skutek tego OS pada w kierunku $O'S'$, zaś OP w kierunku $O'P'$; ponieważ długości tych dwóch boków są sobie równe, przeto ich

*) Trójkąt $N_1J_1K_1$ jest pomyślany, lecz może być obok $\triangle NJK$ przedstawiony tak, aby odpowiednie ich boki były równe.

**) Istnieje w myśl, można go jednak nakreślić nadając jego bokom kierunki odpowiednie boków trójkąta $O'P'S'$.

końcowe punkta P i P' padną także na siebie. Trzeci wierzchołek S , leżący w kierunku OS , musi znajdować się jednocześnie na tym boku i na łuku $S'n$ zatoczonym z O' promieniem $P'S' = PS$. A że łuk $S'n$, ponieważ $P'S'$ jest większe od $O'P'$, może bok $O'S'$ przecinać w jednym tylko punkcie, S' drugi punkt przecięcia znajdować się będzie z drugiej strony O' na przedłużeniu $O'S'$; w skutek tego więc S' padnie na S , a oba trójkąty przystaną do siebie.

Co do b) *Przyjmijmy*. $O'P' = OP$, $P'S' = PS$ i $\sphericalangle O'S'P' = \sphericalangle OSP$, zaś $O'P' < P'S'$, oraz $OP < PS$.

Założenie. $\triangle O'P'S' \cong \triangle OPS$.

Dowód. Przyłożywszy $\sphericalangle S$ do $\sphericalangle S'$, to te przykryją się, a końcowe punkta P i P' należące do jednakowo długich ramion $S'P'$ i SP padną na siebie, zaś SO padnie w kierunku $S'O'$. Trzeci zaś wierzchołek O leżący na boku OS znajdować się musi jednocześnie na tymże boku i na łuku $O'P'$ zatoczonym z P' promieniem $P'O' = PO$. Ponieważ jednak $P'O' < P'S'$, zatem oba punkta przecięcia się łuku $O'Q$ z bokiem $O'S'$ w kierunku $O'S'$, więc O może paść bądź na O' bądź na Q , czyli że $\triangle POS$ może przystawać do $\triangle P'O'S'$ albo też do $\triangle PQS'$, a więc przystawanie trójkąta $P'O'S'$ do $\triangle POS$ jest wątpliwem. Że jednak w trójkącie równoramiennym PQO' , $\sphericalangle O'$ jest ostrym, a w skutek tego $\sphericalangle PQS'$ rozwartym być musi, przeto już więcej nie zachodzi wątpliwość co do przystawania trójkątów $P'O'S'$ i POS , skoro wiemy że $\sphericalangle O'$ i $\sphericalangle O$, odpowiadające bokom większym w trójkątach, są oba kątami rozwartymi lub ostremi.

Uwaga. Gdyby kąty O' i O były prostymi, natenczas trójkąty już na mocy poprzednich twierdzeń przystaną do siebie.

Kreślenie trójkątów.

§. 78.

1. Mając dane: dwa boki i kąt pomiędzy nimi zawarty, można nakreślić trójkąt.

2. Mając dane: bok i dwa kąty jemu przyległe, można nakreślić trójkąt.

3. Trójkąt jest zupełnie oznaczony, jeżeli znamy trzy jego boki.

4. Znając dwa boki trójkąta i kąt leżący naprzeciwko jednego z nich, można nakreślić trójkąt.

§. 79.

Zagadnienie. Fig. 51, tab. II. Dane są boki trójkąta a i b oraz kąt między nimi zawarty α ; nakreślić trójkąt ABC .

Rozwiązanie. Nakreślmy linię prostą AC ; odetnijmy na niej długość $b = b'$; za pomocą łuku cd zmierzmy wielkość kąta α i tę przeniesmy na łuk zatoczony z C promieniem równym promieniowi łuku cd , natenczas otrzymamy $\sphericalangle \alpha' = \sphericalangle \alpha$. Pod tem nachyleniem nakreślmy $CB = a = a'$, a w końcu połączmy B z A za pomocą prostej AB , przez co otrzymamy trójkąt ABC .

§. 80.

Zagadnienie. Fig. 52. Z danych: boku AB i przyległych mu kątów α i β , wykreślić trójkąt.

Rozwiązanie. Nakreślmy dowolnie prostą $A'B'$ i odetnijmy na niej długość danego boku AB tak, aby było $A'B' = AB$. Z punktu B' zatoczmy łuk cb i odetnijmy na nim łuk ca , to jest miarę kąta β ; podobnie przeniesmy $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha'$, którego wierzchołkiem jest A' . Przedłużwszy w końcu ra-

miona kątów α' i β' aż do ich przecięcia się w C' , otrzymamy żądany trójkąt $A'B'C'$.

§. 81.

Zagadnienie. Fig. 53. Z danych trzech prostych h, f, k wykreślić trójkąt.

Uwaga. W tym wypadku musi być suma danych dwóch prostych większą od trzeciej danej prostej.

Rozwiązanie. Nakreślmy prostą $h' = h$ i oznaczmy jej końce przez A i B , z A zatoczmy promieniem równym długości f łuk 3, 4, i przetnijmy go łukiem 1, 2 zatoczonym z B promieniem równym długości k ; otrzymany ztąd punkt C połączmy z punktami A i B , otrzymamy żądany trójkąt ABC .

§. 82.

Zagadnienie. Fig. 54. Z danych dwóch boków trójkąta i kąta leżącego naprzeciwko jednego z tychże boków, wykreślić trójkąt.

Uwaga. Zachodzić tu mogą dwa wypadki:

1. Kąt dany może leżeć naprzeciwko boku mniejszego.
2. Kąt dany może leżeć naprzeciwko boku większego.

Co do 1go wypadku: dane są proste PS i nr , oraz kąt α leżący naprzeciwko prostej $PS > nr$.

Rozwiązanie. Na prostej $O's$ odetnijmy kawałek $O'P' = nr$; z O' zatoczmy łuk i przenieśmy na niego miarę kąta α , z kąd otrzymamy $\sphericalangle \alpha' = \sphericalangle \alpha$; a zarazem nakreślmy ramię tegoż kąta tj. $O'S'$; następnie z P' promieniem równym długości PS zatoczmy łuk i przedłużmy go aż do przecięcia się z ramieniem $O'S'$ w punkcie S' , ten połączymy z O' i P' da nam trójkąt $O'P'S'$.

Co do drugiego wypadku. Nakreślmy kąt $O'S'P'$ równy danemu kątowi α i na jednym z jego ramion np. na $S'P'$ odetnijmy od S' długość boku większego równą kawałkowi $S'P'$; następnie z P' promieniem równym długości boku mniejszego zatoczmy łuk, to ten przetnie drugie ramie kąta $O'S'P'$ tj. $S'O'$ w dwóch punktach O' i Q , które połączymy z P' otrzymamy żądany trójkąt.

Uwaga. W tym drugim wypadku dany kąt α musi być ostrym, a krótszy bok nie może być mniejszym od prostopadłej spuszczonej z P na $O'S'$; gdyż w przeciwnym razie wykreślenie trójkąta, zawierającego wymienione dane, jest niemożliwym. Jeżeliby krótszy bok był równym prostopadłej spuszczonej z P' na $O'S'$, natenczas łuk zatoczony z P' jest stycznym do $S'O'$, a w tym wypadku otrzymamy jeden tylko trójkąt.

§. 83.

Zagadnienie. Fig. 54. Oznaczyć graficznie wysokość trójkąta $O'S'P'$.

Określenie. Wysokość trójkąta jest to najkrótsza odległość wierzchołka od podstawy, a więc jest to prostopadła spuszczone z S' na kierunek podstawy $O'P'$.

Rozwiązanie. Z punktu P' zatoczmy promieniem równym $P'S'$ pod podstawą $O'P'$ łuk i ten przetnijmy pod podstawą w punkcie V drugim łukiem zatoczonym z O' promieniem $O'S'$. Połączymy V z S' , otrzymamy linię prostopadłą na podstawie trójkąta, a część tej linii, tj. $S'S$ jest żadaną wysokością trójkąta $O'P'S'$.

Uzasadnienie. 1. Trójkąty $VO'P'$ i $S'O'P'$ przystają do siebie, ponieważ mają trzy pary równych boków (IIIci przyp. przystawania), ztąd więc wynika, że $\sphericalangle VO'P' = \sphericalangle S'O'P'$. Oba

więc trójkąty $S'O's$ i $VO's$ mają bok $VO' = O'S'$, $sO' = sO'$ i $\sphericalangle VO's = S'O's$; przeto te dwa trójkąty przystają do siebie (I przyp. przystawiania), a ztąd wynika, że $Vs = S's$ czyli że podstawa trójkąta dzieli linię VS' w punkcie s na dwie równe części. Z przystawiania trójkątów $VO's$ i $S'O's$ wypływa następnie, że $\sphericalangle VsO' = \sphericalangle S'sO'$, a więc $O's$ jest i do VS' lub odwrotnie VS' jest do $O'P's$ prostopadłą, czyli że $S's$ jest rzeczywiście wysokością trójkąta $S'O'P$.

§. 84.

Zagadnienie. Fig. 55. Mając daną wielkość DF jednego boku trójkąta, wykreślić trójkąt równoboczny.

Rozwiązanie. Nakreślmy prostą dowolną i przenieśmy na nią długość $DF = D'F'$, promieniem równym bokowi $D'F'$ zatoczmy z D i F łuki $F'1$ i $D'2$; punkt ich przecięcia się O połączmy z D' i F' , a otrzymamy żądany trójkąt.

Uzasadnienie polega na samej konstrukcji.

§. 85.

Zagadnienie. Fig. 56. Dana jest przeciwprostokątnia trójkąta prostokątnego równoramiennego; wykreślić trójkąt.

Rozwiązanie. Z końców H i L danej przeciwprostokątnej wyprowadźmy do tejże prostopadłe nH i lL , nakreślmy dwusieczne kątów prostych nHL i lLH , te przetną się w punkcie K , będącym przez to trzecim wierzchołkiem żadanego trójkąta HLK , w którym $\sphericalangle K = 90^\circ$; albowiem $\sphericalangle KHL = \sphericalangle KLH = 45^\circ$, a więc oba razem wynoszą 90° ; zaś boki HK i KL ponieważ leżą naprzeciwko równych kątów, są równe.

§. 86.

Zagadnienie. Dana jest przeciwprostokątnia FC , wykreślić trójkąt prostokątny równoramienny.

Rozwiązanie. Podzielmy FC na dwie połowy w punkcie m' , w którym wystawmy prostopadłą $m's$, promieniem $m'F = m'C$ zatoczmy łuk 1, 2, to ten przetnie się z prostopadłą w punkcie n' , który połączony z F i C da nam żądany trójkąt CFn' .

Uzasadnienie. Odległość $n'm' = m'F = m'C$, te więc dwa trójkąty przystają do siebie, ponieważ ich odpowiednie przyprostokątne są sobie równe, a ztąd i kąty przyległe równym przeciwprostokątniom Fn' i Cn' są równe i wynoszą po 45° , dlatego więc $\sphericalangle Fn'C = P$.

§. 87.

Zagadnienie. Fig. 57. Wynaleść za pomocą rysunku środek O w trójkącie równobocznym FLN .

Rozwiązanie. Z punktu F promieniem większym niż $\frac{FL}{2}$ zataczamy łuk kl i w punkcie p przecinamy go drugim łukiem gh zatoczonym z L tym samym promieniem co kl . Na linii łączącej p z N leży środek trójkąta równobocznego, chcąc go oznaczyć zatacza się z punktu L promieniem większym niż $\frac{LN}{2}$ łuk 1, 2 i ten przecina się drugim łukiem 3, 4 zatoczonym z N tym samym promieniem co 1, 2 otrzymany ztąd punkt przecięcia łączymy z F linią prostą, która przechodzi również przez środek trójkąta, a więc szukany środek znajduje się jednocześnie na dwóch liniach, czyli że jest on zarazem punktem O wspólnego przecięcia się tychże linii pN i FS . Prostopadła spuszczone z L na podstawę przechodzi także przez punkt O i służy jako sprawdzenie rysunku.

Linije Np i FS połowią boki FL i LN , są do nich prostopadłe i są zarazem dwusiecznymi kątów trójkąta równobocznego; linije te dzielą trójkąt FLN na sześć trójkątów, przystających do siebie, ponieważ mają po jednej przyprostokątnej (przyprostokątnia ta bowiem jest połową boku trójkąta równobocznego) i po kącie ostrym, leżącym naprzeciwko tejże przyprostokątnej a wynoszącym 30° , równymi; z tego wynika, że i przeciwprostokątne $LO=FO=NO$ a więc O jest punktem środkowym. Oprócz tego odległości środka trójkąta równobocznego od wszystkich jego boków są równe.

§. 88.

Zagadnienie. Fig. 57. Znając położenie wierzchołka F i środka O trójkąta równobocznego, wykreślić go.

Rozwiązanie. Łącząc O z F , linija OF jest dwusieczną kąta, jaki boki zbiegające się w F ze sobą tworzą, a że ten kąt w trójkącie równobocznym wynosi 60° , zatem oba boki schodzące się w F , pochylone są pod 30° do FO ; wykreśliwszy dalej z O prostą ON tworzącą z FO kąt 120° i przedłużwszy ją do przecięcia się z bokiem FN w punkcie N , otrzymamy drugi wierzchołek trójkąta, z którego poprowadzona prosta NL prostopadła do FO , jest trzecim bokiem żadanego trójkąta równobocznego.

§. 89.

Zagadnienie. Fig. 58. Wykreślić trójkąt równoboczny o danej wysokości.

Rozwiązanie. Podług fig. 55 nakreślimy dowolnie trójkąt równoboczny fAg ; na prostopadłej spuszczonej z A na fg odetnijmy długość $AD=A'D'$, przezeo otrzymamy punkt D należący do podstawy trójkąta równobocznego; jeśli teraz przez D nakreślimy liniję równoległą do fg tak, aby się z przedłużeniami Af i Ag przecięła w B i C , to otrzymamy żądany trójkąt ABC .

Uzasadnienie. Ponieważ $\sphericalangle ABC=Afg=60^\circ$, $\sphericalangle A=\sphericalangle A=60^\circ$, przeto i trzecie kąty C i g muszą być równe, a zatem trójkąt ABC jest równoboczny. $\sphericalangle Aof=\sphericalangle ADB=P$ czyli, że $AD \perp BC$. Trójkąt więc ABC jest rzeczywiście żądanym trójkątem równobocznym o wysokości $AD=A'D'$.

§. 90.

Zagadnienie. Fig. 59. Mając daną przeciwprostokątną $A'D'$ i wysokość mn trójkąta prostokątnego, wykreślić go.

Rozwiązanie. Daną długość $A'D'$ odetnijmy na dowolnej prostej FC , z której środka m' promieniem $\frac{FC}{2}$ zatoczmy półkole $Cn'F$. W jakimkolwiek punkcie linii FC np. w m' wystawmy do niej prostopadłą sm' , na której odetnijmy od punktu m' kawałek równy danej wysokości mn przez otrzymany punkt nakreślimy równoległą do FC , ta przetnie półkole w punkcie n' , połączwszy go z F i C otrzymamy żądany trójkąt $Fn'C$.

Ponieważ kąt okręgowy przy n' , wynosi tylko połowę kąta środkowego, który tu 180° wynosi.

Uwaga. Z powyższego wykreślenia wypływa warunek, aby wysokość nie przenosiła połowy przeciwprostokątnej FC .

O czwartej, trzeciej, średniej proporcjonalnej linii, o harmonijnem dzieleniu i złotem cięciu.

§. 91.

Zagadnienie. Fig. 60. Mając dane trzy proste a, b, c , wynaleźć czwartą OS do nich proporcjonalną.

Rozwiązanie. 1 sposób. Nakreślimy prostą ON i obierzmy na niej punkt O za wierzchołek dowolnego kąta α , przez O nakreślimy prostą OP pochy-

loną do ON pod wspomnianym kątem α . Długość b przenieśmy na OP od O do T czyniąc przeto $b' = b$; na ramieniu ON tak samo odetnijmy a od O do C , a otrzymamy $a = a'$.

Długość c odetnijmy od O do K tj. $OK = c$. Połączmy T z C i przez K nakreślmy do TC równoległą KS , otrzymana ztąd linia OS jest szukaną czwartą proporcjonalną. $OT:OC = OK:OS$ czyli $b:a = c:OS$. $OS = \frac{a \cdot c}{b}$.

2 sposób. Uczyńmy $OT = b$, $TK = a$, $OC = c$, nakreślmy prostą TC i przez K do niej równoległą KS , to znówu otrzymamy proporcję: $b:a = c:CS$ a ztąd $CS = \frac{a \cdot c}{b}$ czyli CS jest szukaną czwartą linią proporcjonalną.

Uwaga. Jeżeli oba wykreślenia ściśle wykonane będą, natenczas OS tj. średnia proporcjonalna otrzymana z pierwszej konstrukcyi, musi być równa CS tj. średniej proporcjonalnej otrzymanej z drugiej konstrukcyi.

Uzasadnienie 1 sposobu kreślenia (Fig 60):

Twierdzenie. Nakreśliwszy pomiędzy ramionami kąta PON dwie dowolne równoległe np. TC i KS otrzymamy ztąd proporcjonalne odcinki ramion.

Przyjmując, że OC i CS mają jakąś wspólną miarę M , przenieśmy ją na kawałek OS tyle razy ile razy się zmieści, a przez to zostanie ten podzielony na pewną ilość równych części (te części można na figurze wykreślić) np. na m części równych; jeden z punktów podziału musi wypaść w C . Linija więc $OS = mM$ czyli ztąd $M = \frac{1}{m} OS$. Wykreślmy z tych punktów

podziału linije równoległe do TC i KS , to te podzielią liniją OK także na m części równych (dowód na to podany w § 30 lub jednym z twierdzeń); nazwijmy wspólną miarę linii OT i TK przez M_1 , to $M_1 = \frac{1}{m} OK$. A zatem cząstka linii OS jest w tym stosunku do cząstki linii

OK , jak $\frac{1}{m} OS : \frac{1}{m} OK = OS:OK$. Tak samo $\frac{n}{m} OS : \frac{n}{m} OK = OS:OK$, to znaczy: każda cząstka na OS jest w tym stosunku do odpowiedniej cząstki na OK , jak cała linija OS do całej linii OK ; i tak samo: pewna ilość np. n cząstek linii OS jest w tym stosunku do n cząstek linii OK jak OS do OK . A ponieważ kawałki OC i OT zawierają równą ilość tych cząstek a także i kawałki CS i TK , przeto:

1. $OC:OT = OS:OK$ lub też co na to samo wychodzi, $OT:OC = OK:OS$. Ztąd zarazem wypływa uzasadnienie drugiego sposobu.

2. $CS:TK = OS:OK$. Z porównania 1. i 2. wynika proporcja $OC:OT = CS:TK$ lub co na to samo wychodzi $OT:TK = OC:CS$.

§. 92.

Zagadnienie. Fig. 60. Do dwóch danych linii a i b znaleźć trzecią geometrycznie proporcjonalną.

Rozwiązanie. Na jednym ramieniu dowolnie nakreślonego kąta α , odcinamy od wierzchołka O kawałek $a = a'$; zaś na obudwu ramionach od O kawałki $b = b' = OS$; następnie kreślimy CT i przez S równoległą do niej KS . Natenczas $a':b' = OS:OK$ czyli $a:b = b:OK$; trzecią więc szukaną geom. proporcjonalną jest $OK = \frac{b \cdot b}{a} = \frac{b^2}{a}$.

§. 93.

Zagadnienie. Fig. 61. Wynaleść średnio-geometrycznie proporcjonalną LN' pomiędzy danemi dwoma linijami s i r ; co znaczy, że LN' ma z s i r tworzyć następującą proporcję: $s:LN' = LN':r$.

Rozwiązanie. 1 sposób. Nakreślmy prostą i odetnijmy na niej daną długość: $s = G'N'$. Na tej samej prostej odetnijmy $N'H' = r$. Liniję $G'H'$ podzielmy na dwie połowy w O i z tego punktu promieniem $G'O$ zatoczmy półkole $G'LN'$. W N' wystawmy prostopadłą LN' do $G'H'$, i przedłużmy ją do przecięcia z półkolem w punkcie L . Otrzymana tak linija LN' jest żą-

daną średnio-geometryczną proporecyonalną pomiędzy linijami s i r a zatem $LN = \sqrt{s \cdot r}$.

Uzasadnia się to *twierdzeniem*:

Prostopadła spuszczone na średnicę z punktu okręgu koła jest średnio geom. proporecyonalną, pomiędzy odcinkami téjże średnicy. Ponieważ $\triangle LG'N' \sim \triangle LH'N'$ etc.

2 sposób. Nakreślmy prostą $G'H' = GN = s$, odetnijmy $N'H' = r$ i wiawszy $G'H'$ za średnicę zatoczmy półkołę; nareszcie wystawmy w N' prostopadłą $N'L$ do $G'H'$ i nakreślmy cięciwę LH' , a ta jest szukana średnio-geom. proporecyonalną pomiędzy $G'H'$ i $N'H'$. $G'H' : LH' = LH' : N'H'$.

Uzasadnienie wynika z *twierdzenia*:

Każda cięciwa LH' koła jest średnio geom. proporecyonalną pomiędzy średnicą, przechodzącą przez jeden jej koniec H' i przyległym jej odcinkiem $N'H'$ powstałym przez spuszczenie z drugiego końca L cięciwy, prostopadłej do téj średnicy.

§. 94.

Fig. II. Tabl. I. Określenia. Prosta Bk jest wtedy *harmonijnie podzieloną* przez dwa punkta f' i A , jeżeli prostokąt utworzony z przedłużonej prostej i kawałka środkowego ($AB.kf'$) jest równy prostokątowi z obu kawałków zewnętrznych ($Bf'.AK$). Te cztery punkta A, B, f', k zowią się *punktami harmonijnymi* (harmonische Punkte), zaś B, k jako też f' i A zowią się także *harmonijnie sprzężonymi punktami* (zugeordnete harmonische Punkte). Linije łączące te punkta A, B, f', k z punktem jakimś leżącym po za prostą Bk zowią się *promieniami harmonijnymi*. Wszystkie te cztery promienie razem zowią się *pękiem harmonijnym promieni* (harmonisches Strahlenbüschel).

§. 95.

Założenie. Dwusieczne kąta wewnętrznego w trójkącie i przyległych mu kątów, dzieli podstawę trójkąta harmonijnie.

Dowód na to, wypływa z twierdzenia: dwusieczna kąta wierzchołkowego dzieli bok przeciwny na dwa odcinki proporecyonalne bokom przyległym.

§. 96.

Zagadnienie. Dla punktu danego na prostej, znaleźć harmonijnie sprzężony punkt.

Rozwiązanie. Niechaj będzie dana prosta CD zaś B dany punkt téjże; pod CD zatoczmy półkołę, nakreślmy dowolną prostą BP , połączmy P z C i przenieśmy $\sphericalangle APC = \sphericalangle BPC$ tak, aby A znajdował się na przedłużeniu CD na lewo; natenczas A jest punktem harmonijnie sprzężonym z punktem B .

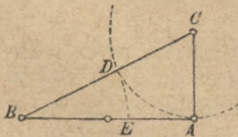
Dowód. Nakreśliwszy DP , dwusieczną kąta APB , ta na mocy powyższego założenia (§. 95) dzieli CD w A i B harmonijnie..

O złotym cięciu (Sectio aurea. S. divina).

§. 97.

1. **Zagadnienie.** **Fig. 61 a.** Prostą AB podzielić na dwie nierówne części tak, aby część większa była średnio-geometrycznie proporecyonalną pomiędzy częścią mniejszą a całą prostą AB .

Rozwiązanie. W punkcie A wystawmy prostopadłą AC do AB i odetnijmy na niej $\frac{AB}{2}$, połączmy C z B i z punktu C , promieniem CA zatoczmy łuk aż do przecięcia się tegoż z linią BC w punkcie D ; to samo z B promieniem



BD zatoczmy łuk *DE*, który przetnie *AB* w punkcie *E* a ztąd powstaje: $AE:BE = BE:AB$, czyli, że *E* jest żądanym punktem podziału.

Uzasadnienie. Każda styczna do koła jest średnio geom. proporcjonalną pomiędzy całą sieczną wyprowadzoną z jej końca a odcinkiem téjże, leżącym zewnątrz koła.

Chcąc otrzymać całą sieczną potrzeba *BC* przedłużyć po za punkt *C* tak, aby przedłużony kawałek był równy *CD*. natenczas cała sieczna równa się $BC + CD$ czyli $AB + BD$; ztąd więc otrzymamy: $AB + BD:AB = AB:BD$; a że $BD = BE$ przeto $AB + BE:AB = AB:BE$ a ztąd:

$$BE + AB - AB : AB = AB - BE:BE.$$

lub też: $BE:AB = AE:BE$, albo co to samo znaczy: $AE:BE = BE:AB$.

Uwaga. *BE* zowie się *średnią* (Mediane.)

Dodatek. Kwadrat więc z odcinka większego *BE*, jest równy prostokątowi z całej linii *AB* i odcinka mniejszego *AE*.

2 Zagadnienie. Podzielić prostą *aO* fig. 28, tabl. I., w stosunku skrajnym i średnim.

Rozwiązanie. Nakreślmy trójkąt równoramienny *aOb* o daném ramieniu *aO* tak, aby kąt przy wierzchołku *O* był równy połowie kąta przy podstawie. Kąt więc $O = \frac{2}{5}P = 36^\circ$, $\angle$ przy $a = \frac{1}{5}P = 72^\circ = \angle b$. Kąt *abO* przy podstawie *ab*, przepołówny i nakreślmy dwusieczną *bc*; w skutek tego powstaną dwa trójkąty równoramienne *bcO* i *abc*, w których $ab = bc = cO$. Nadto $\triangle abc \sim \triangle abO$, podług 1. twierdz.; a zatem: $bO:ab = ab:ac$ czyli $aO:cO = cO:ac$ a więc prosta *aO* jest przecięta w punkcie *c* złotem cięciem (goldener Schnitt).

Różne zagadnienia.

I. Zagadnienia odnoszące się do trójkątów równobocznych.

§. 98.

- Na końcach dowolnej prostej wykreślić kąty wynoszące po $\frac{2}{3}P$ tj. po $\frac{2}{5} \cdot 90^\circ$; jakiego rodzaju będzie powstały ztąd trójkąt ze względu na jego boki?
- Nakreślić prostą, podzielić ją na 4 równe części i na każdej z tych części wystawić trójkąt równoboczny.
- Wykreślić trójkąt równoboczny, znając jego obwód.
- Podzieliwszy obraną prostą na 5 równych części, wystawić na każdej z nich trójkąt równoboczny, zmieniając położenie tegoż tj. gdy na pierwszej części wystawiony jest nad linią, wykreślić go na drugiej pod linią itd.
- Wykreślić trójkąt równoboczny, któregooby obwód wynosił $\frac{3}{4}$ obwodu innego danego trójkąta równobocznego.
- Mając daną sumę boków trójkąta równobocznego i jego wysokość, — nakreślić trójkąt równoboczny.
- Mając daną różnicę boków trójkąta równobocznego i jego wysokość, nakreślić tenże.
- W trójkąt równoboczny wpisać drugi taki sam, lecz aby jego boki były prostopadłe do boków pierwszego.
- Jakie są twierdzenia o przystawianiu trójkątów równobocznych?

II. Zadania odnoszące się do trójkątów równoramiennych.

§. 99.

- Na prostej danej, wziętej za podstawę wykreślić kilka rozmaitych trójkątów równoramiennych.

- b) Mając daną podstawę trójkąta równoramiennego i jeden z boków równych, nakreślić trójkąt równoramienny.
- c) Wykreślić trójkąt równoramienny, mając dany jeden z boków równych wiedząc nadto, że podstawa ma być równą połowie danego boku.
- d) Wykreślić trójkąt równoramienny, któregooby podstawa była w stosunku do jednego z boków równych jak 2:3.
- e) Wykreślić trójkąt równoramienny znając jego obwód i podstawę.
- f) Znając jeden z boków równych i kąt jaki tenże z drugim bokiem równym zawiera, nakreślić trójkąt równoramienny.
- g) Jakie są twierdzenia o przystawianiu trójkątów równoramiennych?
- h) Jakie twierdzenia odnoszą się do trójkątów równoramiennych ze względu na środek podstawy, wierzchołek etc? Jakie są twierdzenia odwrotne, aby trójkąt, który tym warunkom odpowiada, był równoramiennym?
- i) Jak wielkim jest kąt trójkąta, jeśli linija łącząca jego wierzchołek ze środkiem boku przeciwnego jest równa połowie tegoż boku?
- k) Czemu się równa linija łącząca w trójkącie prostokątnym wierzchołek kąta prostego ze środkiem przeciwprostokątnej?
- l) W trójkącie równoramiennym gdzie spotka bok równy prostopadła, wyprowadzona ze środka połowy boku nierównego?
- m) Wykreślić trójkąt równoramienny mając daną sumę podstawy i jednego z boków równych, oraz jeden z jego kątów.
- n) Znając sumę obu wysokości i jeden kąt, wykreślić trójkąt równoramienny.
- o) Jak wielkie są kąty trójkąta równoramiennego, którego podstawa jest mniejszym zaś ramiona większym odcinkiem linij podzielonej w stosunku średnim i skrajnym?

III. Zagadnienia odnoszące się do trójkątów różnobocznych.

§. 100.

- a) Wykreślić trójkąt, którego trzy boki są dane: $a = 1.71^{\text{dm}}$, $b = 2.1^{\text{dm}}$, $c = 1^{\text{dm}}$.
- b) Wykreślić trójkąt, znając jego 2 boki: $a = 4^{\text{cm}}$, $b = 5.5^{\text{cm}}$ i kąt $= 30^{\circ}$ pomiędzy nimi zawarty.
- c) Wykreślić trójkąt, znając dwa boki: $a = 3.1^{\text{cm}}$, $b = 7^{\text{cm}}$ i kąt $= 150^{\circ}$ leżący naprzeciwko jednego z tych boków (b).
- d) Wykreślić trójkąt, którego boki są do siebie w stosunku jak 5:4:3.
- e) Jakie proporcje można ułożyć z 3 boków trójkąta i ich odcinków, jeśli dwa z tych boków przetniemy liniją równoległą do boku trzeciego? Jeżeli dwa boki trójkąta tak zostaną podzielone, iż jedna z owych proporcji zachodzi, pytanie: czy i inne proporcje tu zastosowane być mogą i czy linija łącząca punkta podziału jest do boku trzeciego równoległą?
- f) Jak można znaleźć dla trzech danych linij czwartą, arytmetycznie, jako też i czwartą geometrycznie proporcjonalną?
- g) Jak można znaleźć dla danych dwóch prostych, trzecią geometrycznie proporcjonalną?

IV. Zadania odnoszące się do trójkątów prostokątnych.

§. 101.

- a) Dane są obie przyprostokątne trójkąta prostokątnego, wykreślić go.
- b) Wykreślić trójkąt, mając daną przeciwprostokątną i jedną przyprostokątną.

- c) Mając dane przeciwprostokątnię i jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego, wykreślić go.
- d) Wykreślić trójkąt prostokątny, równoramienny, zaczynając kreślić albo od przeciwprostokątnej lub też od przyprostokątnej.
- e) Wykreślić trójkąt prostokątny, równoramienny, w którym znamy sumę obu przyprostokątni.
- f) Które twierdzenia odnoszą się do przystawiania trójkątów i jak brzmią one odnośnie do trójkątów prostokątnych?
- g) Jak znajdzie się dla dwóch danych prostych, trzecią arytmetycznie jakoteż i trzecią geometrycznie-proporcjonalną?
- h) Daną linię AB podzielić cięciem złotym (*sectio aurea*). Jak się znajduje mniejszy odcinek jakoteż cała długość złotym cięciem przeciętej prostej, znając odcinek większy? Jak wyznajdziemy większy odcinek i całą długość cięciem złotym przeciętej prostej, znając odcinek mniejszy?
- i) Jaką ułożyć można proporcję z boków trójkąta równoramiennego, w którym kąt u wierzchołka jest połową jednego kąta leżącego przy podstawie?
- k) Dany jest punkt na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego; oznaczyć dla tego punktu punkt harmonijnie sprzężony (*zugeordneter harmonischer Punkt*).
- l) Do danych trzech promieni wychodzących z jednego punktu, wykreślić czwarty, któryby z danymi tworzył harmonijny pęk promieni.

V. Trójkąty o oznaczonej wysokości.

§. 102.

- a) Wykreślić dwa trójkąty mające tę samą wysokość.
- b) Wykreślić trójkąt, któregoby wysokość była równa podstawie.
- c) Wykreśliwszy jeden dowolny trójkąt, wykreślić jeszcze drugi, któregoby podstawa była równa wysokości, a wysokość równa podstawie trójkąta pierwszego.
- d) Wykreślić trójkąt o podstawie dwa razy większej niż wysokość.
- e) Wykreślić trójkąt, któregoby podstawa była do wysokości w stosunku 3:4.
- f) Co rozumiemy pod rzutami prostopadłymi (*Perpendikel-Projectionen*), jak te mogą pomiędzy bokami trójkąta istnieć, a jak w trójkątach ostrokatnych, rozwartokątnych i prostokątnych wypadają?

Czworobok.

§. 103.

Określenia. 1. Czworobok, w którym jest tylko jedna para boków równoległych zowie się *trapezem* (*Trapez*). Boki równoległe zowią się tu *podstawami* (*Grundlinien*), a prostopadła spuszczone z punktu znajdującego się na jednym boku równoległym, na bok temuż przeciwny, zowie się *wysokością* trapezu. Trapez, w którym boki zbiegające się, są równe, zowie się *trapezem symetrycznym* (*symmetrisches Trapez*) lub *przeciwrownoległobokiem* (*Antiparallelogramm*).

2. Czworobok, w którym boki przeciwległe parami są równoległe, zowie się *równoległobokiem* (*Parallelogramm*). Każda para boków przeciwległych może tu być uważaną za podstawę; prosta łącząca w równoległoboku prostopadłe dwa boki równoległe, zowie się *wysokością* równoległoboku. Kąty przeciwległe w równoległoboku są równe, prawdziwość tego stwierdzić można dowiódłszy, że przekątnia dzieli równoległobok na dwa trójkąty przystające.

Jeżeli więc kąty przeciwległe w równoległoboku muszą być równe, można zatem łatwo rozróżnić na mocy tej własności, czy czworobok jakiś jest równoległobokiem lub nie.

3. Jeżeli więc w równoległoboku jeden kąt jest prosty, to i inne kąty również proste być muszą; taki równoległobok zowie się *równoległobokiem prostokątnym* (rechtwinkeliges Parallelogramm). Gdy zaś w równoległoboku jeden kąt jest *skośny*, to i trzy inne skośne być muszą; taki równoległobok nazywamy *równoległobokiem skośnym* (schiefwinkeliges Parallelogramm). Zatem w równoległoboku skośnym dwa przeciwległe kąty muszą być *ostre*, a dwa inne *rozwarte*. W równoległoboku mogą być albo wszystkie boki równe lub też parami równe, tj. boki przeciwległe są równe, z tego powodu w pierwszym razie nazywamy: równoległobok *równoboczny* (gleichseitiges Parallelogramm), a w drugim *nierównoboczny* (ungleichseitiges Parallelogramm).

4. Równoległobok równoboczny a zarazem prostokątny, zowie się *kwadratem* (Quadrat, Tetragon, τετράγωνον). Równoległobok równoboczny lecz skośnokątny, zowie się *kwadratem skośnym* lub *rombem* (Rhombus v. Raute, ῥόμβος). Nierównoboczny lecz prostokątny równoległobok, zowie się *prostokątem* (Rechteck v. Oblongum, ὀρθογώνιον). Nierównoboczny skośnokątny równoległobok, zowie się *romboidem* (Rhomboid).

5. W każdym równoległoboku, boki naprzeciwko siebie leżące są równe; prawdziwość tego wypływa z przystawiania dwóch trójkątów powstałych z przecięcia równoległoboku przekątnią.

6. Czworobok niemający żadnej pary boków równoległych, zowie się *trapezoidem* (Trapezoid).

§. 104.

Przystawanie równoległoboków.

Twierdzenie. Dwa równoległoboki $DHGF$ i $JKLN$ (Fig. 64 i 65 *) przystają do siebie, jeżeli stykające się dwa boki i kąt pomiędzy nimi zawarty w jednym, są równe dwom stykającym się bokom i zawartemu pomiędzy nimi kątowi w drugim równoległoboku.

Założenie. $DF = JK$, $DH = JN$, $\sphericalangle D = \sphericalangle J$. Wzmiankowane części obu równoległoboków.

Twierdzenie. $DHGF \cong JKLN$.

Dowód. Wyobraźmy sobie równoległobok $JKLN$ położony na $DHGF$ tak, aby punkta J, D i H, N przykryły się, co jest możebnem, bo podług założenia $JN = DH$. Ponieważ jednak $\sphericalangle J = \sphericalangle D$, przeto JK musi pójść w kierunku DF , a nadto K padnie na F , gdyż $JK = DF$. Lecz $\sphericalangle J + \sphericalangle N = 2P$ i $\sphericalangle D + \sphericalangle H = 2P$, przeto $\sphericalangle J + \sphericalangle N = \sphericalangle D + \sphericalangle H$ czyli $\sphericalangle N = \sphericalangle H$, a zatem LN musi paść na HG , a że $LN = JK$ oraz $JK = DF = HG$ (podług 5go objaśnienia), zatem $NL = HG$, a przez to punkt L padnie na G . A zatem końcowe punkta L, K prostej LK schodzą się z końcami G, F prostej GF ; obie więc te proste leżą na sobie, a granice równoległoboków przykrywają się, czyli ztąd wynika, że oba te równoległoboki przystają do siebie. Z powyższego wypływa:

1. Dwa prostokąty przystają do siebie, gdy mają po parze stykających się boków równych.

2. Dwa kwadraty przystają do siebie, gdy mają po jednym boku równym.

*) Oba winny być nakreślone z możliwą dokładnością jako romboidy przystające.

§. 105.

Trapezy.

Twierdzenia. 1. Dwa symetryczne trapezy przystają do siebie, gdy mają po dwa stykające się boki i po kącie przyległym równym.

2. Dwa symetryczne trapezy przystają do siebie, gdy mają obie podstawy i kąt przyległy odpowiednio równy.

3. Dwa symetryczne trapezy przystają do siebie, gdy mają obie podstawy i jeden bok nierównoległy odpowiednio równy.

Twierdzenia. 1. Dwa trapezy przystają do siebie, gdy mają jeden bok nierównoległy, jedną podstawę i oba jej przyległe kąty odpowiednio równe.

2. Dwa trapezy przystają do siebie, gdy mają obie podstawy, jeden bok nierównoległy i jeden z kątów przyległych wzajemnie w jednakowym porządku równe.

3. Dwa trapezy przystają do siebie, gdy mają oba boki nierównoległe, jedną podstawę i jeden kąt odpowiednio równy.

4. Dwa trapezy przystają do siebie, gdy mają wszystkie cztery boki odpowiednio równe.

§. 106.

Trapezoidy.

Twierdzenia. 1. Dwa trapezoidy przystają do siebie, gdy mają dwa stykające się boki i trzy jednakowo leżące kąty — w tym samym porządku ułożone — równe.

2. Dwa trapezoidy przystają do siebie, gdy mają trzy boki i kąty pomiędzy temi bokami zawarte — odpowiednio równe.

3. Dwa trapezoidy przystają do siebie, gdy mają wszystkie cztery boki i jeden kąt jednako leżący — odpowiednio równe.

4. Dwa trapezoidy przystają do siebie, gdy mają wszystkie cztery boki i jedną jednako leżącą przekątnię — odpowiednio równe.

5. Dwa trapezoidy przystają do siebie, gdy mają bok jednako leżący i obie przekątne odpowiednio równe i gdy obie przekątne tworzą z tym bokiem równe kąty.

§. 107.

Zagadnienia. Na podstawie powyższych twierdzeń o trapezach, przeciw-równoległobokach i trapezoidach, wykreślić figury przystające do powyżej przytoczonych czworoboków.

Potem dopiero nastąpi konstruowanie czworoboków z danych części składowych.

Kreślenie rozmaitych czworoboków.

§. 108.

Zagadnienie. Fig. 62. Dane są dwa stykające się ze sobą boki n' i m' ; wykreślić prostokąt.

Rozwiązanie. Nakreśliwszy dowolnie prostą RP , odcinamy na niej bok większy n' tak, aby $RP = n'$. W punktach R i P wystawiamy prostopadłe LR i NP i odcinamy na nich bok mniejszy m' ; tak otrzymamy: $m' = LR$

$= NP$; nareszcie łączymy punkt L z punktem N , a zadanie jest już rozwiązane.

$RPNL$ jest prostokątem, ponieważ jego kąty są proste, a boki przeciwległe parami równe.

§. 109.

Zagadnienie. Fig. 62. Wynaleźć za pomocą wykreślenia punkt środkowy prostokąta $LNRP$.

Rozwiązanie. Nakreślmy przekątnie LP i NR , te przecinają się w punkcie środkowym O .

Uzasadnienie powyższego: $\sphericalangle LNR = \sphericalangle NRP$, $\sphericalangle NLP = \sphericalangle RPL$, $LN = RP$, zatem $\triangle LNO \cong \triangle PRO$ na mocy 2go przypadku przystawiania trójkątów; w skutek tego $LO = OP$, $NO = OR$, a zatem O jest środkowym punktem. Nadto O jest od wszystkich wierzchołków prostokąta jednakowo oddalony.

§. 110.

Zagadnienie. Fig. 62. Przepołowić prostokąt linią równoległą do boku dłuższego.

Rozwiązanie. Przez punkt środkowy O nakreślmy prostą równoległą do boku większego LN lub RP , a $LNBA$ jest $= ABPR$.

Uzasadnienie. Ponieważ $PO = OL$, $\sphericalangle POB = \sphericalangle LOA$, zaś $\sphericalangle RLP = \sphericalangle NPL$, zatem $\triangle POB \cong \triangle LOA$ na mocy drugiego przypadku przystawiania trójkątów, a ztąd $OB = OA$, $RO = ON$, $\sphericalangle AOR = \sphericalangle BON$, a więc $\triangle ROA \cong \triangle NOB$ na mocy 1go przypadku przystawiania trójkątów, a ponieważ także $\triangle NOL \cong \triangle POR$ podług 2go przypadku przystawiania trójkątów, zatem też $\triangle OAL + \triangle LON + \triangle ONB = \triangle POB + \triangle POR + \triangle ROA$ czyli: $NBAL = PRAB = \frac{PNLR}{2}$.

Uwaga. Uzasadnienie to jest ważnem dla każdego równoległoboku, w którym to samo uczynionoby co w powyższym prostokącie.

§. 111.

Zagadnienie. Fig. 62. Prostokąt $LNPR$ przepołowić prostą równoległą do boku mniejszego.

Rozwiązanie. Mając O , nakreślmy przez niego rs równoległe do LR lub NP , a otrzymamy $LrsR = rNPs$.

Sposób uzasadnienia ten sam, co w powyższym zadaniu.

§. 112.

Zagadnienie. Fig. 62. Wynaleźć czwartą część powierzchni prostokąta $LNRP$, mając dane linie rs i AB połowiące go.

Rozwiązanie. Nakreślmy przekątnią rR , to ta przecina prostą AB w punkcie o , o jest punktem środkowym prostokąta $LrsR$. Następnie nakreślmy przez o linię cg równoległą do LR , natenczas $Lcgr = crsg = \frac{LNPR}{4}$.

Albowiem $rO = AR$, $\sphericalangle roO = \sphericalangle RoA$, $\triangle roO \cong \triangle RAo$, zatem $ro = Ro$, $Ao = oO$; do równoległoboku $crOo$ wszystkie trzy inne równoległoboki przystają; a więc $crsg = eLRg = \frac{1}{4} LNPR$.

§. 113.

Zagadnienie. Fig. 63. Nakreślić kwadrat, mając dany jego bok KB .

Rozwiązanie. Nakreślmy dowolną prostą i odetnijmy na niej długość danego boku KB ; z K i B zatoczmy łuki $BabC$ i $KbFN$; z punktu ich przecięcia b zatoczmy promieniem KB łuk 1, 2, który się z łukiem $KbFN$ przecina w punkcie N . Połączmy N z K , a linia ztąd powstała przetnie łuk $BabC$

w punkcie a . Wstawiliśmy odcinek cyrkla w punkt b , zatoczmy promieniem ba łuk aF , który przetnie się z łukiem $KbFN$ w F ; tym samym promieniem ba z punktu b przetnijmy łuk $BabC$ w punkcie C . Nareszcie połączmy punkta K, B, F, C za pomocą prostych, a otrzymamy w ten sposób żądany kwadrat $KBFC$.

Dowód. Połączymy punkt b z N , a następnie z punktami K i B linijami prostymi, otrzymamy równoboczny równoległobok czyli romb, w którym przekątne są do siebie prostopadłe i są zarazem dwusiecznymi kątów, przez których wierzchołki przechodzą. Ponieważ $\triangle KbbB$ i $\triangle bBN$ przystają do siebie i są równoboczne, więc $\sphericalangle bKB = \sphericalangle bBK = \sphericalangle bBN = 60^\circ$. Oba łuki Ba i ab odpowiadają kątowi 30° , a ponieważ łuk $bF' =$ łuk ba , przeto $\sphericalangle bBF' = 30^\circ$, zatem $\sphericalangle bBK + \sphericalangle bBF' = 90^\circ$, t. j. że $FB \perp KB$; ponieważ nadto łuk $bC =$ łukowi ba , przeto i $\sphericalangle bKC = 30^\circ$; stąd więc wynika: $\sphericalangle bKB + \sphericalangle bKC = 90^\circ$; czyli że $CK \perp KB$, a że promienie KB, BF, KC są sobie równe, więc figura $KBFC$ jest rzeczywiście kwadratem.

§. 114.

Zagadnienie. Wykreślić kwadrat, mając daną jego przekątną.

Rozwiązanie. Ponieważ przekątne kwadratów są do siebie prostopadłe i wzajemnie się połowią, przeto nakreśliwszy dowolną prostą odetnijmy na niej długość danej przekątnej i ze środka tejże wprowadźmy prostopadłą, na której po obu stronach punktu przecięcia odetnijmy połowę danej przekątnej; wreszcie połączmy końce tych przekątni za pomocą prostych, a tak otrzymamy żądany kwadrat.

§. 115.

Zagadnienie. Z różnicy boku i przekątnej pewnego kwadratu, wykreślić kwadrat.

Rozwiązanie. Weźmy tę różnicę jako przekątną kwadratu i ten nakreślmy sposobem powyżej podanym. Na przekątnej odetnijmy od jednego wierzchołka bok nakreślonego kwadratu, pozostały kawałek będzie różnicą pomiędzy przekątną a boki kwadratu. Znany sposób wyszukajmy do trzech linij a mianowicie: do znalezionej obecnie różnicy (d), do boku (s) i do przekątnej (D) małego kwadratu czwartą geometr. proporcjonalną (S), będącą zarazem szukanym bokiem dużego kwadratu, który nakreślić mamy; przytém różnica boku i przekątnej małego kwadratu czyli (d) w tym stosunku być musi do boku (s) małego kwadratu, jak przekątnia (D), tj. różnica szukanego kwadratu większego do boku (S) kwadratu większego, tj. $d : s = D : S$. Następnie zamykamy kwadrat.

§. 116.

Zagadnienie. Fig. 64. Wykreślić romb mając dane: prostą DH jako bok i jeden kąt przy $D = 60^\circ$.

Rozwiązanie. Nakreślmy dowolną prostą i odetnijmy na niej dany bok DH . W D nakreślmy drugą prostą pochyłą do DH pod danym kątem 60° , co z łatwością wykonać można, oznaczywszy za pomocą przecinających się łuków 1, 2, 3, 4 wierzchołek F trójkąta równobocznego DHF . Z F zatoczmy promieniem $FH = DH$ łuk 7, 8, zaś z H łuk 5, 6, który przecina się z poprzedzającym w G . Połączymy punkta F, D, H, G linijami prostymi, otrzymamy żądany romb $DFGH$.

§. 117.

Zagadnienie. Fig. 65. Wykreślić romb mając dany bok i kąt jemu przyległy α .

Rozwiązanie. Nakreślmy dowolną prostą i odetnijmy na niej długość danego boku JN ; następnie z J nakreślmy drugą nachyloną do pierwszej

pod danym kątem α . Z punktu J zatoczmy promieniem JN łuk 2, 1, który przetnie ramię kąta α w punkcie K . Przez ten punkt narysujemy prostą KL , równoległą do JN i odetnijmy $KL = JN$, następnie połączmy L z N a otrzymamy żądany romb $JKLN$.

§. 118.

Zagadnienie. Wykreślić romb mając daną wysokość i jeden kąt.

Rozwiązanie. Narysujemy prostą nieoznaczoną długości. Do tej prostej w odległości równej danej wysokości, poprowadzimy linię równoległą; na tych dwóch prostych leżą dwa przeciwne boki rombu. Z dowolnego punktu jednej z tych równoległych, poprowadzimy prostą pod danym kątem i przedłużmy ją aż do przecięcia się z drugą równoległą; ta prosta będzie jednym bokiem rombu. Z punktów przecięcia tej prostej z równoległymi, odetnijmy w kierunku równoległych, odległości równe tej trzeciej poprzecznej prostej, a otrzymane punkta połączone prostą, zamkną nam żądany romb.

§. 119.

Zagadnienie. Fig. 66. Z danych boków GL i GH i kąta α zawartego pomiędzy temi bokami, narysować romboid.

Rozwiązanie. Narysujemy dowolną prostą i odetnijmy na niej długość GL . w punkcie G narysujemy drugą prostą nachyloną do pierwszej pod danym kątem α , na ramieniu a kąta α odetnijmy długość danego boku GH , następnie narysujemy $HK \parallel GL$ i odetnijmy $b = GL$; a połączywszy K z L , otrzymamy żądany romboid $GHLK$.

§. 120.

Zagadnienie. Narysować romboid, mając daną jego wysokość, jeden kąt i większą przekątną.

Rozwiązanie. Narysujemy prostą nieograniczoną długości, a w odległości równej wysokości danej, narysujemy drugą prostą do pierwszej równoległą, z jakiegokolwiek punktu tej ostatniej narysujemy prostą nachyloną do niej pod kątem danym. Z wierzchołka kąta ostrego, promieniem równym danej przekątnej, zatoczmy łuk, to ten przetnie naprzeciw leżącą równoległą w punkcie, przez który narysowana prosta równoległa do linii trzeciej, zamyka żądany romboid.

§. 121.

Zagadnienie. Fig. 67. Narysować trapez $BDFJ$ mając dany jego bok, oba kąty, temu bokowi przyległe, i wysokość trapezu. Np. dane są: DF , kąty BDF , JFD i Bn .

Rozwiązanie. Narysujemy dowolną prostą i odetnijmy na niej dany bok DF . Przy D narysujemy kąt BDF to samo przy F kąt JFD ; z jakiegokolwiek punktu linii DF wystawmy do niej prostopadłą np. z n , $Bn \perp DF$; na tej prostopadłej odetnijmy daną wysokość Bn i przez wierzchołek B narysujemy prostą równoległą do DF , to ta przetnie w punktach B i J proste pochylone do DF pod kątami ostremi.

§. 122.

Zagadnienie. Fig. 67. Wykreślić trapez, mając dane: bok DF , kąty BDF i JFD temu bokowi przyległe i bok BD przyległy kątowi przy D .

Rozwiązanie. Na dowolnie nakreślonej prostej odetnijmy bok DF . Przy D nakreślmy kąt BDF to samo przy F kąt JFD a na dopiero nakreślonym ramieniu kąta D , odetnijmy daną długość boku BD . Z punktu B nakreślmy BJ równoległe do DF , ta przetnie ramię FJ w punkcie J , przez co otrzymamy czwarty bok JF , żądanego trapezu.

Uwaga. Nakreśliwszy w trapezie $BDFJ$, przekątnię DJ , rozdzielimy go na dwa odmiennie trójkąty. Można więc wykreślić trapez używając do tego wykreślenia części wchodzących w skład owych trójkątów (obacz §. 78 „konstrukcje trójkątów”).

§. 123.

Wstęp do kreślenia trapezoidów.

Określenie. Fig. 68. Przekątnia trapezoidu dzieli go na dwa nieprzystające trójkąty. Nakreśliwszy w trapezoidzie $KLNP$ przekątnię KN , otrzymamy dwa trójkąty nieprzystające KLN i KNP . Można więc wykreślić trapezoid znając części wchodzące w skład owych trójkątów.

§. 124.

Zagadnienie. Dane są boki PN , PK , NL , kąt N zawarty pomiędzy bokami NP i NL oraz przekątnia NK ; wykreślić trapezoid.

Rozwiązanie. Nakreślmy dowolną prostą i odetnijmy na niej długość boku PN . Przy N nakreślmy dany kąt LNP i na dopiero co nakreślonym ramieniu tegoż, odetnijmy długość danego boku NL . Promieniem KN zatoczmy z N łuk, to samo z P promieniem PK zatoczmy drugi łuk; a połączwszy punkt K , w którym się oba przecinają, z punktami P i L , otrzymamy żądany trapezoid $KLNP$.

Uzasadnienie. Tu użyto §§. 81 i 79. Przez wykreślenie trójkąta KNP (§. 78. 3), otrzymaliśmy $\sphericalangle KNP$ a dalej $\sphericalangle PNL - \sphericalangle KNP = \sphericalangle LNK$, §. 78, 1.

§. 125.

Zagadnienie. Fig. 68. Wykreślić trapezoid mając dane cztery boki PN , NL , LK , KP oraz kąt P , zawarty pomiędzy bokami NP i PK .

Rozwiązanie. Na dowolnie nakreślonej prostej odetnijmy długość danego boku PN . Przy P nakreślmy dany kąt KPN , i na nakreślonym ramieniu, odetnijmy długość boku KP . Z K promieniem KL zatoczmy łuk, to samo z N promieniem LN ; oba te łuki przecinają się w punkcie L , który połączmy z N a otrzymamy żądany trapezoid $KLNP$.

Uzasadnienie. Użyto tu §§. 79. 81.

§. 126.

Konstrukcja Deltoidu. Fig. 69. Nakreślmy NK dowolnie, w punkcie o leżącym bliżej punktu K jak N (o może także bliżej N być obranym) wystawmy prostą JL . Odetnijmy $Jo = oL$ większe lub mniejsze, aniżeli oK lub wreszcie równe temu ostatniemu. Połączmy punkt J z K i N , tudzież punkt L z K i N , przez co otrzymamy deltoid, składający się z dwóch trójkątów przystających NJK i NLK ; przekątnia dłuższa KN w tym deltoidzie jest zarazem jego osią symetryczną.

Kreślenie wielokątów foremnych.

§. 127.

Określenie. Figura, mająca równe boki i równe kąty, zowie się foremną.

§. 128.

Zagadnienie. Fig. 70. Wpisać w koło pięciokąt foremny.

Rozwiązanie. Nakreślmy średnicę ab i w środkowym punkcie O wystawmy do niej prostą II, O , przecinającą okrąg koła w punkcie II . Promień Ob w punkcie c podzielmy na dwie równe części i z punktu c promieniem cII zatoczmy łuk II, d , który przetnie średnicę ab w punkcie d . Połączmy d z II przez co otrzymamy dII tj. żądany bok pięciokąta. Zatoczywszy teraz z II łuk dI , otrzymamy II, I jako bok pięciokąta na okręgu koła; ten bok przeniesmy dalej a otrzymamy wierzchołki V, IV, III .

Dowód. Podany będzie przy kreśleniu foremnego dziesięciokąta §. 134.

§. 129.

Zagadnienie. Fig. 71. Wpisać w koło foremny sześciokąt.

Rozwiązanie. Promień koła jest równy bokowi sześciokąta foremnego; przeniesmy go na okrąg koła sześć razy, otrzymamy punkta I, II, III, IV, V, VI ; połączymy w tym samym porządku te punkta linijami prostymi, otrzymamy sześciokąt foremny.

Dowód. Niechaj będzie O środkiem koła, w które wpisano sześciokąt foremny. Połączymy O z wierzchołkami sześciokąta zapomocą promieni, otrzymamy równe kąty, których wierzchołki leżą w środkowym punkcie koła, mianowicie: $\sphericalangle IOH = \sphericalangle HOI = \sphericalangle IOI = \sphericalangle IOI = \dots$ a każdy z nich $= \frac{1}{3}P$. Ztąd wynika: że powstałe te sześć trójkątów przystają do siebie i są równoboczne, a więc bok sześciokąta równa się promieniowi.

§. 130.

Zagadnienie. Fig. 72. Wykreślić siedmiokąt foremny, mając dany jego bok. Tu np. niechaj tym bokiem będzie $O7$.

Rozwiązanie. Dany bok siedmiokąta przedłużmy od O ku a i promieniem $O7$ zatoczmy z O półkole, przecinające przedłużoną średnicę w punkcie a . Półkole to podzielmy na 7 równych części, połączmy punkt O z punktami podziału 6, 5, 4, 3, 2 i te proste z wyjątkiem $O2$ przedłużmy po za półkole. Wziąwszy w cyrkiel dany bok siedmiokąta, przetnijmy nim z punktów 7 i 4, przedłużone proste $O6$ i $O3$ w punktach F i B , to samo z punktów F i B , promieniem równym bokowi siedmiokąta, przetnijmy proste OD i OC w punktach D i C , następnie połączmy odpowiednie te wszystkie punkta, a otrzymamy w ten sposób żądany siedmiokąt foremny $ABCDEF7O$.

Uwaga. F, D, C, B można także inaczej wyznaczyć, mianowicie: w środkowych punktach prostych $O7$ i $O2$ wystawmy prostopadłe i przedłużmy je aż do przecięcia się w o ; z tego punktu promieniem $o7 = oA$ zatoczmy koło, które przetnie odpowiednie proste w szukanych punktach F, D, C i B .

Dowód. Każdy kąt wielokąta foremnego o n bokach równa się $\frac{2n-4}{n} \cdot P$. Kąt więc siedmiokąta foremnego równy jest $\frac{2 \cdot 7 - 4}{7} \cdot P = 128\frac{4}{7}^\circ$. Ale $128\frac{4}{7}^\circ = \frac{5}{7} \cdot 180^\circ$, czyli że $\frac{5}{7} \cdot \sphericalangle aO7 = \sphericalangle A O 7$.

§. 131.

Zagadnienie. Fig. 73. Nakreślić w kole siedmiokąt foremny w przybliżeniu.

Rozwiązanie. Nakreślmy średnicę ab i z punktu b promieniem Ob zatoczmy łuk cOd , ten przetnie okrąg w punktach II i K . Prosta łącząca punkt II z punktem K jest tu cięciwą, przecinającą promień Ob w punkcie P . $II P = PK$ jest jednym bokiem siedmiokąta; następnie odetnijmy od punktu II kawałek $III = II P$ i w ten sposób dopełnimy reszty żadanego siedmiokąta.

Uzasadnienie. $\triangle OIIb$ jest równoboczny; zatem $II P$ jest jego wysokością; nazwijmy ją h , zaś bok równobocznego trójkąta nazwijmy a , natenczas otrzymamy: $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4} a^2$, $h = \frac{a}{2} \sqrt{3}$, a wstawivszy $a = 1$, $\sqrt{3} = 1.7320508$, otrzymamy: $h = 0.8660$. $a = I, II =$ bokowi siedmiokąta; obliczywszy trygonometrycznie prawdziwą wielkość boku siedmiokąta, przekonamy się, że błąd wynosi 0.0018a.

§. 132.

Zagadnienie. Fig. 74. Wpisać w koło ośmiokąt foremny.

Rozwiązanie. Nakreślmy dwie średnice $VIII, IV$ i II, VI , prostopadłe do siebie, przepołowmy każdy kąt prosty linijami tV i $sVII$, które nachylają się do średnic pod 65° i przecinają okrąg w I, III, V, VII ; połączywszy te punkta z poprzednio otrzymanemi, otrzymamy żądany ośmiokąt.

Uzasadnienie. Wszystkie ośm kątów schodzących się wierzchołkami w środku koła, są między sobą równe i każdy wynosi 45° , ale w tém samém kole równym kątom środkowym odpowiadają równe łuki i równe cięciwy, które zarazem są bokami foremnego ośmiokąta $I, II, III, \dots, VIII$.

§. 133.

Zagadnienie. Fig. 75. Wpisać w koło przybliżenie dziewięciokąt foremny.

Rozwiązanie. Przez środek O koła, nakreślmy średnicę $VII, 7$, promień $O7$ podzielmy na 7 równych części. (Dzielenie to uskutecznia się najlepiej następującym sposobem: z O nakreślmy prostą nachyloną do $O7$ pod dowolnym kątem, na nią przenieśmy dowolną długość 7 razy, przez co otrzymamy punkta podziału $1', 2', 3', 4', 5', 6', 7'$. Punkt $7'$ połączmy z 7 prostą $7,7'$, zaś przez punkta $6', 5', 4' \dots$ nakreślmy do niej równoległe, które podzielą promień $O7$ na siedm równych części). Z punktu VII , promieniem $VII, 2$ zatoczmy łuk $a2b$, który przetnie okrąg w V i IX . Z IX zatoczmy promieniem $VII, 2$ łuk gII , który przetnie okrąg w II ; następnie z punktu II , tym samym promieniem zatoczmy łuk fIX ; oba te łuki przecinają się w C . Połączywszy C z O , otrzymamy punkt I jako przecięcie się prostej CO z okręgiem koła, punkt ten jest zarazem jednym wierzchołkiem. Nakreślmy CII i CIX i przedłużmy je aż do przecięcia się z okręgiem koła, to otrzymamy znów dwa wierzchołki $VIII$ i III dziewięciokąta. Resztę boków znajdziemy, przenosząc dalej znane już boki.

Dowód. Kąt wewnętrzny foremnego dziewięciokąta równa się $\frac{2 \cdot 9 - 4}{9} \cdot P = \frac{14P}{9} = 140^\circ$; jest więc równy zewnętrznemu kątowi trójkąta równobocznego więcej trzeciej części kąta wewnętrznego tegoż trójkąta.

1. Jeżeli koło opisowe nie jest dane, kreślimy foremny dziewięciokąt w następujący sposób: najpierw kreślimy trójkąt równoboczny $II C IX$ razem z kątami zewnętrznymi III, II, IX i $VIII, IX, II$, następnie dzielimy kąty wewnętrzne przy II i IX na trzy równe części i kreślimy promienie II, I i IX, I pochylone pod 20° do boków trójkąta; te przecinają się w punkcie I , leżącym na okręgu koła i ztąd powstaje $I, II = I, IX$, bok dziewięciokąta foremnego. Dalej kreślimy $II, III = IX, VIII = I, II$, przez punkta $III, II, I, IX, VIII$ zataczamy koło pomocnicze i na niem przenosimy znaleziony bok żadanego dziewięciokąta foremnego.

2. Ponieważ jednak według żądania miał być w dane koło O wpisany dziewięciokąt foremny, niezbędną jest przeto znajomość stosunku boku II, IX trójkąta I, II, IX tj. cięciwy w daném kole, do średnicy tegoż; a że wielkość tego boku czyli cięciwy II, IX zawisła jest od kąta środkowego $II O IX = 80^\circ$ i od promienia r danego koła, przeto należy ją obliczyć; cięciwa

II, IX jest równa podwójnej wstawie (Sinus) połowy kąta 80° , tj. $2 \cdot \text{wst. } 40^\circ = 2 \cdot 0.6427876 = 1.2855752 \cdot r$ ($r=1$). Ale cięgiwa $II, IX = a VII = VII, 2 = \frac{9}{7} \cdot r = 1.2857143 \cdot r$, różnica więc wynosi $0.0001391 \cdot r$; błąd zatem jest bardzo mały, bo nawet przy kołach o średnicy 1 metr popętnia się błąd równy prawie grubości ołówka.

Wniosek. Bok dziesięciokąta równa się podwójnej wstawie połowy całego kąta środkowego, który 40° wynosi $= 0.6840402 \cdot r$.

§. 134.

Zagadnienie. Fig. 76. W dane koło O wpisać dziesięciokąt foremny $I, II, III, \dots, X$.

1. **Rozwiązanie.** Nakreślmy promień IO prostopadłe do średnicy df , podzielmy promień Of w punkcie c na dwie równe części, z punktu c promieniem cI zatoczmy łuk Ia , który przetnie promień Od w punkcie a , a prosta aO będzie bokiem foremnego dziesięciokąta. Dla przykładu można ten bok przenieść od I na okrąg koła.

Twierdzenie. Bok dziesięciokąta równa się odległości $aO = Om$, tj. równa się średnio-geometrycznej promienia podzielonego w stosunku średnim i skrajnym.

Uzasadnienie. Przyjmijmy na Fig. 76. łuk VI, VII jako dziesiątą część okręgu koła; natenczas cięgiwa VI, VII jest bokiem dziesięciokąta foremnego wpisanego. Nakreśliwszy promień O, VI i O, VII otrzymamy $\sphericalangle VIO VII = 36^\circ$; trójkąt $VIO VII$ jest równoramiennym, przeto kąty przyległe nierównemu bokowi VI, VII wynoszą po 72° , kąt więc $VII, VIO = \sphericalangle VI, VII O = 2 \cdot \sphericalangle VIO VII$. Jeśli kąt przy VI przepołowimy tak, aby $\sphericalangle VII, VI m = \sphericalangle m VII O = \sphericalangle VII O VI$, natenczas $\triangle VIO VII \sim \triangle VI m VII$; kąt przy VII jest obydwo trójkątom wspólny, boki więc obejmujące go są proporcjonalne, stąd więc proporcya: $VIO : VII, VI = VII, VI : VII m$; ponieważ jednak $VI, VII = VI. m = mO$, przeto możemy napisać $VIO : mO = mO : VII m$, czyli, że bok VI, VII dziesięciokąta jest równy większemu odcinkowi mO (średniej geometrycznej) promienia, podzielonego w stosunku średnim i skrajnym.

Uwaga. Uzasadnienie to obejmuje zarazem drugi sposób rozwiązania.

Dodatek. Przedłużwszy $VI m$ aż do przecięcia się z okręgiem koła w punkcie IX , otrzymamy IX, VII tj. bok foremnego pięciokąta, albowiem $\sphericalangle IX, VI, VII = 36^\circ = \frac{1}{2} \sphericalangle IX O VII$; ponieważ zaś kąt okręgowy przy VI i kąt środkowy $IX O VII$ podpisane są tym samym łukiem VII, IX , przeto ostatni z nich równa się $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

Pozostaje jeszcze dowieść, że pierwszy sposób wynalezienia średniej geometrycznej $aO = mO$ jest dobrym.

W tym celu uważam Of jako średnicę koła, które też rzeczywiście zataczamy, a przedłużwszy Ic aż do przecięcia się z kołem c w punkcie n , otrzymamy:

1. IO styczną, $\overline{IO}^2 = Ia \cdot Ib$ a przez podstawienie:
2. $\overline{IO}^2 = (Ib + bn) \cdot Ib$ a przez podstawienie:
3. $\overline{IO}^2 = (aO + Of) \cdot aO$ lub przez podstawienie:
4. $\overline{IO}^2 = (aO + dO) \cdot aO$,
5. $\overline{IO}^2 = \overline{aO}^2 + aO \cdot dO$, stąd też
6. $\overline{aO}^2 = \overline{dO}^2 - aO \cdot dO$,
7. $\overline{aO}^2 = dO(dO - aO) = dO \cdot ad$, zatem
8. $dO : aO = aO : ad$; $dO = VII O$, więc $aO = mO$ jest rzeczywiście średnio-geometryczną promienia, czyli jest bokiem dziesięciokąta foremnego wpisanego w dane koło O .

Dodatek. Jeżeli promieniem Ia zatoczmy z I łuk aIX , to ten przejdzie w istocie przez koniec boku pięciokąta VII, IX , a ponieważ $\sphericalangle I, IX, VI = P$ zaś kąt $VI, IX, VII = 18^\circ$ jako kąt obwodowy, itd., przeto $\sphericalangle I, IX, VII = 108^\circ$ czyli jest kątem foremnego pięciokąta na obwodzie opisanego.

§. 135.

Zagadnienie. Fig. 77. Nakreślić foremną ośmiokątną gwiazdę.

Rozwiązanie. Nakreślmy foremny ośmiokąt $1, 2, 3, 4, 5 \dots$ i przedłużmy jego boki aż do wzajemnego przecięcia się w $I, II, III \dots$. W ten sposób, tj. przedłużając boki jakiegokolwiek wielokąta foremnego, można otrzymać gwiazdę.

Uwaga. Podzieliwszy okrąg koła na n równych części i połączywszy co trzeci punkt podziału linią prostą, otrzymamy wielokąt gwiazdowy (Sternpolygon).

§. 136.

Ogólna metoda kreślenia wielokątów foremnych.

Opis. Dzielimy kąt naokoło punktu na tyle równych części, ile wielokąt ma mieć boków. Przez punkta podziału kreślimy promienie, połowimy kąt zawarty między dwoma promieniami i przecinamy tę dwusieczną za pomocą prostopadłej, na którą przenosimy po obydwóch stronach punktu przecięcia, połowę danego boku wielokąta, przez końce tej ograniczonej prostej kreślimy linie równoległe do dwusiecznej kąta, a te przetną dwa najbliższe leżące promienie; punkta przecięcia łączymy prostą, a ta jest bokiem żadanego wielokąta, który na sposób poniżej przytoczonego przykładu przenosimy na okrąg.

§. 137.

Zagadnienie. Fig. 78. Mając dany bok mn ośmiokąta foremnego, wykreślić go.

Rozwiązanie. Z punktu O odpowiednim promieniem zatoczmy koło i podzielmy jego okrąg na ośm równych części. W punkcie o dwusiecznej Op wystawmy do niej prostopadłą mn , $on = om =$ połowie danego boku wielokąta. Przez m i n nakreślimy linie równoległe do Op , a te przetną promienie OIV i OV w punktach 4 i 5. Połączmy 4 z 5, a ta prosta jest przeniesionym bokiem ośmiokąta. Zatoczywszy z punktu O promieniem $O4$ okrąg, ten przetnie średnice w punktach 3, 2, 1, 8, 7..., a te są szukanemi wierzchołkami.

§. 138.

Określenia. I. a) Dwusieczna każdego kąta wierzchołkowego w wielokącie foremnym, o *nieparzystej* liczbie boków, jest osią symetryczną, prostopadłą do boku przeciwnego i dzieli go na dwie równe części i odwrotnie: każda prostopadła do boku wielokąta foremnego o *nieparzystej* liczbie boków, wyprowadzona z jego środka, jest symetryczną osią kąta przeciwnego.

b) Wszystkie dwusieczne kątów wierzchołkowych w wielokącie foremnym o *nieparzystej* liczbie boków, przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem wielokąta, i są osiami nieśrodkowego układu, do którego wielokąt należy.

II. a) Dwusieczna każdego kąta wierzchołkowego w wielokącie foremnym o *parzystej* liczbie boków, jest zarazem osią symetryczną i promieniem sprzężonym (Zuordnungsstrahl) środkowym, przechodzi przez przeciwległy wierzchołek i dzieli kąt przy nim będący na dwie połowy.

b) Każda prostopadła wyprowadzona ze środka boku wielokąta foremnego o *parzystej* liczbie boków, jest zarazem osią symetryczną i środkowym promieniem sprzężonym, tudzież dzieli bok przeciwny na dwie równe części i jest do niego prostopadłą.

Przystawianie wielokątów i wynikające ztąd sposoby kreślenia wielokątów przystających.

§. 139.

Określenie. Pod przystawianiem (identycznością) dwóch wielokątów rozumiemy zupełną zgodność co do kształtu i wielkości; jeżeli jeden z takich wielokątów położymy odpowiednio na drugim, natenczas przykryją się całkowicie i okaże się nam tylko jeden wielokąt; ztąd wypływa że: aby dwa

wielokąty przystały do siebie, potrzeba nietylko, aby miały równe boki i kąty, lecz nadto równe części muszą być w obydwóch w tym samym porządku ułożone.

Uwaga. Prawo przystawiania wielokątów najlepiej wyjaśnia następujący przykład z miernictwa, którym przez przerysowanie i przykrywanie się wielokątów otrzymujemy przystające obrazy.

Kopiowanie sytuacyjnych planów odbywa się w następujący sposób: przykrywamy dany plan papierem tak, aby jego krawędzie przylegały dokładnie (szczelnie) do boków planu, następnie przykładamy plan do szyby lub do płyty szklanej, do tego przeznaczonej, pochyłonej względem płaszczyzny poziomu, i liniję planu sytuacyjnego przerysowujemy na czysty papier ołówkiem. Tak otrzymany obraz zakrywa zupełnie plan sytuacyjny; a jeśli je rozłączymy, to otrzymamy dwa przystające obrazy.

§. 140.

Twierdzenie. Dwa wielokąty o równej ilości boków przystają do siebie, jeśli składają się z przystających trójkątów. Te ostatnie zaś otrzymamy, kreśląc przez jeden wierzchołek wielokąta (w obu wielokątach jednako położone) przekątnie.

Założenie. **Fig. 79.** Dane są wielokąty $ABCDFO$ i $A'B'C'D'F'O'$, w których: $\triangle ABO \cong \triangle A'B'O'$, $\triangle BCO \cong \triangle B'C'O'$, $\triangle CDO \cong \triangle C'D'O'$, $\triangle DFO \cong \triangle D'F'O'$.

Twierdzenie. Wielokąt $ABCDFO \cong A'B'C'D'F'O'$.

Dowód. Połóżmy wielokąt $ABCDFO$ na $A'B'C'D'F'O'$ tak, aby punkt O padł na O' , kierunek boku OA na kierunek boku $O'A'$, zatem aby punkt A padł na A' , natenczas $\triangle ABO$ powinien przykryć $\triangle A'B'O'$, gdyż oba są przystające; w skutek tego bok AB padnie na $A'B'$, $\sphericalangle OAB$ na $\sphericalangle O'A'B'$ i $\sphericalangle ABO$ na $\sphericalangle A'B'O'$; jeżeli jednak bok OB padnie na $O'B'$, to i $\triangle BCO$ musi paść na $\triangle B'C'O'$ czyli bok BC paść musi na $B'C'$, bok CO na $C'O'$, $\sphericalangle OBC$ na $\sphericalangle O'B'C'$, zaś $\sphericalangle OCB$ na $\sphericalangle O'C'B'$. Jeżeli zaś OC pada na $O'C'$, musi też i $\triangle OCD$ paść na $\triangle O'C'D'$, a więc bok CD musi paść na bok $C'D'$, bok DO na bok $D'O'$, $\sphericalangle OCD$ na $\sphericalangle O'C'D'$, $\sphericalangle CDO$ na $\sphericalangle C'D'O'$; ponieważ jednak boki OD i $O'D'$ przykrywają się, muszą się też i trójkąty ODF i $O'D'F'$ przykrywać, a więc i inne ich części przykrywać się muszą, mianowicie bok DF przykrywa bok $D'F'$, bok OF przykrywa bok $O'F'$, $\sphericalangle ODF$ pada na $\sphericalangle O'D'F'$, $\sphericalangle DFO$ pada na $\sphericalangle D'F'O'$. Jeżeli więc AO pada na $A'O'$, AB na $A'B'$, BC na $B'C'$, CD na $C'D'$, DF na $D'F'$ i FO na $F'O'$, zatem oba wielokąty przykrywają się, a więc są przystające. Ztąd wypływa następujący ważny wniosek, odnoszący się do kreślenia wielokątów przystających.

Wniosek. Dwa n^o kąty podzielone przekątniami czyli promieniami na same trójkąty, przystają do siebie, jeśli wszystkie boki obwodowe i przekątnie czyli promienie w jednej figurze, są równe odpowiednim bokom i przekątniom w drugiej figurze.

§. 141.

Zagadnienie. **Fig. 79.** Dany jest wielokąt $ABCDFO$, nakreślić drugi do niego przystający.

Rozwiązanie. Przez jeden wierzchołek np. o nakreślmy przekątnie oB , oC , oD , przezo rozłożymy wielokąt na trójkąty: oAB , oBC , oCD , oDF . Nakreślmy prostą i odetnijmy na niej $oF'' = oF$, następnie z punktu o dowolnym promieniem zatoczmy łuk 1, 2, 3, 4, 5. (Im większy jest ten promień, tem dokładniej wypada rysunek). Tym samym otworem cyrkla zatoczmy

z o' łuk $1', 2', 3', 4' \dots$. Od punktu $5'$ przenieśmy łuk $5, 4$, a więc łuk $5', 4' = 5, 4$. Od punktu $4'$ przenieśmy łuk $4, 3$, tj. $4', 3' = 4, 3$. Tak samo dalej odetnijmy $3', 2' = 3, 2$, $2', 1' = 2, 1$. Połączmy $1', 2', 3', 4'$ z punktem o' prostymi i odetnijmy $o'D' = oD$, $o'C' = oC$, $o'B' = oB$, $o'A' = oA$. Nareszcie połączmy A' z B' , B' z C' etc. liniami prostymi; trójkąty oAB i $o'A'B'$, oBC i $o'B'C'$, oCD i $o'C'D'$ przystają podług 1go przypad. przystaw., w skutek tego boki leżące naprzeciwko kątów równych są sobie równe, a zatem $A'B'C'D'F'o'$ przystaje do $ABCDFO$.

§. 142.

Zagadnienie. Figury 80. Wykreślić wielokąt przystający do danego $FGHJKL$.

Rozwiązanie. Wewnątrz danego wielokąta obierzmy punkt O i połączmy go ze wszystkimi wierzchołkami za pomocą promieni; przez co wielokąt zostanie podzielony na trójkąty: OFG , OGH , OHJ , OJK etc. Na płaszczyźnie rysunkowej obierzmy dowolny punkt O' . Z O zatoczmy dowolnym promieniem okrąg koła, który przetnie promienie FO , OG , OH , OJ etc. w punktach f , g , h , i etc. Toż samo z O' tym samym promieniem zatoczmy koło f' , g' , h' etc. Obierzmy punkt k' leżący równo z k pod O' ; nakreślmy prostą $O'k'$ i przedłużmy ją; z k' odetnijmy łuk $l'k' = lk$, podobnie z l' odetnijmy łuk $l'f' = lf$. Tak samo uczynimy $f'g' = fg$, $g'h' = gh$, $h'i' = hi$, $i'k' = ik$. Połączmy punkta $l'f'$, g' z punktem O' , i odetnijmy na przedłużonej $O'k'$, $O'K' = OK$. Tak samo dalej odtnijmy $O'L' = OL$, $O'F' = OF$, $O'G' = OG$, $H'O' = HO$, $O'J' = OJ$. Nakoniec połączmy punkta $K'L'F'$ liniami prostymi, a otrzymany wielokąt $K'L'F'G'$ przystający do $KLFG$ Ponieważ trójkąty $OF'G$, GHO , OHJ, przystają do odpowiednich trójkątów $O'F'G'$, $G'H'O'$, $O'H'J'$ etc., podług pierwszego przypadku przystawiania trójkątów.

§. 143.

Twierdzenie. Jeżeli w dwóch wielokątach przystających z dwóch odpowiednich wierzchołków nakreślimy do innych przekątnie czyli promienie, to wielokąty rozpadną się na trójkąty, z których leżące w tym samym porządku, przystają do siebie.

Założenie. Figury 79. Niechaj będzie wielobok $ABCDFO \cong A'B'C'D'F'O'$ czyli $OF = O'F'$, $FD = F'D'$, $DC = D'C'$, $CB = C'B'$, $BA = B'A'$, $AO = A'O'$ dalej kąt przy $O =$ kątowi przy O' , $\sphericalangle F = \sphericalangle F'$, $\sphericalangle D = \sphericalangle D'$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$.

Twierdzenie. Nakreśliwszy promienie OD , OC etc., tudzież promienie $O'D$, $O'C$, $O'B$ etc., jednakowo leżące, otrzymamy: $\triangle OFD \cong \triangle O'F'D'$, $\triangle CDO \cong \triangle C'D'O'$, $\triangle BCO \cong \triangle B'C'O'$, $\triangle ABO \cong \triangle A'B'O'$.

Dowód. Ponieważ $OF = O'F'$, $FD = F'D'$, $\sphericalangle F = \sphericalangle F'$, przeto podług pierwszego przypadku przystawiania $\triangle OFD \cong \triangle O'F'D'$; a ztąd $OD = O'D'$ i $\sphericalangle ODF = \sphericalangle O'D'F'$. Ponieważ $\sphericalangle D = \sphericalangle D'$ i $\sphericalangle ODF = \sphericalangle O'D'F'$, więc też $\sphericalangle D - \sphericalangle ODF = \sphericalangle D' - \sphericalangle O'D'F'$, czyli $\sphericalangle CDO = \sphericalangle C'D'O'$. Dalej jest $OD = O'D'$, $CD = C'D'$, a zatem $\triangle CDO \cong \triangle C'D'O'$, więc $OC = O'C'$, $\sphericalangle OCD = \sphericalangle O'C'D'$, a ztąd wynika, że $\sphericalangle C - \sphericalangle OCD = \sphericalangle C' - \sphericalangle O'C'D'$, tj. $\sphericalangle BCO = \sphericalangle B'C'O'$; a ponieważ według założenia $BC = B'C'$, przeto na mocy 1go przyp. przyst. $\triangle BCO \cong \triangle B'C'O'$, a ztąd wynika również jednakich boków i kątów: $BO = B'O'$, $\sphericalangle CBO = \sphericalangle C'B'O'$, zatem $\sphericalangle B - \sphericalangle CBO = \sphericalangle B' - \sphericalangle C'B'O'$ czyli $\sphericalangle ABO = \sphericalangle A'B'O'$. Ponieważ przyjęto, że $AB = A'B'$, przeto na mocy pierwszego przypadku przyst. $\triangle ABO \cong \triangle A'B'O'$. Rzeczywiście więc wszystkie trójkąty w $ABCD$ są po porządku do trójkątów w $A'B'C'D'$ przystające.

§. 144.

Twierdzenie. Dwa prostokreślne n^o kąty przystaną do siebie, gdy mają wszystkie boki i kąty, oprócz jednego boku i dwóch przyległych mu kątów, odpowiednio równe i w tym samym porządku ułożone.

Założenie. **Figury 78 a.** Niech będą w danym wielokącie $ABC\dots F$ bok EF i przyległe mu kąty e i f , w drugim zaś, to jest $A_1B_1C_1\dots F_1$, bok E_1F_1 i przyległe mu kąty e_1, f_1 owymi brakującymi bokami, pomiędzy którymi oba pierwsze są wklęsłe, wszystkie zresztą jednako leżące boki i kąty są w obu wielokątach odpowiednio równe.

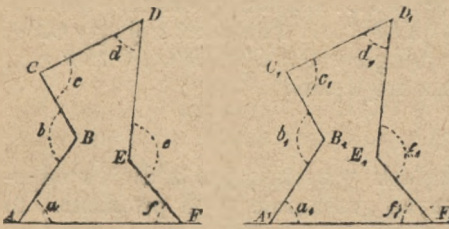
Twierdzenie. Wielokąt $ABC\dots F \cong$ wielokątowi $A_1B_1C_1\dots F_1$.

Dowód. Położmy oba wielokąty odpowiednio jeden na drugi, to zostanie AF przez A_1F_1 , $\sphericalangle a$ od $\sphericalangle a_1$, AB przez A_1B_1 , $\sphericalangle b$ od $\sphericalangle b_1$, BC przez B_1C_1 , $\sphericalangle c$ od $\sphericalangle c_1$ nakryte, przeto punkta końcowe E i F padną na odpowiednie końcowe punkta E_1 i F_1 , a oba wielokąty przykryją się wzajemnie i przystaną do siebie. Z tego wypływa także, że $EF = E_1F_1$, $\sphericalangle e = \sphericalangle e_1$ lub $\sphericalangle DEF = \sphericalangle D_1E_1F_1$ i $\sphericalangle f = \sphericalangle f_1$.

Uwaga. Gdy dwa brakujące kąty nie leżą na brakującym boku, to wyprowadzamy dowód z pomocą przekątnej, a następnie sprowadzamy do §. 77.

Opisanie wykreślenia.

Fig. 78 a.



Figury 78 a. Podług powyższego twierdzenia, poprzednio dowiedzonego, nakreślić do danego wielokąta $ABCDEF$ przystający, gdy na A_1F_1 odetniemy podstawę równą AF , $\sphericalangle a_1 = a$, bok $A_1B_1 = AB$, $\sphericalangle b_1 = b$ a bok $B_1C_1 = BC$, kąt $c_1 = c$ a bok $C_1D_1 = CD$ i wreszcie $\sphericalangle d_1 = d$, zaś $D_1E_1 = DE$. Wielokąt $ABCDEF \cong$ wielok. $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

§. 145.

Twierdzenie. Dwa prostokreślne n^o kąty przystają, gdy współrzędne (Co-ordinaten) jednej figury są względnie równe współrzędnym drugiej figury.

To wypływa z przystawiania trójkątów i trapezów, na jakie oba wielokąty można współrzędnymi podzielić.

§. 145.

Zagadnienie. **Figura 81.** Nakreślić wielokąt przystający do wielokąta $ABCD FGH$.

Rozwiązanie. Podstawę HA przedłużamy w lewo do o , kreślimy z punktów B, C, D, F, G prostopadłe na oH , np. $Co \perp oH$, $D1 \perp oH$ i t. d. Te prostopadłe przetną oH w punktach $o, 1, 2, 3, 4$, nierówno od siebie oddalonych. oH zowiemy odcinkiem (Abseisse), prostopadłe $Co, D1\dots$ zowiemy przystawami (Ordinaten). — Następnie kreślimy prostą $o'H'$ i od o' odcinamy na niej długość $o'A' = oA$, $A'1' = A1$, $1'2' = 1, 2$, $2'3' = 2, 3$, $3'4' = 3, 4$, $4'H' = 4H$. (Przenosząc z o' odległości $o'A' = oA$, $o'1' = o1$, $o'2' = o2$, $o'3' = o3$, otrzymamy bardzo dokładny rysunek.) W punktach $o', 1', 2', 3', 4'$ wystawiamy prostopadłe do $o'H'$. Kreślimy $o'C' = oC$, $D'1' = D1$, $B'2' = B2$, $F'3' = F3$, $G'4' = G4$ i łączymy punkt A' z B' , B' z C' , C' z D' ..., powstały ztąd wielokąt $A'B'C'D'\dots$ przystaje do $ABCD\dots$

Uzasadnienie. Trapez $o'C'B'2' \cong oCB2$, $\triangle A'B'2' \cong \triangle AB2$, trapez $o'C'D'1' \cong oCD1$ itd.

§. 147.

Zagadnienie. Fig. 82. Dana jest krzywa $abcdf\dots$; nakreślić krzywą do niej przystającą.

Rozwiązanie. W dowolnym kierunku kreślimy względem danej krzywej prostą XY (oś odcinków [Abscisse]), i spuszczaemy z a prostopadłą $a1O$ na XY , na oś odcinków przenosimy z $1O$ w prawo dowolną ilość małych między sobą równych części, t. j. $10, 9 = 9, 8 = 8, 7 = 7, 6 = 6, 5 = 5, 4 = 4, 3 = \dots$ i w punktach podziału osi odcinków XY wystawiamy do niej prostopadłe $a1O, b9, 8c, 7d\dots$

Następnie prowadzimy inne odcinki $X'Y'$ i z obranego punktu $10'$ odcinamy na nich części $10'9' = 10, 9, 9'8' = 9, 8, 8'7' = 8, 7, 7'6' = 7, 6$ i t. d., a wtedy te części na $X'Y'$ równe są częściom na XY . Wystawmy w punktach podziału $X'Y'$ prostopadłe i uczynimy $10'a' = 10a, 9'b' = 9b, 8'c' = 8c, 7'd' = 7d, 6'f' = 6f$ i t. d. W końcu wolną ręką połączmy punkta $a', b', c' d' f' \dots$ krzywą, a natenczas krzywa $a'f'k'm'$ przystanie do $afkm$.

Uzasadnienie. Trapez $a'b'9'10' \cong$ trapezu $ab910$, trapez $b'c'8'9' \cong b'c89, c'd'7'8' \cong cd78$ i t. d.

Praktyczne zastosowanie.

§. 148.

Zagadnienie. Fig. 83. Na podstawie tożsamości (przystawiania) nakreślić grecki profil P , mając daną podziałkę i położenie najważniejszych punktów profilu, oznaczonych za pomocą współrzędnych (Coordinaten).

Rozwiązanie. Kreślimy w P_1 kąt prosty tak, aby jedno jego ramie było pionem; na tém ramieniu odcinamy $2\frac{3}{4}$ części czyli jednostki, które otrzymamy, odczytawszy wymiar pionowej (na prawo w zakreskowanej płaszczyźnie P), zatrzymamy ją w pamięci i z podziałki nakreślonej u dołu weźmiemy w cyrkiel ilość części równą temu wymiarowi. Tę miarę uważamy jako pierwszy odcinek w P_1 . W ten sposób i reszta wymiarów pionowych i poziomych podanych w P przeniesiemy na P_1 . Krzywą profilu kreślimy wolną ręką.

Uwaga. Na podstawie poprzednich ćwiczeń można przedstawiać obrazy podobne do przedłożonych nam wzorów.

Równość figur.

§. 149.

I. Twierdzenie. Równoległoboki $RsrL$ i $RsNr$ (Fig. 62*), leżące na tej samej podstawie i pomiędzy jednakowo równoległymi prostymi, są sobie równe.

Dowód. Ponieważ $RL \parallel sr$ a $Rr \parallel sN$, przeto $\sphericalangle R L r = \sphericalangle sr N$ (jako kąty jednostronne odpowiadające), i $\sphericalangle R r L = \sphericalangle s N r$ jako kąty jednostronne odpowiadające) lecz $R L = sr$; przeto $\triangle R L r \cong \triangle sr N$ (bo znając dwa kąty, znamy i trzeci), zatem i trzecie kąty w obu trójkątach są równe, a przystawanie wypływa z 2go twierdz. o przyst. trójk. Dlatego też mamy

$$RLNs - \triangle R L r = RLNs - \triangle sr N, \text{ t. z. } RsNr = RsrL.$$

Uwaga. Ponieważ dowód ten odnosi się do wszystkich równoległoboków, przeto zamiast prostokąta obierzmy równoległobok skośnokąty, a punkt narożni-

*) Linię graniczną sN możemy tylko pomyśleć sobie lub też nakreślić.

kowy r skośnokątnego równoległoboku R_3N_7 obierzmy gdziekolwiek pomiędzy r i N na równoległej LN .

Wnioski:

1. Każdy równoległobok równa się prostokątowi, mającemu z nim równą podstawę i wysokość.
2. Równoległoboki o równych wysokościach są w stosunku ich podstaw.
3. Równoległoboki o równych podstawach są w stosunku ich wysokości.
4. Równoległoboki w ogóle są do siebie w tym stosunku jak iloczyny liczb oznaczających wymiary ich podstaw i wysokości.

§. 150.

II. Twierdzenie. Trójkąt jest połową równoległoboku mającego z nim równą podstawę i wysokość.

Dowód. **Fig. 84.** Niech będzie trójkąt ABD dany, przez punkta A i D kreślimy do boków przeciwnych równoległe DF i AF , które się przetną w punkcie F , tak powstanie równoległobok $ABDF$, mający z trójkątem ABD jednaką wysokość i podstawę, a trójkąt jest połową tego równoległoboku.

Wnioski:

1. Trójkąty mające równe podstawy i wysokości są sobie równe.
2. Trójkąty o równych wysokościach są do siebie w stosunku ich podstaw.
3. Trójkąty o równych podstawach są do siebie w stosunku ich wysokości.
4. Trójkąty w ogóle są do siebie w stosunku, jak iloczyny liczb oznaczających wymiary ich podstaw i wysokości.

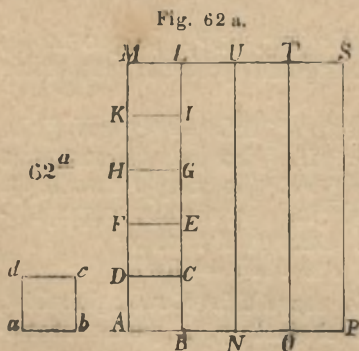
Obliczenie miary powierzchni płaszczyzn.

§. 151.

Zagadnienie. Obliczyć powierzchnię prostokąta, mając daną w liczbach podstawę i wysokość jego.

Rozwiązanie. Mnożymy przez siebie liczby wyrażające długość podstawy i wysokość, podług jednostek liniowych (miarowych), a iloczyn oznaczać będzie powierzchnię prostokąta, odniesioną do jednostki powierzchni.

Uzasadnienie. Niechaj będzie (**Fig. 62 a**) $APSM$ dowolnym prostokątem, ab jednostką liniową (miarową); kwadrat $abcd$ jest wystawiony na boku ab i przedstawia jednostkę miary powierzchni.



Stykające się boki AP i AM niech będą współmierne, a ab ich największą wspólną miarą. Jednostkę miary liniowej ab przenosimy na bok AP tyle razy, ile razy się zmieści, mianowicie czynimy $AB = BN = NO = OP = n \cdot ab$. Przez wszystkie te punkta podziału kreślimy równoległe do boku AM , to prostokąt $APSM$ zostanie podzielony na n prostokątów $ABLM$, $BNUL$, $NOTU$, $OPST$, przystających do siebie, gdyż mają po dwa boki równe; powierzchnia danego prostokąta $APSM = n \cdot \text{powierzchni } ABLM \dots (1)$.

Podług przyjętej współmierności można jednostkę miary liniowej ab przenieść na bok AM oznaczoną liczbę razy, w ogóle m razy, a wówczas

$AD = DF = FH = HK = KM = ab$ czyli $AM = m \cdot ab$; wyobraźmy sobie nakreślone przez te punkta podziału prostą AM równoległą do AP ; to prostokąt $ABLM$ zostanie podzielony na m przystających prostokątów $ABCD$, $BCEF$, $FEHG$ i t. d., z których każdy jest znów przystający do jednostki powierzchni $abcd$, a zatem powierzchnia $AL = m \cdot abcd \dots (2)$, a gdy teraz (2) za (1) podstawimy, to otrzymamy prostokąt $APSM = n \cdot m \cdot abcd$, a gdy $abcd$ równe jest 1, to prostokąt $APSM = n \cdot m$.

Uwaga. Często zamiast liczb n i m piszemy litery oznaczające wysokość i podstawę prostokąta, dlatego wzór ten można także napisać tak: $APSM = AP \cdot AM$.

1szy wniosek. Jeżeli a oznacza bok, P powierzchnię kwadratu, to $P = a^2$, zaś $a = \sqrt{P}$.

2gi wniosek. Powierzchnia równoległoboku równa się iloczynowi z podstawy i wysokości. Wypływa to z 1go twierdzenia, 1go wniosku (równość figur §. 149).

3ci wniosek. Powierzchnia trójkąta równa się połowie iloczynu z podstawy i wysokości. Wypływa to z IIgo twierdzenia (równość figur).

§. 152.

Twierdzenie. Powierzchnia trapezu równa się iloczynowi z połowy sumy jego podstaw (G i g) i wysokości (h). Trapez = $\frac{(G+g)}{2} \cdot h$ lub $\frac{(G+g) \cdot h}{2}$.

Dowód. Fig. 67, Tab. II. Nakreślmy przekątnie, to trapez = $G \cdot \frac{h}{2} + g \cdot \frac{h}{2} = (G+g) \cdot \frac{h}{2} = \frac{(G+g) \cdot h}{2}$; z tego wynika: $h = \frac{2 \cdot FDBJ}{G+g}$ i $G = \frac{2 \cdot FDBJ}{h} - g$.

§. 153.

Twierdzenie. Powierzchnia (P) wielokąta foremnego równa się iloczynowi z jego obwodu (O) i połowy promienia koła wpisanego (ϱ). $P = \frac{O \cdot \varrho}{2}$.

Dowód. Jeżeli B jest bokiem wielokąta, a n wyraża ilość jego boków, to $P = \frac{n \cdot B \cdot \varrho}{2}$, t. j. $\frac{O \cdot \varrho}{2}$.

Uwaga. Oznaczenie powierzchni nieforemnego wielokąta podane jest w §§. 189 do 192.

Zamienianie figur.

§. 154.

Określenie. Pod zamienianiem figur rozumiemy kreślenie figur, posiadających dane warunki, a równych co do powierzchni figurze danej.

§. 155.

Wyjaśnienie. Zamienienie wielokąta na trójkąty jest bardzo ważne, szczególnie przy obliczaniu powierzchni postaci geometrycznych, przedstawionych na płaszczyźnie rysunkowej; zamiast bowiem rozkładania ich na trójkąty lub na trójkąty i trapezy i obliczanie ich pojedynczo (przez co często pomyłki wymiarowe a nawet pomyłki przy obliczaniu zachodzą) zamieniamy wielokąt na trójkąt i obliczamy powierzchnię jednego tylko trójkąta, przez co oszczędza się wiele czasu; albowiem posiadając pewną wprawę, można figurę

o 25ciu bokach nawet w przeciągu dwóch minut obliczyć (?), a nadto postępowanie to, ze względu na dokładność obliczenia powierzchni, jest dogodniejsze. W pewnych wypadkach można wielokąty, zamiast na trójkąty, zamieniać na czworoboki. Można także daną figurę podzielić na odpowiednie części, a każdą z nich znów zamienioną obliczyć i dodać.

§. 156.

Zagadnienie. Fig. 84. Trójkąt dany zamienić na inny, któryby zawierał dany kąt i jeden niezmienny bok danego trójkąta.

Rozwiązanie. Niechaj będzie trójkąt AFB ; przez F kreślimy równoległą Fx do AB i obieramy na Fx dowolnie punkta E, D, C ; łączymy te punkta z A i B , to otrzymamy trójkąty mające tę samą powierzchnię co i AFB , a każdy z nich ma za podstawę bok AB . Jak widzimy można otrzymać kąt A lub tak samo B we wszelkich możliwych wielkościach. Jeżeli dany kąt leżeć ma na niezmiennym boku, to zagadnienie może być zawsze rozwiązane. Kreślimy w A dany kąt tak, że AB jest jednem ramieniem, drugie ramię przedłużamy, dopóki się nie przetnie z prostą Fx przechodzącą również przez punkt F ; punkt przecięcia łączymy z B , a tak otrzymamy żądany trójkąt. W tej figurze mają wszystkie trójkąty tę samą podstawę i równe wysokości, a więc są równe co do powierzchni.

§. 157.

Zagadnienie. Fig. 85. Dany jest trójkąt KSL ; zamienić go na trójkąt w skład którego wchodziłby bok KL danego trójkąta, zaś kąt przy L , t. j. SLK zamieniony został na inny, mianowicie na dany kąt $\alpha = L'$.

Rozwiązanie. W L przenoszę dany kąt α tak, że $S_1LK = L'$ i przedłużam ramię LS_1 aż do przecięcia równoległej SS_1 , w punkcie S_1 , przechodzącej przez S . Połączmy S_1 z K , to trójkąt powstały KS_1L jest równy co do powierzchni trójkątowi KSL .

Uzasadnienie jest bardzo łatwe.

§. 158.

Zagadnienie. Fig. 86. Dany trójkąt zamienić na inny, któryby zawierał jeden bok dany, a równocześnie jeden przyległy kąt pozostał niezmienny. Np. trójkąt BAC zamienić na DAE , któryby równy był danemu i zawierał kąt A i jemu przyległy bok AD .

Rozwiązanie. Łączymy D z C prostą CD ; z B kreślimy $BE \parallel$ do DC , łączymy D z E , to ADE jest żądanym trójkątem.

Uzasadnienie. $\triangle BCE = \triangle BDE$, bo mają podstawę BE wspólną, ich wierzchołki leżą na DC równoległej do podstawy BE , przeto oba trójkąty mają i wysokości równe. Przeto $\triangle ABE + \triangle BDE = \triangle ABE + BCE$, tj. $\triangle ADE = \triangle ABC$.

§. 159.

Zagadnienie. Fig. 87. Trójkąt ABC zamienić na inny równy mu co do powierzchni, a zawierający oprócz boku AC jeszcze drugi równy CD .

Rozwiązanie. Przez B nakreślimy Bx równoległą do CA , przedłużmy CB , odetnijmy od C na przedłużonej prostej CB dany bok CD i zatoczmy z C promieniem CD łuk aż do przecięcia Bx w D' . D' jest szukanym wierzchołkiem szukanego trójkąta, połączymy go z A i C , otrzymamy trójkąt $AD'C$ równy ABC , ponieważ mają oba równe podstawy i równe wysokości.

§. 160.

Zagadnienie. Dany trójkąt zamienić na równoramienny a równy danemu co do powierzchni.

Rozwiązanie. Ponieważ trójkąty o równych podstawach i wysokościach są równe co do powierzchni, a w równoramiennych trójkątach wysokość jest prostopadłą do środka podstawy, przeto można którykolwiek bok danego trójkąta uważać za podstawę; wystawiwszy w jej środku prostopadłą i uczyniwszy ją równą wysokości danego trójkąta, połączy się tylko punkt końcowy tej prostopadłej z końcami obranej podstawy, a otrzymamy trójkąt równoramienny, równy co do powierzchni trójkątowi danemu.

§. 161.

Zagadnienie. Fig. 88. Czworobok $ABCD$, niezawierający kąta wklęsłego, zamienić na trójkąt.

Rozwiązanie. Aby ten czworobok zamienić na trójkąt, kreślimy przekątnię AC . Trójkąt ABC możemy zamienić na inny leżący na podstawie AC , a mający wierzchołek na przedłużeniu prostej DC . W tym celu przedłużmy DC za C i przez B nakreślimy Mx równoległą do AC , te proste przetną się w M . Jeżeli połączymy M z A , to AMD jest żądanym trójkątem, mającym tę samą powierzchnię co $ABCD$.

Do uzasadnienia tego niechaj posłuży równość trójkątów ABC i ACM .

§. 162.

Zagadnienie. Fig. 89. Dany czworobok $GLHO$, mający w O kąt wklęsły, zamienić na równoległobok.

Rozwiązanie. Poprowadźmy przekątnie GH i LO , przez punkta G i H , równoległe do LO , przez L i O równoległe do HG , przezco powstanie równoległobok $FRSK$. Czworobok $GLHO$ jest połową równoległoboku $FRSK$. Zauważyć to można, gdy pomyślimy, że dany czworobok rozkłada się na dwa trójkąty LGO i LOH , które prostą LO za podstawę mają. Punkt G wyobraźmy sobie jako posunięty do R , a punkt H do S , to trójkąt LGO będzie równy co do powierzchni LOR , a LOH równy LOS , powierzchnie trójkątów $LGO + LOH$, czyli czworobok $LGOH$ równy jest trójkątowi LRS .

Trójkąt LOR jest połową $FROL$, a trójkąt LOS jest połową $LOSK$. Dodając trójkąty LOR i LOS , to te będą równe połowie $FRSK$, zatem czworobok $GLHO$ jest połową $FRSK$.

Przeprowadźmy GH w M i poprowadźmy MN równoległe do GF , to $FRvN = GLHO$, z tego wypływa

Twierdzenie. Powierzchnia jakiegokolwiek czworoboku równa się połowie powierzchni równoległoboku, utworzonego z obu przekątni.

Uwaga. Widzimy zarazem, że w ten sam równoległobok nieskończenie wiele czworoboków o równej powierzchni wpisać można. Trzeba tylko punkt G na FG i punkt L na FK obracać, przez G poprowadzić równoległą do FK , a przez L równoległą do FR , to otrzymamy cztery punkta, które z sobą połączone, dadzą zawsze czworobok (z kątem wklęsłym lub bez tego), którego powierzchnia równa się połowie danego równoległoboku. Tym sposobem można czworobok nakreślić o kącie wklęsłym lub bez tego, a równy co do powierzchni danemu.

163.

Zagadnienie. Prostokąt $ABCD$ zamienić na kwadrat.

Rozwiązanie. Niech będzie AB poziomą małą podstawą prostokąta, A lewym a B prawym jej końcem, punkt C leży za punktem B . Przedłużmy

podstawę w prawo do E , tak aby było $AE = AD$, na AE jako średnicy za-
toczmy półkole (którego punkta leżą pod AE) które przedłużony bok CB
w F przetnie; poprowadźmy AF i nakreślmy nad tą cięciwą kwadrat $AFGH$
(w którym punkt G nad F a punkt H nad A leży), to ten równy będzie da-
nemu prostokątowi.

Uzasadnienie. Poprowadźmy prostą FE , to kąt $AEF = P$ jako okręgowy itd., przeto
 EFG jest prostą. Jeżeli jeszcze poprowadzimy proste HE i DF , to trójkąt $HAE = \frac{1}{2} AFGH$
i $\triangle FAD = \frac{1}{2} ABCD$; lecz $\triangle HAE \cong \triangle FAD$, zatem $AFGH = ABCD$.

§. 164.

Zagadnienie. Zamienić prostokąt na równoległobok mając dany jeden
jego kąt.

Rozwiązanie. Ponieważ równoległoboki o równych podstawach i równych
wysokościach są sobie równe, przeto bierzemy jeden bok prostokąta za pod-
stawę i kreślimy do niej linią nieoznaczoną długości a nachyloną pod da-
nym kątem. Z drugiego końca tej podstawy prowadzimy w tym samym
kierunku równoległą do tego ramienia. Jeżeli przedłużymy przeciwną pod-
stawę prostokąta, aż do przecięcia tych ramion, to otrzymamy żądany równo-
ległobok.

§. 165.

Zagadnienie. Zamienić prostokąt na trapez mając dane dwa kąty przy-
legające do jednego z równoległych boków.

Rozwiązanie. Dwa przeciwległe boki prostokąta dzielimy na 2 równe
części; przedłużamy 3ci lub 4ty bok, który zarazem uważamy za podstawę
i jako dłuższy bok trapezu. Ze środka tych podzielonych boków odcinamy
kąt równy kątowi, jakiego do dopełnienia jednego z danych do kąta pro-
stego brakuje, lub, jeżeli kąty rozwarte trapezu są dane, nadmiar nad kąt
prosty; w pierwszym wypadku zewnątrz a w drugim wewnątrz, i przedłu-
żamy ramię w obie strony, tak, że to ramię przetnie przedłużoną podstawę
i boki przeciwległe prostokąta; w ten sposób odetnie to ramię od prostokąta
po jednej stronie punktu przecięcia trójkąt, a utworzy się po drugiej taki
sam trójkąt.

§. 166.

Zagadnienie. Zamienić trójkąt na prostokąt.

Rozwiązanie. Ponieważ trójkąty są połowami równoległoboków, z któ-
remi równe podstawy i równe wysokości mają, przeto równoległoboki, które
jednakie podstawy z trójkątami, ale tylko połowy ich wysokości mają, są
sobie równe. Potrzebujemy więc tylko na jednym boku trójkąta, który uwa-
żamy za podstawę nakreślić prostokąt, którego wysokość równa będzie po-
łowinie wysokości trójkąta.

Uwaga. Gdybyśmy trójkąt zamienić mieli na romboid nie na prostokąt, to trzeba by
tylko nad jednym z boków trójkąta nakreślić romboid, któryby obejmował dany kąt i połowę
wysokości.

§. 167.

Twierdzenie Pythagoras'a.*) W każdym trójkącie prostokątnym, kwa-
drat z przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów z dwóch przyprosto-
kątnej.

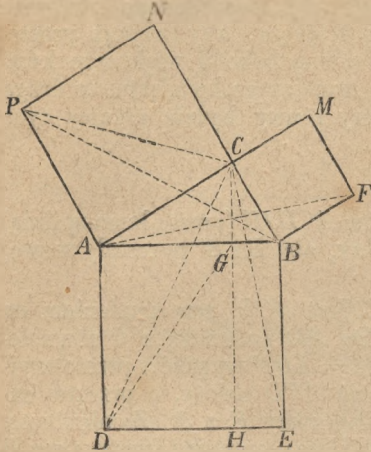
*) Grecki uczony, żyjący około r. 540 przed narodzeniem Chrystusa.

Fig. 89 a. Założenie. Trójkąt ABC niech będzie prostokątnym o kącie prostym C . CN i CM są nakreślone przedłużenia odpowiednich przyprostokątnej. Nakreślmy na przeciwprostokątnej AB kwadrat BD a na przyprostokątniach AC i BC kwadraty AN i BM .

Twierdzenie. Kwadrat $ABED$ z przeciwprostokątni AB jest tak wielki jak razem oba kwadraty $ACNP$ i $CBFM$, które na przyprostokątniach nakreślone zostały.

Dowód. Z C prowadźmy prostopadłą CG na przeciwprostokątnią AB i przedłużmy ją aż do H , ta będzie do DE prostopadłą, bo CH i BE są prostopadłe do AB , przeto podług twierdzenia: wszystkie prostopadłe do jednej prostej są do siebie równoległe,

Fig. 89 a.



$GH \parallel BE$ a ponieważ trzy kąty przy G, B i E są proste, przeto kąt GHE musi być prostym. Kwadrat $ABED$ będzie przeto na dwa prostokąty $AGHD$ i $BGHE$ podzielonym: Poprowadźmy następnie jeszcze CD i PB . Mamy przeto w obu trójkątach CAD i PAB bok $CA = PA$ (jako boki kwadratu) i $AD = AB$ (dla tej samej przyczyny); dalej kąt $CAD = \angle PAB$ (bo każdy z nich składa się z kąta prostego i kąta CAB), przeto trójkąty CAD i PAB przystają do siebie podług 2. przypadku przystawiania. Lecz trójkąt CAD ma z prostokątem $AGHD$ wspólną podstawę AD i leży pomiędzy równoległymi AD i CH , przeto jest jego połową. Tak samo trójkąt PAB ma z kwadratem $ACNP$ wspólną podstawę PA i leży pomiędzy równoległymi PA i NB , zatem jest połową kwadratu $ACNP$. Prostokąt $AGHD$ i kwadrat $ACNP$ muszą przeto być sobie równe; bo ich połowy są sobie równe. Tak samo dowodzimy, że prostokąt $BGHE$ równy jest kwadratowi $BCMF$. Z tego wypływa, że kwadrat $ABED$ (tj. suma obu prostokątów $AGHD$ i $BGHE$) jest tak wielką jak razem oba kwadraty $ACNP$ i $BCMF$.

Uwaga. Inny sposób dowodu można przeprowadzić dwoma stosunkowemi równaniami, które w dowodzie drugiego twierdzenia §. 230 (fig. 110) są umieszczone.

Sposób dowodzenia. Trójkąt mnp jest przy n prostokątny, $ns \perp mp$.

$$mP : mn = mn : ms$$

$$mP : Pn = Pn : Ps$$

$$\left. \begin{array}{l} mP \cdot ms = \overline{mn}^2 \\ mP \cdot Ps = \overline{Pn}^2 \end{array} \right\} \text{dodane oba równania}$$

$$mP \cdot ms + mP \cdot Ps = \overline{mn}^2 + \overline{Pn}^2$$

$$mP \cdot (ms + Ps) = \overline{mn}^2 + \overline{Pn}^2$$

$$mP \cdot mP = \overline{mn}^2 + \overline{Pn}^2$$

$$\overline{mP}^2 = \overline{mn}^2 + \overline{Pn}^2$$

§. 168.

Zagadnienie. Nakreślić kwadrat, równy sumie danych dwóch kwadratów.

Rozwiązanie. Ponieważ suma kwadratów z przyprostokątnej równa się kwadratowi z przeciwprostokątnej, potrzebujemy przeto tylko boki danych kwadratów połączyć z sobą pod kątem prostym, a przeciwprostokątnia ztąd powstała będzie bokiem owego kwadratu, który będzie równy danym, a nakreślony na niej kwadrat będzie żądanym kwadratem.

§. 169.

Zagadnienie. Nakreślić kwadrat, równy różnicy danych dwóch kwadratów.

Rozwiązanie. Ponieważ suma kwadratów z przyprostokątnej równa jest kwadratowi z przeciwprostokątnej przeto kwadrat z jednej przyprostokątnej, równy być musi różnicy kwadratów z przeciwprostokątnej i kwadratu z drugiej przyprostokątnej; potrzeba więc tylko bok większego danego kwadratu nwać za przeciwprostokątnię prostokątnego trójkąta, aby trójkąt prostokątny nakreślić, przeciwprostokątnię czynimy równą bokowi większego kwadratu a jedną przyprostokątnię równą bokowi mniejszego kwadratu, to druga przyprostokątnia jest bokiem kwadratu, który równy będzie różnicy tych dwóch danych.

§. 170.

Zagadnienie. Fig. 90. Nieregularną granicę $ACDJH$ (prosto-lamaną linią) kawałków B i B' zamienić na linię prostą tak, aby B i B' pozostały w swęj powierzchni niezmienione.

Rozwiązanie. Łączę A z D , otrzymam trójkąt ACD , ten zamieniam na trójkąt, któryby miał wierzchołek na FG . Do AD prowadzę z C równoległą CF , która GF w F przetnie, to musi $ADC = ADF$ wypaść, przeto wyjdzie na jedno, czy do B' trójkąt ACD czy też AFD należy, a przeto zamiast granicy ACD otrzymamy granicę FD . Łączymy F z J . Zamieniwszy trójkąt FJJ na taki, któregoby bok leżał w GF , to poprowadziwszy przez D równoległą do FJ , ta przetnie GF w F , zatem $GFJ = DFJ$; czy przeto DFJ czy też GFJ do B należy wyjdzie na jedno, zatem mamy zamiast granicy $ACDJ$, granicę GJ , lub zamiast $ACDJH$ mamy GJH . Połączmy G z H i poprowadźmy do GH równoległą JK , która HK w K przetnie, to $GJH = GHK$; zatem GK jest żadaną prostolinijną granicą pomiędzy B i B' .

Podział figur.

§. 171.

Zagadnienie. Fig. 91. Trójkąt ABC podzielić za pomocą linii podziału, przechodzącej przez punkt końcowy B na 2 części, któreby były do siebie w stosunku jak 3:4.

Rozwiązanie. Jeżeli $B4$ jest szukaną linią podziału, to trójkąty $AB4$ i $B4C$, które tę samą wysokość mają, będą się miały do siebie jak podstawy; jeżeli $\triangle AB4 : \triangle B4C = 3 : 4$; to dosyć będzie AC na 2 kawałki $A4$ i $4C$ podzielić, któreby miały się do siebie jak 3:4; następnie łączymy punkt podziału 4 z B , a zadanie będzie rozwiązane.

§. 172.

Zagadnienie. Fig. 91 a. W danym trójkącie ABC wynaleźć punkt O tak, aby linie łączące go z wierzchołkami trójkąta dzieliły go na 3 równe części.

Rozwiązanie. Dowolny bok, tu np. AC , dzielimy na trzy równe części i prowadzimy z 1 do AB i z 2 do CB równoległe, te przetną się w żadanym

punkcie O ; połączymy O z A , B i C prostymi, to $\triangle ABO = \triangle AOC = \triangle COB = \frac{\triangle ABC}{3}$. Dla przekonania się o rzetelności poprowadźmy 1, 2, 3;

$\triangle ABO = \triangle AB1$, bo oba mają AB za podstawę i tę samą wysokość; tak $\triangle CBO = \triangle CB2$ zatem też $\triangle ACO = \triangle 1B2$.

Leżąc trójkąty $AB1$, $1B2$, $2BC$ są między sobą równe i każdy z nich wynosi $\frac{1}{3}\triangle ABC$, zatem i trójkąty AOC , COB , BOA muszą być sobie równe co do powierzchni i każdy z nich wynosi także $\frac{1}{3}\triangle ABC$.

Fig. 91 a.

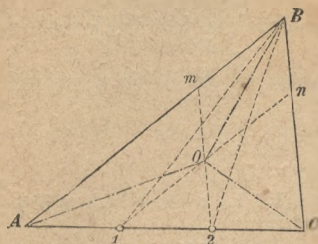
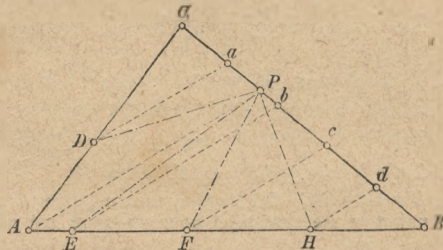


Fig. 91 b.



§. 173.

Zagadnienie. Fig. 91 b. Trójkąt ACB podzielić liniami podziału, które przechodzą przez punkt P leżący na jednym z boków, na pięć równych części.

Rozwiązanie. Dzielimy BC na pięć równych części, łączymy P z A , a przez każdy punkt podziału prostą CB , tj. przez a , b , c i d kreślimy do PA równoległe aD , bE , cF i dH ; jeżeli te nie przecinają prostej AC , to przedłuż AB w E , F , H .

Połączymy punkt P z punktami D , E , F , H prostymi PD , PE itd., to $\triangle BHP = \triangle FHP = \triangle EFP =$ czworobokowi $DAEP = \triangle CDP = \frac{1}{5}\triangle ABC$.

Uzasadnienie. Wyobraźmy sobie punkta podziału a , b , c , d połączone z wierzchołkiem trójkąta A liniami prostymi, to $\triangle ABd = \triangle Acd = \triangle Abc = \triangle Aab = \triangle AaC$; bo mają równe podstawy i równe wysokości.

1. $\triangle Ahd = \triangle HPd$, bo mają hd za wspólną podstawę i równe wysokości,
 $\triangle Bhd = \triangle Bhd$

$$\triangle ABd = \triangle BHP \text{ a ponieważ } Bd:BC = 1:5, \text{ przeto } \triangle BHP = \frac{1}{5}\triangle ABC.$$

2. $\triangle AFc = \triangle FPe$, bo mają Fc za wspólną podstawę i równe wysokości,
 $\triangle BFc = \triangle BFe$

$$\triangle ABc = \triangle BFP \text{ a ponieważ } Bc:BC = 2:5, \text{ przeto } \triangle BFP = \frac{2}{5}\triangle ABC.$$

3. $\triangle AEb = \triangle Ebp$, bo Eb jest wspólną podstawą i mają równe wysokości,
 $\triangle BEb = \triangle BEp$

$$\triangle ABb = \triangle BEP \text{ a ponieważ } BE:BC = 3:5, \text{ przeto } \triangle BEP = \frac{3}{5}\triangle ABC.$$

4. $\triangle AFP = \triangle APb$, ponieważ AP jest ich wspólną podstawą i jednakie wysokości mają.
 $\triangle ADP = \triangle APa$

$$AEPD = \triangle Aab = \frac{1}{5}\triangle ABC, \text{ zatem}$$

5. $\triangle BEP + AEPD = \triangle ABa$ lub $ABPD = \triangle ABa$ a ponieważ $Ba:BC = 4:5$ przeto $ABPD = \frac{4}{5}\triangle ABC$.

6. $\triangle Ada = \triangle DaP$, bo Da jest wspólne i mają równe wysokości,
 $\triangle Cda = \triangle Cda$

$$\triangle ACa = \triangle DPC \text{ a ponieważ } Ca:CB = 1:5, \text{ przeto } \triangle DPC = \frac{1}{5}\triangle ABC; \text{ z tego wynika równość powierzchni } BHP, FHP, EFP, DAEP, CDP \text{ z których każda równa się } \frac{1}{5}\triangle ABC.$$

Zastosowanie.

Zagadnienie. Podzielić równoległobok z jego punktów przekątni na n równych części tak, aby jego przekątnia była linią podziału.

Rozwiązanie. W jednej połowie równoległoboku tj. w trójkącie kreślimy równe części podług poprzedniego i w ten sam sposób wykonywany konstruemy w drugiej połowie równoległoboku.

§. 174.

Do konstrukcyj przy końcu wymienionych potrzebną jest znajomość następującego

Twierdzenie. Powierzchnie podobnych trójkątów są do siebie w stosunku kwadratów dwóch odpowiednich boków.

Założenie. Figury 98 i 99. $\triangle ABC \sim \triangle A'E'D'$.

Twierdzenie. $\triangle ABC : \triangle A'E'D' = \overline{BC}^2 : \overline{E'D'}^2$.

Uzasadnienie. Wyobraźmy sobie jednorodne wysokości h i h_1 , odpowiednich trójkątów (które nawet w rzeczywistości poprowadzone być mogą), to będzie

$$\frac{h}{h_1} = \frac{BC}{E'D'}, \text{ zatem, gdy obie strony równania pomnożymy przez } \frac{BC}{E'D'} \text{ to}$$

$$\frac{h}{h_1} \cdot \frac{BC}{E'D'} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{E'D'}^2}; \text{ lecz } h \cdot BC = 2 \cdot \triangle ABC \text{ i } h_1 \cdot E'D' = 2 \cdot \triangle A'E'D', \text{ zatem podzieliw-}$$

szy licznik i mianownik ułamka przez 2 będzie:

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'E'D'} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{E'D'}^2}, \text{ lub } \triangle ABC : \triangle A'E'D' = \overline{BC}^2 : \overline{E'D'}^2.$$

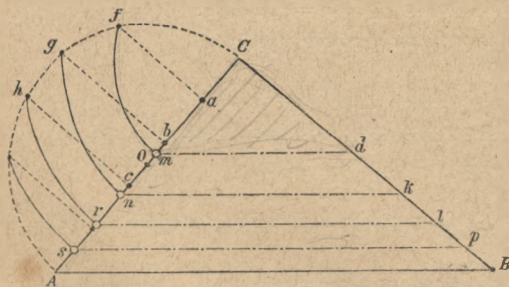
Uwaga. Twierdzenie: Powierzchnie podobnych wielokątów są do siebie w stosunku kwadratów z dwóch odpowiednich boków, można też łatwo dowieść, gdy zważymy, że podobne wieloboki z dwóch odpowiednich punktów wierzchołkowych na jednako leżące podobne trójkąty rozłożyć się dadzą itp.

§. 175.

Zagadnienie. Fig. 91 c. Dany jest trójkąt ABC ; mamy odebrać od niego poprzeczną równoległą do jednego z boków kawałek, któregoby powierzchnia miała się do trójkąta ABC jak 1:5.

Rozwiązanie. Aby z trójkąta ABC odebrać trójkąt, któregoby nowy bok

Fig. 91 c.



$md \parallel AB$, a któryby tak się miał do ABC jak 1:5, dzielimy jeden z innych boków, np. AC w stosunku 1:5, t. j. $ac:CA=1:5$; nad AC jako średnicy zataczamy półkole, w punkcie podziału a wyprowadzamy do AC prostopadłą af , kreślimy cięciwę Cf i przenosimy z C jej długość jako Cm na AC (to odbędzie się za pomocą łuku fm); z punktu m prowadzimy prostą $md \parallel AB$, a ta pierwsza jest ową szukaną linią podziału.

Dowód. Ponieważ $\triangle Cmd \sim \triangle ABC$, przecho

$$\frac{\triangle Cmd}{\triangle ABC} = \frac{\overline{Cm}^2}{\overline{CA}^2} \text{ podług powyższego}$$

twierdzenia §. 174 do Figur 98 i 99) $\frac{\triangle Cnd}{\triangle ABC} = \frac{\overline{Cm}^2}{\overline{CA}^2} = \frac{\overline{Cf}^2}{\overline{CA}^2} = \frac{Ca \cdot CA}{\overline{CA}^2} = \frac{Ca}{CA} = \frac{1}{5}$.

Wniosek. Z tego wynika postępowanie, jak podzielić trójkąt na n równych części.

§. 176.

Zagadnienie. Fig. 91 c. Za pomocą poprzecznych równoległych do AB podzielić trójkąt ABC na pięć równych części.

Rozwiązanie. Prosta AC dzielimy na 5 równych części, w punktach $a, b, c, \dots$; na AC jako średnicy zataczamy półkole, z punktów $a, b, c, \dots$ wyprowadzamy prostopadłe $af, bg, ch, \dots$, z punktu C cięciwami Cf, Cg, Ch itd. jako promieniami, zataczamy łuki przecinające AC w m, n, r i s , przez m, n, r i s , prowadzimy do AB równoległe md, nk, rl i sp , to otrzymamy $\triangle Cnd = \frac{1}{5} \triangle ACB$, $\triangle Cnk = \frac{2}{5} \triangle ACB$, $\triangle Crl = \frac{3}{5} \triangle ACB$, $\triangle Csp = \frac{4}{5} \triangle ACB$; zatem $\triangle Cnd = mdkn = nklr = rls p = spBA = \frac{1}{5} \triangle ACB$.

Dowód. Ponieważ $\triangle Cnd \sim \triangle ABC$, przeto

$$\frac{\triangle Cnd}{\triangle ABC} = \frac{\overline{Cm}^2}{\overline{CA}^2} = \frac{\overline{Cf}^2}{\overline{CA}^2} = \frac{Ca \cdot CA}{\overline{CA}^2} = \frac{Ca}{AC} = \frac{1}{5}; \text{ tak samo ponieważ}$$

$\triangle Ckn \sim \triangle ABC$, przeto

$$\frac{\triangle Ckn}{\triangle ABC} = \frac{\overline{Cn}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{Cg}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{Cb \cdot AC}{\overline{AC}^2} = \frac{Cb}{AC} = \frac{2}{5}; \text{ z czego wynika, ponieważ } \triangle Cnd$$

jest piątą częścią $\triangle ABC$, przeto i trapez $mdkn$ jest piątą częścią tegoż. Następnie $\triangle Crl \sim \triangle ABC$ przeto:

$$\frac{\triangle Crl}{\triangle ABC} = \frac{\overline{Cr}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{Ch}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{Cc \cdot AC}{\overline{AC}^2} = \frac{Cc}{CA} = \frac{3}{5}; \text{ z czego wynika, ponieważ } \triangle Cnk$$

był $\frac{2}{5} \triangle ABC$, przeto i trapez $nklr$ jest 5 częścią $\triangle ABC$. Nareszcie ponieważ $\triangle Csp \sim \triangle ABC$ zatem:

$$\frac{\triangle Csp}{\triangle ABC} = \frac{\overline{Cs}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{Ci}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{Cu \cdot AC}{\overline{AC}^2} = \frac{Cu}{AC} = \frac{4}{5}; \text{ z czego znowu wynika, ponie-}$$

waż $\triangle Crl$ jest $\frac{3}{5}$ części $\triangle ABC$, że także trapez $rlps$ jest $\frac{1}{5}$ częścią $\triangle ABC$, w ten sam sposób trapez $spBa$ jest $\frac{1}{5}$ częścią $\triangle ABC$. Zatem:

$$\triangle Cnd = mdkn = nklr = rls p = spBA = \frac{1}{5} \triangle ABC.$$

§. 177.

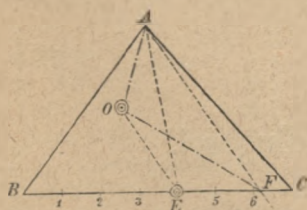
Zagadnienie. Fig. 91 d. Przez punkt O leżący wewnątrz $\triangle BAC$ podzielić trójkąt na dwie części, któreby się miały do siebie jak 4:3.

Rozwiązanie. W ogóle potrzebne będą dwie linie graniczne, przechodzące przez dany punkt, z których jedna jest dowolną. Przyjmijmy najpierw, że jedna linia graniczna przechodzi przez jeden wierzchołek trójkąta. Poprowadźmy AO a żadaną będzie taka prosta OF , aby figura $ABFO$ miała się do $AOFC$ jak 4:3. Jeżeli prosta BC podzielimy tak, aby $BE:EC = 4:3$, to będzie $\triangle BAE:\triangle EAC = 4:3$, zatem $\triangle EAC = \frac{3}{7} \triangle BAC$ (podług fig. 91); zatem figura $AOFC$ musi być równa $\triangle AEC$, lub gdy obustronnie odejmiemy trójkąt FAC , to $\triangle EAF = \triangle OAF$, aby jednak to możebnem było musi $OE \parallel$ do AF być, przeczco zagadnienie to rozwiązaniem zostanie.

Podzielimy mianowicie BC w E w stosunku 4:3, O połączymy z E , poprowadzimy przez A prostą $AF \parallel$ do OE , zaś O połączymy z F . Przy tém wykreśleniu wydarzyć się może, że punkt wypadnie zewnątrz trójkąta.

Uzasadnienie polega na rozwiązaniu.

Fig. 91 d.



§. 178.

Zagadnienie. Fig. 91 f. Dany jest równoległobok $BADC$, mamy go podzielić z punktu O leżącego wewnątrz niego na 3 równe części.

Rozwiązanie. Dany równoległobok dzielimy za pomocą równoległych EH, FG na 3 równe części. Trzecią część $ADHE$ tego równoległoboku zamieniamy na pięciokąt $AEOJD$, to ten będzie równy $\frac{1}{3}ABCD$. Następnie zamieniamy pozostały pięciokąt $EBCJO$ na trójkąt JOL , którego podstawa z podstawą DC zchodzi się, a którego wierzchołek O jest danym punktem. Dzielimy trójkąt JOL na dwie równe części JON i NOL ; z punktu podziału N prowadzimy do OC równoległą MN , to otrzymamy na CB punkt graniczny M , który z O linią graniczną MO łączymy, a czworobok $JOMC = \frac{1}{3}ABCD$, zatem i czworobok $EBMO = \frac{1}{3}ABCD$.

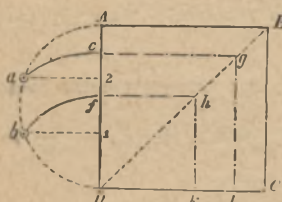
Uwaga. Z tego widzimy, że w podobny sposób można różne prostolinijne figury na równe lub stosunkowe części dzielić.

§. 179.

Zagadnienie. Fig. 91 g. Dany jest kwadrat $ABCD$, nakreślić kwadraty, któreby były $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$ częścią danego kwadratu.

Rozwiązanie. Jeden bok np. AD , dzielimy na 3 równe części, to jest na tyle równych części, ile mianownik tych ułamków jednostek zawiera; na AD zataczamy półkole, prowadzimy DB (trójkąt ABD dzielimy podobnie jak przy rozwiązaniu Fig. 91 e), wyprowadzamy z 1 i 2 do DA prostopadłe, z punktu D zataczamy promieniami Db, Da łuki, nazywamy f i c na DA , kreślimy cg, fh równoległe do AB a z g i h równoległe gl, hk do CB . Kwadrat $fhkD$ jest $= \frac{1}{3}ABCD$, $cglD = \frac{2}{3}ABCD$.

Fig. 91 g.



Wniosek. $Dfhk = klcgh = lCBAcg = \frac{1}{3}ABCD$.

§. 180.

Zagadnienie. Powierzchnie dwóch podobnych figur mają się do siebie jak 7:15; w jakim stosunku są ich jednaki wymiary?

Rozwiązanie. $= \sqrt{7} : \sqrt{15}$
 $= 2.6457513 : 3.8729833$

czyli prawie jak 13:19.

O nowej i starzej miarze długości.

§. 181.

Określenia, wyjaśnienia i tablice przemian.

W cesarsko austriackim państwie jest podstawą prawnych miar i wag *metr*, równający się 10cio milionowej części ćwiartki okręgu koła (czwartą część południka) ziemi, przechodzącego przez paryskie obserwatorium, równający się 3.163749 stóp wied. lub bardzo blisko długości wachadła sekundowego. Metr (^m) dzieli się podług systemu dziesiętnego; przytém jest jeden *decymetr* (^{dm}) = $\frac{1}{10}$

metra, jeden *centymetr* (cm) = $\frac{1}{100}$ metra, jeden *milimetr* (mm) = $\frac{1}{1000}$ metra; jeden *dekametr* (Dm) = 10 metrów, jeden *hektometr* (Hm) = 100 metrów, jeden *kilometr* (Km) = 1000 metrów, jeden *Myryametr* (Mm) = 10000 metrów (lieue). Ar ma 100 metrów kwadratowych, Hektar ma 10000 metrów kwadrat. itd.

Przedtém używaną była za jednostkę miar pewna oznaczona długość zwana sążniewiedeńskim, którą (0) oznaczano. Szósta część sążnia zowie się stopą (1), dwunasta część stopy calem (2), który znowu na 12 linii (3) a linią na 12 punktów (IV) dzielono. Zatem $1^0 = 6' = 72'' = 864''' = 10368^{IV} = \dots$; $1' = 12'' = 144''' = 1728^{IV}$; $1'' = 12''' = 144^{IV}$; $1''' = 12^{IV}$.

Podział sążnia na jego mniejsze części zowie się miarą dwunastą. Do pewnych praktycznych rysunków dzielono sążnie na 10 części, stopy, te na 10 cali, cal na 10 linii itd.; zatem $1^0 = 10 \text{ stóp} = 100 \text{ calom} = 1000 \text{ liniom}$. Ten sposób podziału zowie się dziesiętnym. Pisząc oznaczamy podział dziesiętny przez *dc.* (decem), dwunasty zaś przez *ddc.* (duodecem). Chcąc miarę dwunastą zamienić na dziesiętną, lub odwrotnie, wyrażamy w pierwszym wypadku stopy, cale, linie itp., w częściach dziesiętnych sążnia, a w drugim wypadku części dziesiętne sążnia na stopy, cale itp. zamieniamy.

Następujące tablice, zawierające stare i nowe miary, których użycie nie potrzebuje bliższego objaśnienia, ułatwiają robotę przemiany i konstrukcyi.

Tablice do przemiany.

I. Przemiana miary dwunastej na dziesiętną.

ddc stóp	sążni	metrów	ddc cali	sążni	centy- metrów	ddc linij	sążni	milime trów
1	·1666667	0·3160806	1	·0138889	2·634005	1	·0011574	2·195004
2	·3333333	0·6321612	2	·0277778	5·268010	2	·0023148	4·390008
3	·5000000	0·9482418	3	·0416667	7·902015	3	·0034722	6·585012
4	·6666667	1·2643224	4	·0555556	10·536020	4	·0046296	8·780016
5	·8333333	1·5804030	5	·0694444	13·170025	5	·0057870	10·975020
6	1·0000000	1·8964836	6	·0833333	15·804030	6	·0069444	13·170024
7	1·1666667	2·2125642	7	·0972222	18·438035	7	·0081019	15·365028
8	1·3333333	2·5286448	8	·1111111	21·072040	8	·0092593	17·560032
9	1·5000000	2·8447254	9	·1250000	23·706045	9	·0104167	19·755036
10	1·6666667	3·160806	10	·1388889	26·340050	10	·0115741	21·950040
11	1·8333333	3·4768866	11	·1527778	28·974055	11	·0127315	24·145044
12	2·0000000	3·7929672	12	·1666667	31·608060	12	·0138889	26·340050

II. Przemiana miary dziesiętnej na dwunastą.

Sążnie	miara ddc.	metr	Sążnie	miara ddc.	centy- metr	Sążnie	ddc. linije	milimetr	Sążnie	ddc. linije	milimetr
0·1	0'7'' 2·4'''	0·1896484	0·01	0'' 8·64'''	1·896484	0·001	0·86	1·896484	0·0001	0·09	0·1896484
0·2	1'2'' 4·8'''	0·3792968	0·02	1'' 5·28'''	3·792968	0·002	1·73	3·792968	0·0002	0·17	0·3792968
0·3	1'9'' 7·2'''	0·5689452	0·03	2'' 1·92'''	5·689452	0·003	2·59	5·689452	0·0003	0·26	0·5689452
0·4	2'4'' 9·6'''	0·7585936	0·04	2'' 10·56'''	7·585936	0·004	3·46	7·585936	0·0004	0·35	0·7585936
0·5	3'0'' 0·0'''	0·9482420	0·05	3'' 7·20'''	9·482420	0·005	4·32	9·482420	0·0005	0·43	0·9482420
0·6	3'7'' 2·4'''	1·1378904	0·06	4'' 3·84'''	11·378904	0·006	5·18	11·378904	0·0006	0·52	1·1378904
0·7	4'2'' 4·8'''	1·3275388	0·07	5'' 0·48'''	13·275388	0·007	6·05	13·275388	0·0007	0·60	1·3275388
0·8	4'9'' 7·2'''	1·5171872	0·08	5'' 9·12'''	15·171872	0·008	6·91	15·171872	0·0008	0·69	1·5171872
0·9	5'4'' 9·2'''	1·7068356	0·09	6'' 5·76'''	17·068356	0·009	7·78	17·068356	0·0009	0·78	1·7068356
1·0	6'0'' 0·0'''	1·8964836	0·10	7'' 2·40'''	18·96484	0·010	8·64	18·96484	0·0010	0·86	1·8964836

W Państwie niemieckiem używaną była miara krajów nadreńskich i miara pruska, podług której dwanaście stóp jeden pręt stanowiło. Podziały od stopy na dół są takie jak poprzednio podano, miara ta zowie się *rze-mieślniczą* (Werkmass), zatem $1^0 = 12' = 144'' = 1728''' = \dots$. Obecnie miary metryczne i ciężary są w cesarstwie niemieckiem w powszechnem użyciu. Jeżeli liczby pod rubryką „sążni“ w tablicy I. podzielimy przez 2, a liczby pod nagłówkiem „dłc“ w tablicy II. pomnożymy przez 2, to tablice w ten sposób otrzymane służyć mogą zarazem do *miar reńskich*.

Francya używa także miary dwunastnej (miara staro-francuska) i miary dziesiętnej (nowa francuska miara czyli miara metrowa). Sążen francuski zowie się Toise, i dzieli go na mniejsze części, tak jak sążen wiedeński, aż do linii, którą na 10 punktów dzieli, zatem $1^0 = 6' = 72'' = 864''' = 8640''''$.

Aby różne miary długości porównać z sobą można, wyrażamy te miary jedną i tą samą jednostką. Liczby, które długość (wielkość) rozmaitych miar jedną i tą samą jednostką miary wyrażamy, zowią się liczbami stosunkowemi pojedynczych miar.

1 austr. stopa czyli $\frac{1}{6}$ sążnia	=	12·000 cali w ied.
1 angielska stopa czyli $\frac{1}{3}$ Yard	=	11·572 „ „
1 pruska stopa czyli $\frac{1}{12}$ pręta	=	11·914 „ „
1 paryska stopa czyli $\frac{1}{6}$ toise	=	12·331 „ „
1 metr	=	37·961 „ „
1 milimetr	=	0·037961 „ lub w przybliż. = 0·038.
1 pruski pręt	=	3·766 metra.

Liczby po prawej stronie stojące przedstawiają nam wielkość pojedynczych miar.

O miarze rysunkowej.

§. 182.

Określenia. Jeżeli wymiary długości ograniczonej figury mamy na rysunek przenieść w wielkości nierzeczywistej, ale tylko oznaczone stosunkowe części każdej z tych pojedynczych długości, to otrzymamy, założywszy równość kątów, tak zwany obraz pomniejszony (pomniejszoną podobną figurę) owęj figury. Wymiary jej zowiemy pomniejszonymi miarami danego oryginału. Długość, w której, przy takim pomniejszonym rysunku, wielkość rzeczywistego sążnia (lub metra) przedstawia się, zowiemy pomniejszonym sążniem, względnie pomniejszonym metrem; tak samo pomniejszone stopy, pomniejszone cale, względnie pomniejszone decymetry, centymetry i t. d. Liczba podająca jaką częścią jest każda linija rysunku odpowiedniej linii w rzeczywistości, zowie się stosunkiem pomniejszenia.

1. Jeżeli np. zamiast owęj prostej tylko $\frac{1}{100}$ jej długości zostanie odcięta, to stosunek pomniejszenia = $\frac{1}{100}$, i w tym razie prosta (odległość), która jest w rzeczywistości jeden metr długą, w rysunku jeden centymetr wynosi, lub krótko mówiąc, zmniejszony metr jest jeden centymetr długi, lub podług przyjętego od praktyków sposobu wymawiania jeden centymetr równa się zmniejszonemu metrowi.

2. Jeżeli np. zamiast każdej prostej tylko $\frac{1}{72}$ jej długości przeniesiemy, to stosunek zmniejszenia = $\frac{1}{72}$, a w tym wypadku prosta, która w rzeczywistości sążen jest długą, w rysunku jeden cal wynosi, lub krótko mówiąc, zmniejszony sążen równa się jednemu calowi, lub jak zwykle: jeden cal równa się zmniejszonemu sążniowi.

Kreślenie podziałek.

§. 183.

Zagadnienie. Tab. III., Fig. 92. Nakreślić podziałkę, na którejby sążnie, stopy i cale odmierzać było można, przyczem aby w rysunku zmniejszony sążeń wiedeński równał się $\frac{1}{2}$ wiedeńskiego cala.

Rozwiązanie. Prowadzi się prostą, odcina się na nią np. pięć razy po pół cala, to jeden pół cal przedstawiać będzie jeden sążeń; pół cal leżący po lewej stronie dzieli się na sześć równych części, a jedna taka cząstka np. *mn* przedstawia zmniejszoną stopę, Połowę stopy dzielimy na trzy równe części, to na każdą taką cząstkę wypada 2 cale, które cyrklem także odmierzone być mogą. Prowadzimy dość długie linie podziału, prostopadłe do blisko siebie nakreślonych równoległych; linie te powinny przechodzić dokładnie przez punkta podziału. Od 0 w prawo oznaczamy części przez 1, 2, 3, 4 wiedz. sążnie, a w lewo liczbami 1, 2, 3, 4, 5, 6 w. stopy.

Uwaga. Wyciągając tuszem, wyciąga się jak najcieńszą najpierw linie podziału, następnie poziomo podzieloną prostą. Spodnią równoległą wyciąga się zwykle o wiele grubiej, przez to ozdabia się podziałkę. Ponieważ największe błędy zdarzają się przy wyciąganiu, przeto należy przytém zachować największą staranność. Pomniejszona podziałka jest dla geometry (miernika) do wymierzania prostych na papierze tén samém, co rzeczywista podziałka na polu, jest nadzwyczaj ważnym przyrządem, i bardzo wiele na tén zależy, aby jej podział był dokładny. Najlepsze podziałki są te, które mechanicy na mosiądzu lub pakfongu maszyną do dzielenia wykonali, ale bardzo często wymaga się od rysującego wykonania rozmaitych, celowi odpowiadających, podziałek. Użycie zmniejszonej podziałki polega na tén, że za pomocą niej 1) nietylko linie dané długości na papier przenosimy, ale także 2) linie na papierze mierzymy. Pierwsze odbywa się, gdy daną miarę cyrklem na podziałce odmierzamy i na papier przenosimy, drugie zaś skuteczniejsza się, gdy linię, którą mamy odmierzać, obejmujemy cyrklem i na podziałkę przenosimy.

§. 184.

Zagadnienie. Fig. 93. Nakreślić podziałkę dziesiętną, na którejby sążnie i dziesiętne części sążnia odmierzać było można. Zmniejszony wiedz. sążeń niechaj pół cala wynosi.

Rozwiązanie. Prowadzi się prostą, przenosi się na nią np. pięć równych części, z którychby jednak każda była połową cala; dzieli się pierwszą część leżącą po lewej stronie na 10 równych części, to taka jedna mała część przedstawia $\frac{1}{10}$ sążnia. Np. $mn = \frac{2}{10}$ w. sążnia, $rm = \frac{3}{10}$ w. sążnia, $rn = \frac{5}{10}$ wiedz. sążnia.

§. 185.

Zagadnienie. Fig. 94. Nakreślić podziałkę, na którejby stopy, cale i linie odmierzyć można. Jedna zmniejszona stopa = $\frac{1}{2}$ w. cala.

Rozwiązanie. Przenosi się na prostą np. 4 równe części, a każda z tych części równa się $\frac{1}{2}$ cala, taka część jest zmniejszoną w. stopą. Stopę dzieli się na 12 równych części i wyprowadza z punktów podziału do podzielonej stopy prostopadłe linie podziału. Tén wykreśleniem można stopy i cale odmierzać. Aby i linię odmierzyć było można, przenosi się w górę aż do *a* na pionową linię podziału (12), która przechodzi przez ostatni punkt graniczny, zmniejszony cal, łączy się *a* z punktem przecięcia się linii podzielono-

nę z linią dzielącą (*o*) prostą, to na *kl* pomiędzy ukośną a poziomą prostą zawartą będzie linia, na prostopadłej *3g*, pomiędzy ukośną a poziomą prostą 3 linie, zaś na *9n* jest dziewięć zmniejszonych linii, które cyrklem dokładnie odmierzyć można.

§. 186.

Zagadnienie. Fig. 95. Nakreślić podziałkę dwunastą, na którejby stopy, cale i linie odmierzyć można. Zmniejszona stopa = $\frac{1}{2}$ w. cala.

Rozwiązanie. Kreślimy kąt prosty, którego poziome ramie jest od prostopadłego dłuższe, z punktu 12 przenosimy na prawo 4 połowy cala. Oznaczamy punkta w 0, 1, 2, 3 i wyprowadzamy do podzielonej linii w punktach podziału prostopadłe. Z punktu 3 prostopadłej *b* i z 12 prostopadłej *g* przenosimy dowolną długość dwanaście razy i łączymy na prostopadłych równoleżące punkta podziału prostymi, które w skutek dokładnego rysunku do 12, 3 równolegle leżeć muszą, np. *gb* $\parallel$ 12, 3. Dzielimy zmniejszoną stopę *o12* i dolną trzynastą równolegle nakreśloną pomniejszoną stopę na 12 równych części, i prowadzimy skośnie poprzeczne. Oznaczamy z *o* w lewo cale, a w prawo stopy. Wstawimy cyrkiel w *a* i otworzywszy go aż do *d*, to ta rozwartość obejmie 3 stopy, 5 cali, 1 linię. W *fe* na *gb* można 3 linie odmierzyć; od *b* do *c* można 3 stopy odmierzyć; od *b* do *f* odmierzymy 3 stopy i 3 linie; od *g* do *f* odmierzy się 11 cali, 9 linii.

Uzasadnienie. Wypływa z twierdzenia. Gdy dwa promienie dwoma równoległymi poprzecznymi zostaną przecięte, to stosunek odcinków obu poprzecznych równy będzie stosunkowi odcinków każdego promienia.

Założenie. Fig. 98. *AB* i *AC* są oba promienie przecięte równoległymi poprzecznymi *ED* i *BC*.

Twierdzenie. $BC : ED = AB : AE = AC : AD$.

Dowód. Na podstawie twierdzenia: „gdy dwa promienie dwoma równoległymi poprzecznymi przetniemy, to stosunek dwóch odcinków jednego promienia równy jest stosunkowi odpowiednich odcinków promienia drugiego“;

$$AB : AE = AC : AD \dots \dots \dots (1).$$

Wyobraźmy sobie z punktu *D* równoległą do *AB* tak daleko poprowadzoną aż *BC* padnie w *F*; tę równoległą nazwijmy *DF* i uważajmy *C* jako punkt promieni, zatem *DF* i *AB* jako poprzeczne, to podług ostatniego twierdzenia także $BC : BF = AC : AD$ czyli ponieważ $BF = ED$ będzie

$$BC : ED = AC : AD \dots \dots \dots (2),$$

zatem mamy z (1) i (2) równanie stosunkowe:

$$BC : ED = AB : AE = AC : AD.$$

Dodatek. Jeżeli uczynimy $AB = 6$ części, $AE = 4$ cz., to otrzymamy: $BC : ED = AC : AD = 6 : 4$, zatem *BC* ma 6 równych części i na *ED* wypadają cztery takie równe części. Jeżeli przeto *BC* wynosi sześć zmniejszonych linii wiedeńskich, to *ED* będzie wynosić 4 pomniejszone linie długości.

Uwaga. Wyobraźmy sobie z fig. 95 kąt *foc* wyjęty i na kąt *BAC* przeniesiony tak, aby się wierzchołki i ramiona przykrywały, to uzasadnienie łatwiej poznać będzie można, że pomiędzy ramionami *of* i *oc* od góry na dół na równoległych poprzecznych kolejno jedną, dwie, trzy, cztery, pięć, sześć, siedem, ośm, dziewięć, dziesięć, jedenaście i dwanaście pomniejszych linii wiedeńskich odmierzyć można.

§. 187.

Zagadnienie. Fig. 96. Nakreślić tak zwaną tysięczną podziałkę (Transversal-Massstab).

Rozwiązanie. Długość sto razy większą od najmniejszej jednostki (tu jeden centymetr i trzy milimetry równe pomniejszonym 100 metrom) obejmujemy w cyrkiel i przenosimy ją pięć razy po sobie, na większej płaszczyźnie rysunkowej tyle razy, ile razy potrzeba. Punkta podziału 10, 0, 100, 200....

oznaczamy. W punktach 10, 0, 100, 200, 300, 400 wyprowadzamy prostopadłe do poziomiej 10, 400. Na pierwszą prostopadłą w lewo z punktu 10 na dół przenosimy 10 równych dowolnych części. Tak samo przenosimy z 400 na dół na *ag* te same równe części. Jednakże leżące punkta podziału na *ag* po prawej łączymy prostymi z jednakowo leżącymi punktami podziału na prostopadłej 0, 10 po lewej, które do poziomiej 10, 400 równoległe być muszą. Poziomą odległość 0, 10 jak również tak samo leżącą jedynastą równoległą dzielimy na 10 równych części, i prowadzimy ukośne poprzeczne, jak np. te w *CO*, *is*...

Dowód przeprowadzamy w podobny sposób jak w §. 186.

Przykłady zdejmowania miary.

§. 188.

Objaśnienie. Fig. 96. Na prostej *a9* można odmierzać miary: od *a* do *n* odmierzyć można 400 metrów; od *o* do *1* w lewo na pierwszej poziomiej 10 metrów, tak samo odmierzyć można od *1* do *2* i otrzymamy 10 metrów; od *i* do *n* na poziomiej *a9* odmierzyć można 1 metr; od *i* do *c* 90 metrów, od *c* do *9* odmierzymy 9 metrów. Na czwartej poziomiej 0, 7 odmierzyć można następujące miary: od *O* do *x* zmierzone cyrklem daje 203 metrów. Na 14 jest *sm* = 6^m; na *g2* od *g* do *t* jest 428^m; miara *vt* równa się 51^m. Jeżeli na płaszczyźnie rysunkowej odmierzyć mamy daną prostą, to jej długość obejmujemy w cyrkiel, i tak otwartym cyrklem zbliżamy się prawie poziomo do płaszczyzny podziałki, wzdłuż jednej z prostopadłych, a mianowicie tak, aby drugi koniec wewnątrz owego prostokąta przypadł, w którym poprzeczne się znajdują. Następnie posuwamy ostrożnie wzdłuż takiej pionowej na dół, dopóki drugi koniec cyrkla nie padnie na poprzeczną, a wtedy pionowa setki, poprzeczna dziesiątki, a pozioma jednostki daje. Jeżeli drugi koniec cyrkla nie trafia poprzecznej dokładnie w przecięciu się z poziomą, to można wartość pośrednią pomiędzy dwoma poziomymi ocenić; najczęściej jednak wystarcza obrać najbliższą leżącą poziomą.

Uzasadnienie. Takie samo jakie do fig. 95 przeprowadzono.

Uwaga. Jeżeli w Fig. 96 odległość od 0 do 100 przyjmiemy równą pomniejszonemu decymetrowi, przedłużymy 0, 400 tak daleko w prawo, aby jeszcze od punktu 400 sześć razy odległość 0, 100 przenieść można było, to będzie można przez użycie tych częściowych konstrukcyj odmierzać i przenosić z tej podziałki metry, decymetry, centymetry i milimetry.

Ćwiczenia w odmierzaniu miar i w oznaczaniu miary powierzchni rozmaitych wielokątów.

§. 189.

Figury 79 i 96. Odległość od 0 do 100 = stu metrom.

Figura składa się	C z y n n i k i		Iloczyny
	Podstawy	Wysokości	
△ ABO	OB = 116 ^m	70 ^m	4060
△ BCO	OB = 116 ^m	103 ^m	5974
△ CDO	OD = 200 ^m	25 ^m	2500
△ ODF	OD = 200 ^m	61 ^m	6100

18634□^m = wielok. ABCDFO.

I.	II.	III.	IV.
116×70	116×103	200×25	200×61
$8120 : 2$	348	$5000 : 2$	1200
$4060 \square^m = \triangle ABO.$	$11948 : 2$	$2500 \square^m = \triangle CDO.$	$12200 : 2$
	$5974 \square^m = \triangle BCO.$		$6100 \square^m = \triangle ODF.$

§. 190.

Figury 80 i 96. Odległość od 0 do 100 = dziesięć metrów.

Figura składa się	C z y n n i k i		Iloczyn
	Podstawy	Wysokości	
$\triangle FOL$	FL = 15·6 ^m	7·4 ^m	57·72
$\triangle FGO$	FG = 15·4 ^m	8·7 ^m	66·99
$\triangle GHO$	OG = 10·8 ^m	4·1 ^m	22·14
$\triangle HOJ$	OJ = 11 ^m	5· ^m	27·5
$\triangle JKO$	KJ = 12·4 ^m	7·2 ^m	44·64
$\triangle LOK$	LO = 9·7 ^m	4·1 ^m	19·885

$$238\cdot875 \square^m = \text{Wielok. FGJJKL.}$$

I.	II.	III.	IV.
$15\cdot6 \times 7\cdot4$	$15\cdot4 \times 8\cdot7$	$10\cdot8 \times 4\cdot1$	$12\cdot4 \times 7\cdot2$
109·2	123·2	432	86·8
6·24	10·78	$44\cdot28 : 2$	2·48
$115\cdot44 : 2$	$133\cdot98 : 2$	$22\cdot14 \square^m = \triangle GHO.$	$89\cdot28 : 2$
$57\cdot72 \square^m = \triangle FOL.$	$66\cdot99 \square^m = \triangle FGO.$		$44\cdot64 \square^m = \triangle JKO.$
V.			
$9\cdot7 \times 4\cdot1$			
388			
$39\cdot77 : 2 = 19\cdot885 \square^m = \triangle LOK.$			

§. 191.

Figury 81 i 96. Odległość od 0 do 100 = stu metrom.

Figura składa się	C z y n n i k i		Iloczyn
	Podstawy lub sumy równoległ. boków	Wysokości	
Trpz. OCD1	OC + 1D = 231 ^m	40 ^m	4620
" 1DF3	3F + 1D = 235 ^m	76 ^m	8930
" OCB2	CO + 2B = 114 ^m	51 ^m	2907
" 3FG4	F3 + G4 = 179 ^m	30 ^m	2685
$\triangle AB2$	26 ^m	31 ^m	403
$\triangle GH4$	31 ^m	92 ^m	1426

W figurze 81 jest:

$$\begin{aligned} OC &= 83^m, \quad 1D = 148^m, \quad 3F = 87^m, \\ 2B &= 31^m, \quad O2 = 51^m, \quad \Delta 2 = 31^m, \\ G4 &= 92^m, \quad H4 = 31^m. \end{aligned}$$

I.

$$\begin{array}{r} 231 : 2 \\ 115 \cdot 5 \times 40 \\ \hline 4620 \square^m = \text{Trpz. OCD1.} \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{r} 235 : 2 \\ 117 \cdot 5 \times 76 \\ \hline 8225 \\ 705 \\ \hline 8930 \square^m = \text{Trpz. 1DF3.} \end{array}$$

III.

$$\begin{array}{r} 114 : 2 \\ 57 \times 51 \\ \hline 285 \\ \hline 2907 \square^m = \text{Trpz. COB2.} \end{array}$$

IV.

$$\begin{array}{r} 179 : 2 \\ 89 \cdot 5 \times 30 \\ \hline 2685 \square^m = \text{Trpz. 3FG4.} \end{array}$$

V.

$$\begin{array}{r} 26 \times 31 \\ 78 \\ \hline 403 \square^m = \triangle AB2 \end{array}$$

VI.

$$\begin{array}{r} 92 \times 31 \\ 276 \\ \hline 2852 : 2 \\ \hline 1426 \square^m = \triangle GH4. \end{array}$$

VII.

$$\begin{array}{l} \text{Trpz. OCB2} = 2907 \square^m \\ - \triangle AB2 = -403 \\ \hline 2504 \square^m = \text{Wielok. CBAO.} \end{array}$$

VIII.

$$\begin{array}{l} \text{Wielok. OCD1} = 4620 \square^m \\ \text{„ 1DF3} = 8930 \square^m \\ \text{„ OCDF3} = 13550 \square^m \\ \text{„ —CBAO} = -2504 \square^m \\ \text{„ ABCDF3} = 11046 \square^m \\ \text{„ 3FG4} = 2685 \square^m \\ \triangle GH4 = 1426 \square^m \\ \hline 15157 \square^m = \text{Wielok. ABCDFGH.} \end{array}$$

§. 192.

Figury 82 i 96. Odległość od 0 do 100 = stu metrom.

C z y n n i k i		Iloczyny
Rzędne	Wysokość x	
$y = 43 \}$ $y_{10} = 82 \}$ $y_1 = 53$ $y_2 = 51$ $y_3 = 47$ $y_4 = 48$ $y_5 = 51$ $y_6 = 61$ $y_7 = 75$ $y_8 = 85$ $y_9 = 83$	20	
II. 554		IV. 1250 11080 <u>12330</u> $\square^m = amo 10.$

$$\begin{array}{r} \text{I.} \\ 43 \\ 82 \\ \hline 125 \times 10 \\ \hline 1250 \square^m \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{III.} \\ 554 \times 20 \\ \hline 11080 \\ \hline 1250 \\ \hline 12330 \end{array}$$

Niech będzie:

$$\begin{array}{l} 1. \ y = om, \ y_1 = n1, \ y_2 = 12, \ y_3 = k3, \\ \quad y_4 = h4, \ y_5 = g5, \ y_6 = f6, \ y_7 = d7, \\ \quad y_8 = c8, \ y_9 = b9, \ y_{10} = a10. \end{array}$$

$$2. \ x = 0, 1 = 1, 2 = 2, 3 = 3, 4 = 4, 5 = 5, 6 = 6, 7 = 7, 8 = 8, 9 = 9, 10.$$

$$3. \ \text{Wielokąt } abc, \dots, mo \ 10 =$$

$$= (y + y_{10}) \frac{x}{2} + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9) x.$$

Podziałka stosunkowa.

§. 193.

Określenie. Służy do wyrażenia części w najrozmaitszych formach ułamkowych pomniejszonej jednostki liniowej.

§. 194.

Zagadnienie. Fig. 97, 97 α. Nakreślono jakikolwiek gzyms, którego wymiar wysokości oznaczają zewnętrzne poziome i pionowe, i mogą być uważane jako pomniejszone jednostki liniowe; mamy zbadać jakimi częściami są pojedyncze występy i wysokości członków gzymsu względem jednostki wysokości.

Rozwiązanie. Prowadzimy poziomą MN i wyprowadzamy do niej z dowolnie obranych punktów 6 i 2 prostopadłe RS i SO . Następnie odmierzamy wysokość danego gzymsu i przenosimy ją od NM z punktów 2 i 6 na dół, przezco otrzymamy punkta O, O ; przez punkta O, O prowadzimy równoległą AA' do NM . Prostopadłą po prawej stronie będącą $O2$ połowimy w 1 i przenosimy połowę 1, 2 trzy razy do góry nad NM . Obieramy dowolny punkt A' i łączymy go z punktami 1, 2, 3, 4 i 5 prostymi, które NM w n, p i s przecinają, poczem wyprowadzamy z tych punktów do NM prostopadłe nm, pr, st . Teraz można odmierzyć na nm trzecie części, na pr czwarte a na st piąte części. Na prostopadłej RS podzielmy jednostkę 06 przeniesioną poniżej MN na sześć równych części, które pojedynczo z 6 nad NM do góry przenosimy, tak mamy 12, 18, 24 i 30 takich równych części. Na poziomej AA' obierzmy dowolny punkt A i połączmy go z wszystkimi punktami podziału prostej RS , przezco powstaną punkta przecięcia w f i k etc. Prowadząc z f i k prostopadłe do NM , to na fg siódme, zaś na kl ósme części odmierzać będzie można. Przez inne punkta podziału prowadzimy dalsze prostopadłe na NM , a otrzymamy dziewiąte, dziesiąte, jedenaste itd. części. Chcąc wiedzieć jaką częścią jednostki wysokości gzymsu jest poziomy występ rowku okapowego, bierzemy go w cyrkiel, końce cyrkla przenosimy na płaszczyznę podziałki pomiędzy nm w położeniu pionowym i posuwamy cyrkiel tak długo w lewo, dopóki oznaczonyj części miary nie obejmie, jak tu np. $\frac{1}{6}$ itd.

Polega na *twierdzeniu*. Gdy w trójkącie jeden bok na kilka równych części podzielimy i każdy punkt podziału połączmy z przeciwległym wierzchołkiem, to każda prosta poprowadzona równolegle do tego boku w trójkącie, będzie przez to również na tyle równych części podzieloną.

Założenie. W trójkącie $A'05$ jest bok 05 na 5 równych części podzielony, A' punkt wierzchołkowy nicforemnego sześciopromienia $A'0, A'1, A'2, A'3, A'4, A'5, A'6$, $st \parallel pr \parallel nm \parallel 05$. Figura 97.

Twierdzenie. nm dostatecznie przedłużone, pr dostatecznie przedłużone i st będą od promieni na 5 równych części podzielone.

Dowód. Trójkąty $A'01$ i $A'mz$ są podobne, dlatego mamy:

$$01 : mz = A'1 : A'z; \text{ wskutek podobieństwa trójkątów } 1A'2 \text{ i } zA'w \text{ jest także}$$

$$1,2 : zw = A'1 : A'z; \text{ zatem stosunki } 01 : mz \text{ i } 1,2 : w, \text{ będąc oba jednemu i temu samemu}$$

$$01 : mz = 1'2 : zw \text{ trzeciemu stosunkowi równe, także pomiędzy sobą równe być muszą.}$$

Podług założenia są jednak poprzedniki 0,1 i 1,2 równe, zatem i następni mz i zw równe być muszą. W podobny sposób można dowieść, że $zw = wn = itd.$ Zatem także mn zostało na pięć równych części podzielone.

Tak samo dowodzimy, że rp do $A'5$ i ts na pięć równych części podzielone zostały.

Dodatek. Poprzeczna $MN \parallel A'0$ podaje tylko te punkta w promieniach, przez które równoległe do 05 poprowadzone być mają i $st = pr = nm = 2,0$ jako równoległe pomiędzy równoległymi; dlatego to można z 02 przyjętej za jednostkę liniową zdejmować połowy, z nm trzecie z pr czwarte, a wreszcie z st piąte części.

Uwaga. Dowód dla części ułamkowych $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$ itd. w trójkącią ARO jest tensam.

Różne zagadnienia dla początkujących konstruktorów.

§. 195.

1. *Zagadnienie.* Tak zwany papier olbrzymi (*Elefantpapier*) jest 67 cent. szeroki a 1.025 m. długi, mamy na nim w prostokącie, który 5400□ cent. wynosi wykonaną praktyczną konstrukcję (wykreślenie); podziałka przytém umieszczona jest tego rodzaju, że pomniejszony na niej metr równa się 2 rzeczywistym centymetrom. Mamy wykonać tę samą praktyczną konstrukcją na tak zwanym *papierze małym median*, który jest 40 cent. szeroki a 50 cent. długi a mianowicie w prostokącie narysowanym na tym papierze, którego jeden bok 33·3 a drugi 50 cent. wynosi; chcemy wiedzieć, jak wielką podziałkę konstruujemy (tj. pomniejszony metr) na tym *małym median papierze* obrać należy, aby wewnątrz granic danego prostokąta, który do pierwszego jest podobny, zmieścić całe wykreślenie.

Rozwiązanie. Ponieważ podobne wymiary podobnych figur są w stosunku jak pierwiastki kwadratowe z powierzchni tych figur, przeto:

$$\sqrt{5400} : \sqrt{1666 \cdot 665} = 2 : x, \text{ ztąd } x = 2 \sqrt{\frac{1666 \cdot 665}{5400}} = 2 \sqrt{0 \cdot 308641} = 2 \cdot 0 \cdot 555 = 1 \text{ centymetr i 1 milimetr.}$$

Uwaga. Jeżeli mamy dane oba wymiary prostokąta nie zaś jego powierzchnią na papierze olbrzymim, a mianowicie jeżeli szerokość wynosi 60 centymetrów, a długość 90 cent., i gdy oba prostokąty są podobne, to zapomocą następującej proporcji przyjdziemy do drugiej podziałki: $90 : 50 = 2 : x$, $x = \frac{100}{90} = 1 \cdot 1 \text{ cent.}$

§. 196.

2. *Zagadnienie.* Na papierze rysunkowym Imperial krajów nadreńskich, który 54 cent. szeroki a 74 cent. długi jest, w prostokącie 50 cent. wysokim i 70 cent. długim wykonany jest rysunek maszyny, z podziałką gdzie 5 rzeczywistych centymetrów równe jest pomniejszonemu metrowi; mamy wykonać tę samą konstrukcję na angielskim Bristol papierze, który jest 36 cent. szeroki a 45 cent. długi, w obwódce prostokątnej, która 1260□ cent. zawiera; jak wielki będzie pomniejszony metr. tj. pomniejszona jednostka liniowa, aby cała konstrukcja wygodnie w tę małą obwódkę wrysowaną być mogła.

Rozwiązanie. Podobne wymiary podobnych figur są w stosunku jak pierwiastki kwadratowe z powierzchni tychże figur, dlatego:

$$\sqrt{1260} : \sqrt{3500} = x : 5. \text{ ztąd } x = 5 \sqrt{\frac{1260}{3500}} = 5 \sqrt{0 \cdot 36} = 5 \cdot 0 \cdot 6 = 3 \text{ cent.}$$

Uwaga. Jeżeli zamiast powierzchni 1260□ cent. prostokąta, którego oba boki 30 cent. szerokie i 42 cent. długie wraz z innymi bokami są dane, to rachunek upraszcza się przez użycie następujących proporcji: $70 : 42 = 5 : x$,

$$x = \frac{42 \cdot 5}{70} = 210 : 70 = 3 \text{ centym.}$$

§. 197.

3. *Zagadnienie.* Na papierze fumskim Royal, 50 centym. szerokim, 67 centym. długim, wykonano architektoniczną konstrukcję, podziałkę 2 cen-

tym. równe pomniejszonemu metrowi; ten sam rysunek mamy przerysować pomniejszoną podziałką na angielskim papierze Bristol, który jest 30 centym. szeroki, 38 centym. długi, w prostokącie, który 904·8□ centym. zawiera; jak należy pomniejszyć jednostkę wymiarową czyli pomniejszony metr?

Rozwiązanie. $\sqrt{3350} : \sqrt{904\cdot8} = 2 : x$, $x = 2 \sqrt{\frac{904\cdot8}{3350}} = 2 \sqrt{0\cdot27009}$
 $= 2\cdot0\cdot519 = 1\cdot03$ centym.

Uwaga. Jeżeli w powyższém zadaniu przyjmiemy zamiast 904·8□ centym. wymiary 26 cent. szerokości, 34·8 długości podobnego prostokąta, to to rozwiązanie zamieni się na następujące: $67 : 34\cdot8 = 2 : x$, złąd $x = \frac{34\cdot8\cdot2}{67} = 1\cdot03$ cent.

§. 198.

4. *Zagadnienie.* Na nadreńskim rysunkowym papierze Super-Royal, 48 centim. szerokim, 68 centim. długim, znajduje się architektoniczny rysunek w obwódce prostokątnej, zawierającej 2816□ centym., a wykonany podziałką, której pomniejszona jednostka liniowa, t. j. pomniejszony metr, równa się 1·5 rzeczywistego centymetra. Jak wielką mamy obrać pomniejszoną jednostkę wymiarową, t. j. pomniejszony metr, aby tę samą konstrukcyę w pomniejszonym wymiarze na angielski papier rysunkowy przenieść, który w handlu znany jest pod nazwą *Demy*, a który jest 40 centym. szeroki, 51·5 centym. długi, i przedstawić go w obwódce prostokątnej 35 centym. szerokiej i 50 centym. długiej?

Rozwiązanie. $\sqrt{2816} : \sqrt{1750} = 1\cdot5 : x$, $x = 1\cdot5 \sqrt{\frac{1750}{2816}} = 1\cdot5 \times 0\cdot78$
 $= 1\cdot17$ centymetrów.

Uwaga. W powyższém zadaniu mamy zamiast 2816□ centym., oba wymiary podobnego prostokąta dane, przeto sposób rozwiązania schodzi do następującego: $64 : 50 = 1\cdot5 : x$, złąd $x = 1\cdot17$ centymetrów.

§. 199.

5. *Zagadnienie.* Techniczny rysunek przedstawiono na angielskim papierze Bristol w obwódce prostokątnej, której powierzchnia 2196□ centym. zawiera, szerokość papieru wynosi 45 centym. a długość 55 centym.; pomniejszona podziałka na papierze tym umieszczona zawiera 1·5 rzeczywistych centym. równych jednemu pomniejszonemu metrowi. Rysunek ten mamy powiększyć na flumskim maszynowym papierze rysunkowym, który 8032·5□ centym. powierzchni wynosi, za pomocą podziałki którą dopiero oznaczyć mamy, aby przestrzeń papieru na powiększenie wystarczyła?

Rozwiązanie. $\sqrt{2196} : \sqrt{8032\cdot5} = 1\cdot5 : x$, $x = 1\cdot5 \sqrt{\frac{8032\cdot5}{2196}}$
 $= 1\cdot5 \sqrt{3\cdot6577864} = 1\cdot5\cdot1\cdot9125 = 2\cdot868$ centym.

Uwaga. Jeżeli zamiast miary powierzchni podobnych prostokątów, dane są ich wymiary: 40 centym. szerokość, 54·9 centym. długość i 76·5 cent. szerokość, potem 1 metr 5 centym. długość, obok pomniejszonej podziałki, t. j. 1·5 centym. równe jednemu pomniejszonemu metrowi pierwszego prostokąta, to rozwiązanie polega na następującej proporcji:

$$54\cdot9 : 105 = 1\cdot5 : x, x = \frac{105 \times 1\cdot5}{54\cdot9} = 2\cdot868 \text{ centym.}$$

Konstrukcja podobnych figur.

§. 200.

Określenie. Takie figury, które się tylko swą wielkością odróżniają, co do kształtu jednak są jednakowe, zowiemy podobnymi figurami.

Podobieństwo trójkątów.

§. 201.

Określenie. Aby pojęcie podobieństwa dwóch trójkątów ustalić, zauważmy trójkąt ABC **Fig. 98**, obierzmy na prostej AB jakiś punkt np. E i przez ten nakreślmy równoległą ED do boku BC ; przezto powstaną dwa trójkąty ABC i AED , mające wszystkie kąty parami równe, gdyż kąt przy A jest wspólny, kąt $ABC = \sphericalangle AED$, jako kąty jednostronne odpowiadające, toż samo kąt $BCA = \sphericalangle EDA$ jako jednostronne odpowiadające. Pomiędzy bokami zaś zachodzą stosunki, które można w następujący sposób wykazać: szukamy na-przód stosunku zachodzącego pomiędzy bokami AB i AE (podług figury 14 i oznaczenia stosunku zachodzącego pomiędzy dwoma prostymi); w tym celu przyjmijmy, że $A1$ jest wspólną miarą tych boków, a mianowicie: że $A1$ mieści się w AB 6 razy, w AE 4 razy, lub ogólnie: wspólna miara mieści się w AB m razy, zaś w AE n razy; na mocy tego można ułożyć proporcję: $AB : AE = 6 : 4$ lub w ogóle: $AB : AE = m.A1 : n.A1$ czyli że $AB : AE = m : n$. Nakreślmy teraz przez każdy punkt podziału na linii AB równoległe do BC , to te (na mocy dawniej dowiedzonego) podzielą bok AC na 6 równych części, z których 4 zawiera AD , czyli ogólnie: bok AC zostanie podzielony na m równych części, z których n przypada na AD ; a zatem $AC : AD = 6 : 4$, lub ogólnie: $AC : AD = m : n$; nakreślmy również przez punkta podziału na linii AB proste równoległe do AC , to te podzielą bok BC na 6 równych części, zaś ED na 4 części równe czyli ogólnie: BC zostanie podzielone na m części równych, zaś ED na n takich samych części, t. j. że pojedyncze cząstki linii BC są równe pojedynczym częściom linii ED (jako równoległe zawarte pomiędzy równoległymi); ztąd też wypływa: $BC : ED = 6 : 4$, lub ogólnie: $BC : ED = m : n$. Widzimy więc, że w obu trójkątach boki leżące naprzeciwko odpowiednich kątów równych, są do siebie w stosunku jak $m : n$.

Jeżeli więc w jednym trójkącie BAC nakreślmy równoległą ED do boku BC , to powstanie trójkąt EAD , którego kąty są równe kątom trójkąta BAC , zaś boki są proporcjonalne odpowiednim bokom danego trójkąta.

Oba trójkąty BAC i EAD różnią się co do swęj wielkości, lecz zgadzają się co do kształtu i dlatego zowią się trójkątami podobnymi ($\sim$ znak podobieństwa).

1szy wniosek. Prosta równoległa do jednego boku trójkąta odcina trójkąt drugi, podobny do danego.

2gi wniosek. W dwóch trójkątach podobnych muszą być wszystkie kąty parami równe, zaś boki leżące naprzeciwko równych kątów muszą być proporcjonalne.

Do podobieństwa dwóch trójkątów należy sześć własności, które przykładami na trójkątach ABC i AED stwierdzimy:

Podzielmy BA na 6, w ogóle na m równych części.

Kąt $BAC = \sphericalangle EAD$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AED$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADE$.

Boki zaś: $AB : AE = 6 : 4$ lub w ogóle jak $m : n$; $AC : AD = m : n$ i $BC : ED = m : n$, ztąd wynika $AB : AE = AC : AD = BC : ED$.

Uwaga. Do określenia podobieństwa trójkątów nie potrzeba używać wszystkich sześciu warunków, gdy bowiem jedno z nich mają miejsce, już przez to i drugie zachodzić muszą.

Określenia. 1. Boki leżące naprzeciwko równych kątów zowią się *równoleżąciami bokami* (homologe Seiten) lub *odpowiadająciami*.

2. Kąty leżące naprzeciwko boków odpowiadających są równe i zowią się *kątami odpowiadająciami* lub *równoleżąciami*.

Z pomocą powyższych wiadomości i wypływających ztąd twierdzeń można rozwiązać następujące:

Zadanie. Przez dany punkt E (Fig. 98) nakreślić równoległą ED do prostej danej BC .

Rozwiązanie. Przez dane punkta B i E kreślę linię prostą i dzielę długość BE na dowolną ilość równych części, np. na dwie równe części, i jedną z nich przenoszę od E do A kilka razy, np. 4 razy, łączę A z C prostą AC i tę dzielę na tyle równych części, na ile podzieloną jest prosta AB , w obecnym wypadku więc na sześć równych części; oznaczam punkt D , w takiej odległości, aby długość AD wynosiła cztery równe części odejęte na linii AC ; w końcu kreślę przez punkta E i D prostą ED , która jest żadaną równoległą do BC .

Konstrukcyja powyższa polega na *twierdzeniu*: jeżeli prosta jakaś dzieli dwa boki trójkąta na części proporcjonalne, to jest zarazem równoległą do boku trzeciego.

Przyjęcie. 1. $AB : AE = AC : AD$,
2. $AE : EB = AD : DC$,
3. $AB : EB = AC : DC$,

Założenie. $ED \parallel BC$.

Dowód. Przez punkt F , leżący na linii AC pomiędzy D i C , kreślę prostą EF . Przypuśćmy, że EF , nie zaś ED jest równoległą do BC , natenczas musiałby być według 1go i 2go wniosku niniejszego paragrafu: $AB : AE = AC : AF$, według 1go przyjęcia zaś jest:

$$AB : AE = AC : AD,$$

ponieważ w tych dwóch proporcjach wyrazy stosunków pierwszych, tudzież poprzedniki stosunków drugich, są równe, przeto i następni tj. czwarte wyrazy muszą być równe, tj. $AF = AD$. Obie więc te linie schodzą się razem, punkt F pada na D , a prosta EF na ED , ztąd więc wynika, że $ED \parallel BC$. *C. b. d. o.*

Uwaga. W podobny sposób dowieść można 2gie i 3cie przyjęcie.

§. 202.

Twierdzenie 1. Dwa trójkąty są podobne, jeżeli mają wszystkie trzy kąty parami równe (lub jeżeli dwa kąty jednego są równe dwom kątom drugiego trójkąta).

Przyjęcie. Figury 98 i 99. $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle E'$, $\sphericalangle C = \sphericalangle D'$.

Założenie. $\triangle ABC \sim \triangle A'E'D'$.

Dowód. Przenieśmy bok $A'E'$ na równoleżący AB i uczynmy $AE = A'E'$, wykreślmy z E równoległą do BC , tak aby AE było bokiem trójkąta AED , natenczas powstanie $\triangle AED \sim \triangle ABC$, podług 1go wniosku (podobieństwo trójkątów); a że $\triangle AED \cong \triangle A'E'D'$ (mają bowiem jedną parę równych boków i dwie pary równych kątów bokom tym przyległych), zatem $\triangle A'E'D' \sim \triangle ABC$.

§. 203.

Twierdzenie 2. Dwa trójkąty są podobne, jeżeli dwa boki jednego są proporcjonalne dwom bokom drugiego trójkąta, a kąty temi bokami objęte są równe.

Przyjęcie. Figury 98 i 99. $AB : AC = A'E' : A'D'$ i $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$.

Założenie. $\triangle ABC \sim \triangle A'E'D'$.

Dowód. Bok $A'E'$ przenoszę na równoleżący AB i odeinam $AE = A'E'$, kreślę z E równoległą do BC tak, aby AE było bokiem trójkąta AED , natenczas $\triangle AED \sim \triangle ABC$ (ponieważ bok $ED \parallel BC$) podług 1go wniosku, a ztąd wynika, że $AE : AD = AB : AC$, nadto

$$AB : AC = A'E' : A'D' \text{ według przyjęcia,}$$

$AE : AD = A'E' : A'D'$. Ponieważ więc $AE = A'E'$ na mocy wykreślenia, przeto i następniaki AD i $A'D'$ muszą być równe; ztąd wynika, że $\triangle AED \cong \triangle A'E'D'$ według 1go przypadku przystawiania trójkątów, a zatem $\triangle A'E'D' \sim \triangle ABC$.

§. 204.

Twierdzenie 3cie. Dwa trójkąty są podobne, jeżeli trzy boki jednego są proporcjonalne trzem bokom drugiego trójkąta.

Przyjęcie. Fig. 98 i 99. $E'D' : E'A' : A'D' = BC : BA : AC$.

Założenie. $\triangle ABC \sim \triangle A'E'D'$.

Dowód. Odetnijmy na AB i AC kawałki $AE = A'E'$ i $AD = A'D'$, wykreślimy prostą ED , a otrzymamy $\triangle AED \sim \triangle ABC$, gdyż według przyjęcia i wykreślenia: $EA : AD = BA : AC$ (podług 2go twierdzenia o podob. trójk.). W trójkątach więc EDA i ABC jest $EA : ED = AB : BC$; lecz także w trójkątach $A'E'D'$ i ABC jest: $A'E' : E'D' = AB : BC$. Ponieważ zaś $EA = E'A'$ z odejęcia, przeto z porównania tych dwóch proporcji wynika, że także ED , bok trójkąta EAD równa się $E'D'$ bokowi trójkąta $E'A'D'$; oba więc trójkąty przystaną do siebie na mocy 3go przyp. przyst. trójk.

Ponieważ więc $\triangle AED \sim \triangle ABC$, przeto i $\triangle A'E'D' \sim \triangle ABC$, ztąd wynika, że i kąty równoleżące są w obu trójkątach odpowiednio sobie równe.

§. 205.

Twierdzenie 4te. Dwa trójkąty są podobne, jeżeli dwa boki jednego są proporcjonalne dwóm bokom drugiego trójkąta, a kąty jednostronne odpow. leżące naprzeciwko większych boków proporcjonalnych są równe.

Przyjęcie. Fig. 98 i 99. W obu trójkątach ABC i $A'E'D'$ niechaj będzie: $AB : A'E' = AC : A'D'$; AC i $A'D'$ niechaj będą większemi bokami proporcjonalnymi, naprzeciwko których leżące kąty ABC i $A'E'D'$ są równe.

Założenie. Pozostałe kąty równoleżące w tych obu trójkątach są równe, tj., że te dwa trójkąty są podobne.

Dowód. Wykreśliwszy $AE = A'E'$ i $AD = A'D'$, nakreślimy ED . Ponieważ jednak $AB : A'E' = AC : A'D'$ według przypuszczenia, więc też:

$AB : AE = AC : AD$ według wykreślenia; ztąd wynika, że ED jest równoległą do BC według twierdzenia §. 201. $AD > AE$. A więc kąt $AED = \sphericalangle ABC$, jako kąty jednostronne. Ponieważ jednak według przyjęcia, także $\sphericalangle A'E'D' = \sphericalangle ABC$, przeto $\sphericalangle AED = \sphericalangle A'E'D'$. Trójkąty AED i $A'E'D'$ przystają na mocy 4go przyp. przyst. trójkątów a), a zatem $\sphericalangle BAC = \sphericalangle E'A'D'$. Ztąd więc wynika, że oba trójkąty ABC i $A'E'D'$ są podobne (na mocy 1go twierdzenia o podobieństwie).

§. 206.

5. twierdzenie. Dwa trójkąty są podobne, jeżeli boki jednego są prostopadłe do boków drugiego.

Przyjęcie. **Fig. 100.** W trójkątach ABC i $A'B'C'$ jest: $A'B' \perp AB$, $B'C' \perp BC$ i $A'C' \perp AC$.

Założenie. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Dowód. $\sphericalangle b = \sphericalangle b'$ jako dopełnienie kątów ostrych przy wierzchołkach utworzonych przez AB i $B'C'$ (fig. 27 a.) i $\sphericalangle c = \sphericalangle c'$ jako spełnienie kąta czworoboku, którego jednym ramieniem jest $A'C'$, zaś drugim przedłużenie $B'C'$. Ztąd wypływa, iż oba te trójkąty są według 1. twierdzenia o podobieństwie trójkątów podobne.

Skutkiem tego boki równoleżące są proporcjonalne

§. 207.

6. *twierdzenie.* Dwa trójkąty, których boki są parami równoległe, są podobne.

Dowodu dostarcza następujące twierdzenie: kąty, których ramiona są parami równoległe i rozchodzą się w jedną stronę lub w strony przeciwne, są równe; a także z 1go twierdzenia.

Kreślenie trójkątów podobnych.

§. 208.

Zagadnienie. Wykreślić na mocy 1. twierdzenia trójkąt podobny do trójkąta ABC (fig. 28), a leżący zewnątrz niego.

Rozwiązanie. Kreślę $E'D'$ większe lub mniejsze od BC , czynię $\sphericalangle A'E'D' = \sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle A'D'E' = \sphericalangle ACB$; ramiona tych kątów przecinają się w A' ; powstały ztąd kąt $D'A'E' = \sphericalangle CAB$, a więc trójkąty $E'A'D'$ i ABC są podobne.

§. 209.

Zagadnienie. Nakreślić według 2. twierdzenia trójkąt podobny do ABC (fig. 98), a którego boki były w stosunku do boków danego trójkąta jak 5:6.

Rozwiązanie. **Fig. 99.** Kreślę kąt $E'A'D' = \sphericalangle BAC$, dzielę boki AB i AC na 6 równych części i wziawszy w cyrkiel 5 z nich, przenoszę je z A' na $A'E'$, tak więc $E'A' = \frac{5}{6} AB$, w takisam sposób przenoszę $\frac{5}{6}$ części AC od A' na $A'D'$, przeto $A'D' = \frac{5}{6} AC$; nareszcie łączę punkt E' z D' prostą $E'D'$, a ztąd otrzymuję trójkąt $E'A'D' \sim \triangle ACB$.

§. 210.

Zagadnienie. Nakreślić, na mocy 3. twierdzenia, trójkąt podobny do trójkąta $E'A'D'$, tak aby stosunek boków obu trójkątów był 4:6 czyli 2:3.

Rozwiązanie. Każdy bok trójkąta $E'A'D'$ dzielę na 4 równe części, kreślę BC i przenoszę nań $E'D' + \frac{1}{2} E'D'$ tj. czynię $BC = E'D' + \frac{1}{2} E'D'$. Z B promieniem $E'A' + \frac{1}{2} E'A'$ zataczam łuk po nad linią BC , a ten przecnie się w A z drugim łukiem zatoczonym z C promieniem $A'D' + \frac{1}{2} A'D'$; nakoniec łączę A z B i C i otrzymuję żądany $\triangle ABC \sim \triangle E'A'D'$.

§. 211.

Zagadnienie. Na zasadzie 4. twierdzenia, wykreślić trójkąt podobny do ABC (fig. 98), boki obu trójkątów mają być do siebie w stosunku 3:2.

Rozwiązanie. **Fig. 98 i 99.** Kreślę kąt $A'E'D' = \sphericalangle ABC$, bok AB dzielę na 3 równe części i odeinam $A'E' = \frac{2}{3} AB$ czyli równe AE ; z punktu A' promieniem $\frac{2}{3} AC$ tj. AD zataczam łuk, który przecnie ramię $E'D'$ w D' , punkt

ten łącząc z A' linią prostą i otrzymuję żądany $\triangle A'E'D' \sim \triangle ABC$ i odpowiadający postawionym warunkom.

§. 212.

Zagadnienie. Do $\triangle ABC$ (fig. 100) wykreslić, na zasadzie 5. twierdzenia, trójkąt do niego podobny.

Rozwiązanie. Przyjmijmy A' np. zewnątrz trójkąta ABC i wykreslny z tego punktu prostopadłą $A'B'$ na przedłużenie AB , podobnież $A'C' \perp AC$ i $B'C' \perp BC$, a otrzymamy ztąd $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

§. 213.

Zagadnienie. Nakreślić trójkąt podobny do BAC (fig. 98) na mocy 6go twierdzenia.

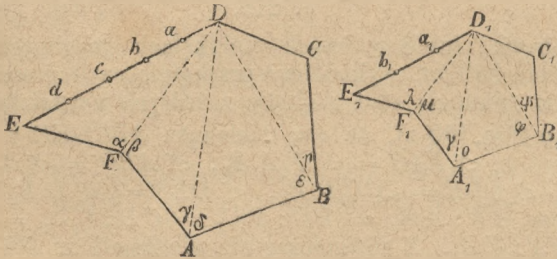
Rozwiązanie. Fig. 99. W pewnej odległości od prostej BA kreślę do niej równoległą $A'E'$ i tę przecinam prostą $A'D'$ równoległą do AC , podobnież kreślę prostą $E'D'$ równoległą do BC i tak, aby się z wykreślonymi ramionami przecinała, a wskutek tego otrzymam $\triangle E'A'D' \sim \triangle BAC$.

O podobieństwie wielokątów i wynikających ztąd sposobach kreślenia wielokątów podobnych.

§. 214.

1. **twierdzenie.** W dwóch wielokątach, składających się z równej liczby podobnych i w tym samym porządku ułożonych trójkątów, kąty odpowiednie są równe a boki naprzeciwko nich leżące proporcjonalne.

Fig. 100 a.



Przyjęcie. Fig. 100 a. W obu wielokątach $ABCDEF$ i $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ następujące trójkąty są podobne i jednakowo ułożone: $\triangle DEF \sim \triangle D_1E_1F_1$, $\triangle DFA \sim \triangle D_1F_1A_1$, $\triangle DAB \sim \triangle D_1A_1B_1$, $\triangle DBC \sim \triangle D_1B_1C_1$.

Założenie. $\sphericalangle DEF = \sphericalangle D_1E_1F_1$, $\sphericalangle EFA = \sphericalangle E_1F_1A_1$, $\sphericalangle FAB = \sphericalangle F_1A_1B_1$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1$, $\sphericalangle BCD = \sphericalangle B_1C_1D_1$ i $\sphericalangle CDE = \sphericalangle C_1D_1E_1$; oraz:

$DE : D_1E_1 = EF : E_1F_1 = FA : F_1A_1 = AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = CD : C_1D_1$.

Dowód. Ponieważ trójkąty DEF i $D_1E_1F_1$ są podobne, przeto odpowiednie kąty są równe, a ztąd $\sphericalangle EFD = \sphericalangle E_1F_1D_1$. Z podobieństwa trójkątów DFA i $D_1F_1A_1$ wynika, że $\sphericalangle DFA = \sphericalangle D_1F_1A_1$, a zatem kąt EFA w pierwszym wielokącie, złożony z kątów EFD i DFA , jest równy kątowi $E_1F_1A_1$, w drugim wielokącie złożonemu z kątów $E_1F_1D_1$ i $D_1F_1A_1$, $\sphericalangle FAD = \sphericalangle F_1A_1D_1$. $\triangle DAB \sim \triangle D_1A_1B_1$, a więc kąty odpowiednie są równe,

mianowicie: $\sphericalangle DAB = \sphericalangle D_1A_1B_1$, $\sphericalangle ABD = \sphericalangle A_1B_1D_1$, a ztąd $\sphericalangle FAD + \sphericalangle DAB = \sphericalangle F_1A_1D_1 + \sphericalangle D_1A_1B_1$ czyli $\sphericalangle FAB = \sphericalangle F_1A_1B_1$; $\triangle DBC \sim \triangle D_1B_1C_1$, a ztąd wynika, że $\sphericalangle DBC = \sphericalangle D_1B_1C_1$, $\sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC = \sphericalangle A_1B_1D_1 + \sphericalangle D_1B_1C_1$, czyli że $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1$, tak samo $\sphericalangle BCD = \sphericalangle B_1C_1D_1$, a wreszcie: $\sphericalangle EDF + \sphericalangle FDA + \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC = \sphericalangle E_1D_1F_1 + \sphericalangle F_1D_1A_1 + \sphericalangle A_1D_1B_1 + \sphericalangle B_1D_1C_1$ czyli że $\sphericalangle CDE = \sphericalangle C_1D_1E_1$. Kąty więc odpowiednie w obu wielokątach są równe.

Z podobieństwa trójkątów DEF i $D_1E_1F_1$ wynika dalej:

1. $DE : D_1E_1 = EF : E_1F_1$, a dla tej samej przyczyny:
 $EF : E_1F_1 = FD : F_1D_1$, a że z podobieństwa trójkątów DFA i $D_1F_1A_1$
 $FD : F_1D_1 = FA : F_1A_1$
2. $EF : E_1F_1 = FA : F_1A_1$. A że $\triangle DFA \sim \triangle D_1F_1A_1$, więc też:
 $FA : F_1A_1 = AD : A_1D_1$; ponieważ jednak $\triangle DAB \sim \triangle D_1A_1B_1$, więc znowu
 $AD : A_1D_1 = AB : A_1B_1$
3. $FA : F_1A_1 = AB : A_1B_1$; a z podobieństwa $\triangle DAB$ i $\triangle D_1A_1B_1$ wynika:
 $AB : A_1B_1 = DB : D_1B_1$ tożsamo, ponieważ $\triangle DBC \sim \triangle D_1B_1C_1$ jest:
 $DB : D_1B_1 = BC : B_1C_1$

4. $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1$, ponieważ $\triangle DBC \sim \triangle D_1B_1C_1$, więc na koniec

5. $BC : B_1C_1 = CD : C_1D_1$. Z 1, 2, 3, 4 i 5 wynika:

$DE : D_1E_1 = EF : E_1F_1 = FA : F_1A_1 = AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = CD : C_1D_1$ czyli, że boki równoleżące w obu wielokątach są proporcjonalne.

§. 215.

Określenie. Dwa wielokąty zowią się podobnymi, jeżeli posiadają kąty odpowiednie parami równe i boki równoleżące, proporcjonalne.

§. 216.

2gie twierdzenie. Jeżeli w dwóch wielokątach podobnych, z dwóch równoleżących wierzchołków, wykreślimy przekątnie czyli promienie do innych wierzchołków, to powstaną ztąd trójkąty, z których równoleżące są podobne.

Przyjmijmy (Fig. 100 a), że oba wielokąty $ABCDEF$ i $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ są podobne, czyli że $\sphericalangle FAB = \sphericalangle F_1A_1B_1$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1$, $\sphericalangle BCD = \sphericalangle B_1C_1D_1$, $\sphericalangle CDE = \sphericalangle C_1D_1E_1$, $\sphericalangle DEF = \sphericalangle D_1E_1F_1$, $\sphericalangle EFA = \sphericalangle E_1F_1A_1$, oraz $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = CD : C_1D_1 = DE : D_1E_1 = EF : E_1F_1 = FA : F_1A_1$. Z równoleżących wierzchołków D i D_1 wykreślone są promienie do innych wierzchołków.

Założenie. $\triangle DEF \sim \triangle D_1E_1F_1$, $\triangle DFA \sim \triangle D_1F_1A_1$, $\triangle DAB \sim \triangle D_1A_1B_1$, $\triangle DBC \sim \triangle D_1B_1C_1$.

Dowód. Podług przyjęcia: $DE : D_1E_1 = EF : E_1F_1$, na to $\sphericalangle DEF = \sphericalangle D_1E_1F_1$, a więc $\triangle DEF \sim \triangle D_1E_1F_1$ (na mocy 2go twierdzenia o podobieństwie trójkątów). Ztąd więc wynika, że $EF : E_1F_1 = FD : F_1D_1$; że zaś $EF : E_1F_1 = FA : F_1A_1$ (według przyjęcia), więc też: $FD : F_1D_1 = FA : F_1A_1$. Z podobieństwa trójkątów DEF i $D_1E_1F_1$ wynika, że $\sphericalangle EFD = \sphericalangle E_1F_1D_1$, a zatem $\sphericalangle EFA = \sphericalangle EFD = \sphericalangle E_1F_1A_1 = \sphericalangle E_1F_1D_1$, czyli: $\sphericalangle DFA = \sphericalangle D_1F_1A_1$, a więc $\triangle DFA \sim \triangle D_1F_1A_1$ (podług 2go twierdzenia o podobieństwie trójkątów). Z podobieństwa tych trójkątów wynika: $\sphericalangle FAB = \sphericalangle FAD = \sphericalangle F_1A_1B_1 = \sphericalangle F_1A_1D_1$, czyli: $\sphericalangle DAB = \sphericalangle D_1A_1B_1$, $FA : F_1A_1 = AD : A_1D_1$, a według przyjęcia: $FA : F_1A_1 = AB : A_1B_1$, zatem $AD : A_1D_1 = AB : A_1B_1$, oba więc trójkąty DAB i $D_1A_1B_1$ są (według 2go twierdzenia o podobieństwie trójkątów) podobne; a zatem $\sphericalangle ABD = \sphericalangle A_1B_1D_1$ i $\sphericalangle ABC$

— $\sphericalangle ABD = \sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle A_1B_1D_1$, czyli $\sphericalangle DBC = \sphericalangle D_1B_1C_1$ i $AB : A_1B_1 = BD : B_1D_1$, również $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1$ (według przyjęcia), zatem $BD : B_1D_1 = BC : B_1C_1$, stąd wynika, że $\triangle DBC \sim \triangle D_1B_1C_1$ (podług 2go twierdzenia o podobieństwie trójkątów). Oba więc podobne wielokąty $ABCDEF$ i $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ składają się z podobnych i równo ułożonych trójkątów.

Wniosek. Odpowiednie przekątne w wielokątach podobnych są proporcjonalne.

§. 217.

Zagadnienie. Fig. 100 a. Wykreślić wielokąt podobny do wielokąta $ABCDEF$ i któregooby boki były w tym stosunku do boków danego jak 3:5.

Rozwiązanie. Kreślę $\sphericalangle E_1D_1F_1 = \sphericalangle EDF$. Dzielę DE na pięć równych części, jak $Da = ab = bc = cd = dE = \frac{DE}{5}$ i odeinam $D_1E_1 = \frac{3}{5}DE$ czyli $= De$. Tak samo czynię $D_1F_1 = \frac{3}{5}DF$ i oba punkta tj. F_1 i E_1 łączę prostą, powstały $\triangle D_1E_1F_1$ jest podobny do $\triangle DEF$ na mocy 2go twierdzenia o podobieństwie trójkątów. Następnie czynię $\sphericalangle F_1D_1A_1 = \sphericalangle FDA$, dzielę AD na pięć równych części i odeinam $A_1D_1 = \frac{3}{5}AD$, łączę F_1 z A_1 prostą, to powstały $\triangle A_1D_1F_1$ jest podobny do $\triangle ADF$ podług 2go twierdzenia o podobieństwie trójkątów i t. d. $ABCDEF \sim A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ według pierwszego twierdzenia o podobieństwie wielokątów i według wyjaśnienia §. 215.

Uwaga. W ten sposób można do wielokąta $ABC \dots F$ danego w polu nakreślić podobny $A_1B_1C_1 \dots F_1$ na papierze.

§. 218.

Zagadnienie. Podług wyjaśnienia §. 215 wykreślić wielokąt podobny do $ABC \dots F$ (Fig. 100 a.).

Rozwiązanie. Kreślę np. D_1E_1 równe $\frac{3}{5}DE$, $\sphericalangle E_1D_1C_1 = \sphericalangle EDC$, również $D_1C_1 = \frac{3}{5}DC$; następnie $\sphericalangle C_1 = \sphericalangle C$ i $C_1B_1 = \frac{3}{5}CB$; $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B$ i $B_1A_1 = \frac{3}{5}BA$ i t. d., a otrzymany w ten sposób wielokąt jest podobny danemu.

Uwaga. W ten sposób kreśli się na papierze (*Brouillon-Brettchen*) wielokąty podobne do danych w polu; sposób ten zwą inżynierowie zdjęciem podług *granic* („Umringe“).

§. 219.

Zagadnienie. Fig. 101. Wykreślić wielokąt $HGFDCBA$ podobny do $hgfdebA$ tak, aby bok hA wynosił $\frac{3}{5}HA$.

Rozwiązanie. Jeden z wierzchołków danego wielokąta łączę z pozostałymi za pomocą promieni, np. A z $G, F, D \dots$; dzielę AH na pięć równych części i z punktu 2 kreślę $2g \parallel HG$, $gf \parallel GF$, $fd \parallel FD$, $ed \parallel ED$, $cb \parallel CB$; $hgfdebA \sim HGFDCBA$.

Uwaga. Przez ustawienie stołu mierniczego w punkcie A , przez kreślenie przekątnej AG , AF etc. i zachowanie proporcji $AH : Ah = AG : Ag = AF : Af$ etc. $= 5 : 3$ lub w ogóle jak $m : n$, oraz przez połączenie punktów h, g, f etc. linijami prostymi, — otrzymuje się geometryczny obraz $Ahgf \dots b$ podobny do $ABC \dots H$.

Koło.

§. 220.

Fig. 102. Określenia. Koło jest to figura płaska, ograniczona linią krzywą zamkniętą, której punkta są równo oddalone od jednego punktu leżącego wewnątrz figury.

Linija kołowa (Kreislinie) jest krzywą ograniczeniem płaszczyzny kołowej.

Część linii kołowej zowie się *łukiem* (Bogen).

Środek (Centrum v. Mittelpunkt) koła tj. *O* ma własność, że wszystkie punkta leżące na okręgu są od niego równo oddalone.

Prosta $Ou = Os$ łącząca punkt leżący na okręgu np. *u* lub *s* ze środkiem koła zowie się *promieniem* (Radius, Halbmesser).

Punkt jakiś leży wewnątrz koła, gdy odległość jego od środka jest mniejszą aniżeli promień; jeżeli zaś ta odległość jest większą od promienia, natenczas punkt leży wewnątrz koła.

Cięciwa (Sohne v. Chorde) jest to linija prosta *vu* łącząca dwa punkta *v* i *u* okręgu; każda cięciwa *vu* dzieli okrąg na dwa łuki.

Cięciwa *bc* przechodząca przez środek *O* zowie się *średnicą* (Durchmesser v. Diameter). Wszystkie średnice jednego i tego samego koła połowią się w punkcie środkowym.

Prosta *TT'*, którą można dowolnie przedłużać, a która ma z kołem jeden tylko punkt *b* wspólny, zowie się *styczną* (Berührungslinie v. Tangente); punkt *b* zaś zowie się punktem styczności (Tangirungspunkt).

Prosta *NP*, której pewna część znajduje się w kole a inne części leżą zewnątrz tegoż, zowie się *sieczną* (Schneidende, Secante). Cięciwy i średnice są również siecznami.

Odcinek koła (Kreisabschnitt v. Kreissegment) jest to część powierzchni koła, zawarta pomiędzy łukiem ($\overline{uv}$) i odpowiednią cięciwą *uv*.

Wycinek koła (Kreisausschnitt v. Sektor) jest to część powierzchni tegoż zawarta pomiędzy promieniami *sO* i *uO* i łukiem *su* między nimi leżącym.

Każda cięciwa dzieli koło na dwa odcinki, z których większy zawiera w sobie środek koła.

Zagadnienie. Fig. 102. Nakreślić koło, a w niem średnicę, cięciwę, sieczną i styczną, oraz za pomocą cieniowania uwydatnić odcinek i wycinek.

§. 221.

1. twierdzenie. Ze środka *m* cięciwy *ab* (fig. 103) wystawiona prostopadła a dostatecznie przedłużona, przechodzi przez środek *O* koła.

Przyjmijmy koło *abg* i w niem cięciwę *ab*, w której środkowym punkcie *m* jest wystawiona $dh \perp ab$.

Założenie. Prostopadła *dh* do *ab* wystawiona w punkcie *m* przechodzi przez środek *O* koła.

Dowód. Połączmy punkt *m* z *O* linią prostą, to ta jest prostopadłą do *ab*, następnie połączmy *a* i *b* z *O* linijami prostymi, to w otrzymanych trójkątach *amO* i *bmO* jest $mO = mO$, $am = bm$, $aO = bO$ a więc te dwa trójkąty przystają do siebie (według 3go twierdzenia o przystawianiu trójkątów), a zatem $\sphericalangle Oma = \sphericalangle Omb = P$ czyli $mO \perp ab$. Ponieważ zaś w punkcie *m* jedną

tylko prostopadłą do ab wykreślić można, a ta jest właśnie mO , przeto każda prostopadła do ab wystawiona w nm musi się schodzić razem z linią dh czyli musi przechodzić przez O .

§. 222.

Zagadnienie Fig. 104. Znaleźć środek O danego koła.

Rozwiązanie. Osadziwszy nóżkę cyrkla w punkcie L , otwieram go aż po za $\frac{KL}{2}$ i zataczam łuki 1, 2 i 5, 7, i przecinam je łukami 3, 4 i 6, 8 zatoczonymi tym samym promieniem z punktu K . Punkta przecięcia łączę prostą, a ta przechodzi przez punkt środkowy, który chcąc znaleźć potrzeba tylko średnicę NJ przepołowić.

Dowód wypływa z § 221 i z konstrukcyi.

§. 223.

Zagadnienie. Fig. 103. Dane jest koło, którego środek jest niewidocznym; wyznaleść go w inny sposób.

Rozwiązanie. Kreślę w kole dwie cięciwy ab i ef , które w przedłużeniu przecinają się i tworzą jeden kąt. Wystawiwszy w środkowych punktach tych cięciw linie dh i kl do nich prostopadłe, otrzymamy punkt przecięcia się tychże będący zarazem środkiem O koła.

Uzasadnienie. Ponieważ dh jest do ab w środkowym punkcie m prostopadłą, przeto na tej prostopadłej dh leży gdzieś środek koła (1. twierdzenie §. 221), z tej samej przyczyny leży środek koła na linii kl ; a ponieważ jednocześnie ma się znajdować na obu liniach, przeto leży w ich wspólnym przecięciu, a zatem w O .

Uwaga. Wykreślenie jest tém dokładniejsze im bardziej zbliża się kąt zawarty pomiędzy ab i ef do kąta prostego. Jeżeli więc nakreślona jest cięciwa ef , to rysunek można dokładniej wykonać kreśląc z f cięciwę fg pochyłą do pierwszej pod kątem prawie prostym.

§. 224.

Określenie. Koła mające ten sam środek i leżące w tej samej płaszczyźnie, zowią się kołami współśrodkowemi.

Zagadnienie i rozwiązanie. Fig. 105. Nakreślić dla wprawy koła współśrodkowe I, II, III. Przytém posługiwać się należy gwoździkiem przedstawionym w fig. 49 lub płytką rogową przedstawioną w fig. 50.

§. 225.

Określenie. Dwa koła leżące w jednej płaszczyźnie a nie mające wspólnego środka, zowią się kołami odśrodkowemi (excentrische Kreise). **Fig. 106.** Linia łącząca oO zowie się *linią środków* (Centrallinie).

Zagadnienie. Fig. 106. Nakreślić koła odśrodkowe I i II.

§. 226.

Zagadnienie. Fig. 107. Dane są trzy punkta A , B i C ; wykreślić koło, którego okrąg przez nie przechodzi.

Rozwiązanie. Dane punkta łączę liniami prostymi w środkowych punktach dwóch linii, wystawiam do nich prostopadłe ab i cd przecinające się w O . Wstawiwszy jedną nóżkę cyrkla w O , otwieram go aż do A lub B albo też C i tym rozwarciem cyrkla zataczam koło, które musi dokładnie

przez punkta A, B, C przechodzić. Jeżeli uczący się nabył w rozwiązywaniu poprzednich zagadnień rysunkowych wprawę, to rozwiąże bez błędu i powyższe zadanie.

Uzasadnienie. Wyobraźmy sobie, że wierzchołki A, B i C trójkąta ABC połączone są z punktem przecięcia O liniami prostymi; nazwijmy punkt przecięcia się boku BC z ab przez E . Zaś punkt przecięcia się boku AC z ac przez G , to trójkąt $BOE \cong \triangle COE$, ponieważ ich odpowiednie przyprostokątne są równe, a więc $OB = OC \dots (1)$ i $\triangle AOG \cong \triangle AOC$, ponieważ odpowiednie przyprostokątne są równe, a więc $AO = OC \dots (2)$ a z (1) i (2) wynika, że $OB = OA = AO$ i to są właśnie promienie koła przechodzącego przez punkta A, B, C , a którego środkiem jest punkt O .

§. 227.

2. *twierdzenie.* Normalna (prostopadła) do promienia wystawiona w jego końcowym punkcie, ma z kołem jeden tylko punkt wspólny i przedłużona w obie strony aż do nieskończoności, leży zawsze zewnątrz koła.

Przyjmijmy fig. 102, że $TT_1 \perp bO$.

Założenie. TT_1 leży zewnątrz koła wyjawszy tylko punktu b , który ma z nim wspólny.

Dowód. Wszystkie proste łączące jakiekolwiek punkta na TT_1 z punktem O , są większe od promienia bO , albowiem przeciwprostokątna jest zawsze większą od przyprostokątnej, ponieważ leży w trójkącie naprzeciwko kąta największego, tj. kąta P . Końce więc tych prostych leżą zewnątrz koła na mocy wstępnego wyjaśnienia w §. 220. Z tego wynika bezpośrednio

Zagadnienie. Fig. 108. W danym punkcie np. B nakreślić styczną do koła.

Rozwiązanie. Dany punkt B łączę z punktem środkowym O koła, za pomocą prostej BO i w punkcie B kreślę tt_1 prostopadłą do BO , a ta jest styczną żadaną.

§. 228.

Zagadnienie. Fig. 108. Równoległe do danej prostej CD nakreślić styczną do koła O .

Rozwiązanie. Z O jako ze środka danego koła, zataczam łuk acb , który przecina prostą daną w punktach a i b ; z a promieniem większym aniżeli $\frac{ab}{2}$, zataczam łuk 1, 2 i przecinam go drugim 3, 4 zatoczonym z b tym samym promieniem; otrzymany punkt przecięcia łączę z O , to Oc jest do CD prostopadłą i styka się z kołem w punkcie B . Z punktu styczności B kreślę prostą tt_1 , równoległą do CD , a ta jest żadaną styczną.

Uzasadnienie. Ponieważ według wykreślenia $cO \perp CD$, więc i odwrotnie $CD \perp cO$, a że według wykreślenia $tt_1 \parallel CD$, więc też kąt przy DC i cO równa się kątowi przy tt_1 i cO , tj. kątowi t, BO , jako kąty jednostronne, że jednak pierwszy równa się P więc też i drugi P wynosi czyli że tt_1 jest do BO prostopadłą w punkcie B .

§. 229.

Zagadnienie. Fig. 109. Dane jest koło i punkt zewnątrz niego leżący; nakreślić z tego punktu prostą, styczną do koła.

Rozwiązanie. Dany punkt P , leżący zewnątrz koła, łączę ze środkiem O , przepoławiam PO w punkcie p i promieniem Pp zataczam koło, które przecina się z danym kołem w punktach l i k , które łączę ze środkiem O . Następnie kreślę Pk i Pl prostopadłe do promieni Ol i Ok i przedłużam je, a te są żadanymi stycznymi Pt i Pt' .

Dowód. Kąt $OkP = P = \sphericalangle Olp$, gdyż jako kąt obwodowy jest równy połowie odpowiedniego kąta środkowego PpO , który wynosi $2P$, a zatem $Pt \perp Ok$ i $Pt' \perp Ol$, ztąd zaś wynika że Pt' i Pt są stycznymi do koła O przechodzącymi przez punkt P .

Najważniejsze twierdzenia dotyczące kreślenia stycznych do koła.

1. *twierdzenie.* Kąt, jaki tworzy styczna z cięciwą przechodzącą przez punkt styczności, jest równy kątowi okręgowemu w przeciwnym odcinku.

Fig. 102. (Wyobraźmy sobie cięciwy: bs , bP i sP jako rzeczywiście nakreślone).

Przyjmijmy: bs jako cięciwę, TT' jako styczną, $\sphericalangle bPs$ jako kąt okręgowy.

Założenie. $\sphericalangle T'bs = \sphericalangle bPs$.

Dowód. Kreślę średnicę bC i łączę s z C , natenczas: $\sphericalangle sbC + \sphericalangle sCb = P$, ponieważ kąt okręgowy przy $s = P$. Dalej: $\sphericalangle T'bs + \sphericalangle sbC = P$, a więc $\sphericalangle sbC + \sphericalangle sCb = \sphericalangle T'bs + \sphericalangle sbC$, a według pewnika, że ilości równe, w równy sposób zmienione, pozostają nadal równymi, mamy: $\sphericalangle sCb = \sphericalangle T'bs$. Że jednak $\sphericalangle sCb = \sphericalangle bPs$ (bo wszystkie kąty okręgowe, których ramiona wspierają się na tym samym łuku, są równe), przeto też $\sphericalangle T'bs = \sphericalangle bPs$.

2. *twierdzenie.* Jeżeli jakikolwiek punkt okręgu koła połączymy cięciwami z końcami średnicy i z tego punktu spuścimy prostopadłą na średnicę, to otrzymamy:

a) dwa trójkąty, z których każdy podobnym jest do danego (utworzonego przez cięciwy i średnicę) trójkąta, a zatem oba te trójkąty są między sobą podobne;

b) każda cięciwa jest średnio-geometrycznie-proporcjonalna, pomiędzy całą średnicą, a odcinkiem jej przyległym;

c) prostopadła spuszczone z punktu P okręgu na średnicę, jest średnio-geometrycznie-proporcjonalna, pomiędzy obojdwoma odcinkami średnicy.

Dowód. Niechaj będzie n owym punktem okręgu koła mnP (fig. 110), który łączymy z m i P zapomocą prostych; $ns \perp$ na średnicy mP .

$\triangle mnP \sim \triangle mns$, ponieważ kąt $m = \sphericalangle m$, $\sphericalangle mnP = \sphericalangle msn = P$; zatem i trzeci kąt, t. j. $\sphericalangle nPm = \sphericalangle mns$. $\triangle mnP \sim \triangle Pns$, bo kąt $nPm = \sphericalangle nPm$, $\sphericalangle mnP = \sphericalangle nsP = P$, a ztąd: $\sphericalangle m = \sphericalangle snP$. Że jednak $\triangle mnP \sim \triangle mns$ i $\triangle mnP \sim \triangle Pns$, przeto także $\triangle mns \sim \triangle Pns$.

Z podobieństwa trójkątów mnP i mns wynika: $mP : mn = mn : ms$. Z $\triangle mnP \sim \triangle nsP$ wynika: $mP : ns = Pn : Ps$, a że $\triangle mns \sim \triangle nsP$, przeto $ms : sn = sn : sP$.

3. *twierdzenie.* Jeżeli styczna i sieczna przecinają się zewnątrz koła, to styczna jest średnio-geometrycznie-proporcjonalną pomiędzy całą sieczną a odcinkiem zewnętrznym.

Przyjmijmy: (fig. 110) że dane jest koło O , punkt P zewnątrz niego leżący, styczna PT_1 i sieczna mP .

Założenie. $Pm : Pv = Pv : Ps$ czyli $\overline{Pv}^2 = Pm \cdot Ps$.

Dowód. Kreślę vm i vs . Trójkąty Prm i Prs mają: $\sphericalangle mPr = \sphericalangle mPv$, $\sphericalangle Pmv = \sphericalangle svP$ (według 1go twierdzenia); a więc $\triangle Pvm \sim \triangle Prs$ (§. 202) a ztąd wynika proporcja:

$$Pm : Pv = Pv : Ps, \text{ czyli } \overline{Pv}^2 = Pm \cdot Ps.$$

§. 231.

Zagadnienie. Fig. 110. Z punktu P leżącego zewnątrz koła, wykreślić styczne do tegoż bez użycia punktu środkowego.

Rozwiązanie. Z punktu P kreślę dowolną sieczną Pm i oznaczam punkt s . Na mP zataczam półkole mnP i kreślę w s prostopadłą sn do mP ; promie-

niem P_n zataczam łuk uv , który przetnie dane koło w punktach t i v ; połączymy P z t i v linijami prostymi i te przedłużymy ku TT_1 , otrzymamy się żądane styczne.

Z triendzeń: 1., 2. i 3. wypływa uzasadnienie rozwiązania do figury 110:

$$Pm : Pn = Pn : Ps \text{ a ztąd } \overline{Pa}^2 = Pm : Ps$$

$$Pm : Pt = Pt : Ps \text{ a ztąd } \overline{Pt}^2 = Pm : Ps$$

$$Pm : Pv = Pv : Ps \text{ a ztąd } \overline{Pv}^2 = Pm : Ps$$

$$\overline{Pa}^2 = \overline{Pt}^2 = \overline{Pv}^2 \text{ albo}$$

$Pn = Pt = Pv$ a to zrównanie dowodzi, że łuk w zatoczony promieniem Pn , daje punkta styczności t i v .

§. 232.

Zagadnienie. Fig. III. Do dwóch kół przystających nakreślić wspólną styczną.

Rozwiązanie. Połączmy o z o' linią oo' i wystawmy w o i o' do niej prostopadłe, te przetną się z kołami w punktach w i v , które są punktami styczności, a połączymy je prostą, to ta jest żądaną styczną.

Dowód. Figura $oo'vw$ jest prostokątem, a więc kąty przy w i v są proste (patrz fig. 227).

Praktyczne zastosowanie. (Fig. II2.) Wynienione konstrukcje mają zastosowanie przy kołowrocie z łańcuchem, przyczem w mn używa się konstrukcyi fig. III, zaś w o konstrukcyę fig. 105.

§. 233.

Zagadnienie. Fig. III3. Wykreślić styczne do dwóch kół I i II , mających rozmaite średnice.

Rozwiązanie. Środki o i O łączę prostą oO i tę przepoławiam w O' , promieniem $oO' = OO'$ zataczam koło; szukam różnicy promieni danych I i II ($gO - ob = Om$), tą jest $Om = On$, nią zataczam koło, które przetnie się z kołem zatoczonym z O' w punktach n i m , połączmy O z m i n linijami prostymi i przedłużmy je aż do przecięcia się z kołem, a otrzymamy punkta styczności e i g na kole II , nakreśliwszy zaś z o do eO i gO równoległe ao i ob , otrzymamy a i b jako punkta styczności na kole I ; znając zaś te, kreśliśmy przez a i c styczną tt' zaś przez b i g styczną TT_1 .

Uzasadnienie. Ponieważ $\sphericalangle onO = P$, jako kąt okręgowy w półkołu i $nc \neq ao$, więc też $ac \neq oc$; a zatem i kąty przy c i a są proste, ztąd więc wynika, że tt' jest styczną wspólną obydwom kołom I i II . Z tego samego powodu TT_1 jest również styczną wspólną obydwom kołom I i II . Punkt zbieżności tych stycznych leży po za płaszczyzną rysunku.

Praktyczne zastosowanie. Fig. II4. Z pomocą powyższej konstrukcyi można oznaczyć konstrukcyę konturu korby, w rzucie poziomym, przyczem łuki: 5, 6, 7, 8 odnieść należy do koła I , zaś łuki 1, 2, 3, 4 do koła II . Inne linije konstrukcyjne można też łatwo wyznaleźć i porównać z fig. III3. Łuki a , b etc., mające się stykać, wykreśli się wolną ręką.

§. 234.

Zagadnienie. Fig. II5. Dane są koła I i II o rozmaitych promieniach; nakreślić z rozmaitych stron, wspólnie styczne.

Rozwiązanie. Łączę środki o i O linią prostą, tę przepoławiam w O' i promieniem $O'O = oO'$ zataczam koło $ofOg$; dodaję do promienia $cO = dO$, promień koła mniejszego I i sumą tych promieni $(Oc + cf)$ zataczam z O koło, które przetnie się z kołem zatoczonym z O' w punktach f i g . Połączmy f i g z O a otrzymamy punkta styczności c i d na kole II ; nakreśliwszy zaś promień oa równoległy do Od i $ob \parallel Oc$, otrzymamy punkta styczności

a i b na kole I ; a połączywszy teraz a z d i b z c linijami prostymi tt' i TT_1 , otrzymamy żądane styczne.

Dla kontroli rysunku oznacza się podanym sposobem punkta d i c i w nich wystawia się tt_1 i TT_1 prostopadłe do O_f i O_g , a te, jeśli pierwsze części konstrukcyi dokładnie przeprowadzono, przechodzą przez a i b .

Uzasadnienie. Ponieważ $\angle Ofo = P$, jako okręgowy w półkolu i $fc \perp ob$, przeto $icb \perp af$ tworzy z obydwojma promieniami Oc i ob równe kąty (proste kąty); a zatem cb czyli TT_1 jest styczną wspólną kołom I i II ; tożsamo tt_1 jest wspólną styczną do kół I i II . Z tego powodu więc jest h zewnętrznym punktem podobieństwa (Ähnlichkeitspunkt) na linii środków oO .

Rozwinięcie czyli prostowanie okręgu.

§. 235.

Zagadnienie. Fig. 116. Okrąg koła danego promienia r rozciągnąć na prostą czyli wyprostować (Kreis-Rektifikation).

Rozwiązanie. Kreślę w n styczną np do koła O , biorę w cyrkiel średnicę i przenoszę ją do I , II , III , trzy razy. Końce prostopadłych średnic łączę linią prostą, a ta jest zarazem cięciwą ćwierci koła, dzielę tę ostatnią na 5 równych części, z których jedną ($\frac{1}{5}$ część) biorę w cyrkiel i przenoszę od III do p , to prosta np jest tak długa jak okrąg danego koła.

Uzasadnienie. Jeżeli r jest promieniem, czyli $2r$ średnicą danego koła, natenczas $r\sqrt{2} = 1.414214 \cdot r$ jest cięciwą podpasującą ćwierćkoła, a ztąd: $\frac{1}{5} r\sqrt{2} = 0.282843 \cdot r$, a zatem $6r + \frac{1}{5} r\sqrt{2} = 6.282843 \cdot r$; lecz cały okrąg koła równa się $6.283186 \cdot r$, błąd więc przy prostowaniu popełniony wynosi zaledwie $0.000343 \cdot r$ (tj. że prosta o tyle jest krótszą od okręgu koła.)

Jeżeli więc promień koła wynosi np. 31.608 centymetrów, to błąd popełniony przy prostowaniu równa się 0.054183 milimetrów, a więc mniej nawet niżeli grubość ołówka.

Wykreślenie. Podzielmy cięciwę i wierzchołek na 9 równych części i $\frac{1}{9}$ część dodajmy do tej cięciwy, to otrzymamy prostą równą co do długości ćwierci koła.

Założenie. Ćwierćkoło zbliża się bardzo do $\frac{10}{9}$ części swojej cięciwy.

Dowód. Cięciwa ćwierćkoła $= r\sqrt{2} = 1.414213 \cdot r$

$\frac{1}{9}$ część jej $= 0.157135 \cdot r$

$\frac{10}{9}$ cięciwy $= 1.571348 \cdot r$

ćwierćkoło $\frac{\pi \cdot r}{2} = 1.570796 \cdot r$

błąd więc wynosi $= 0.000552 \cdot r$

§. 236.

Prostowanie okręgu koła, którego średnicą jest np. d , najlepiej można wykonać w następujący sposób:

Średnicę d dzielę na pięć równych części i wykreślam trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne wynoszą: $\frac{6}{5} d$ i $\frac{3}{5} d$, a więc obwód tego trójkąta jest prawie równy obwodowi danego koła.

Uzasadnienie. Nie trudno dostrzedz, że liczba $\frac{9 + \sqrt{45}}{5} = \frac{15.7082039}{5} = 3.1416407$, tak mało różni się od liczby π , że można przyjąć, iż okrąg koła, w przybliżeniu, równa się następującej wartości:

$$p = \frac{9 + \sqrt{45}}{5} \cdot 2r = \frac{9 + \sqrt{45}}{5} \cdot d \quad (1)$$

przyczem d oznacza średnicę danego koła.

Z powyższego wzoru wynika:

$$p = \frac{6}{5} d + \frac{3}{5} d + \sqrt{\left(\frac{6}{5} d\right)^2 + \left(\frac{3}{5} d\right)^2}.$$

§. 237.

Następujące graficzne oznaczenie średnicy koła, którego okrąg p jest dany, jest bardzo zajmujące.

W tym celu kreślę trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne wynosilyby: $\frac{2}{3}p$ i $\frac{1}{3}p$; odejmuje długość przeciwprostokątnej od p i do pozostałej reszty dodaje $\frac{1}{4}$ jej część, tak zwiększona reszta jest prawie równa średnicy danego koła.

Uzasadnienie. Z przytoczonego równania (1) §. 236 wynika:

$$d = \frac{5}{9 + \sqrt{45}} \cdot p = 5 \cdot \frac{9 - \sqrt{45}}{36} \cdot p = \frac{5}{4} \cdot \frac{9 - \sqrt{45}}{9} \cdot p = \frac{5}{4} (1 - \sqrt{\frac{5}{9}}) p$$

czyli wreszcie:

$$d = \frac{5}{4} [p - \sqrt{(\frac{1}{3}p)^2 + (\frac{1}{3}p)^2}].$$

Powierzchnia koła i jego części.

§. 238.

Twierdzenie. Powierzchnia koła równa się powierzchni trójkąta mającego za podstawę okrąg koła a za wysokość jego promień.

Uzasadnienie. Powierzchnia koła $= \frac{1}{2}r \cdot 2\pi r = r^2 \cdot \pi$.

Wniosek. Ponieważ trójkąt da się bardzo łatwo zamienić na kwadrat, równy mu co do powierzchni, nietrudno więc jest rozwiązać następujące zadanie:

Zamienić koło na kwadrat równy mu co do powierzchni. To zadanie zowią „kwadraturą koła“.

Nazwijmy bok tego kwadratu przez q , to q^2 byłoby $= \pi r^2$ czyli $q = r \sqrt{\pi}$; $\sqrt{\pi}$ wyraża się w liczbach, mianowicie:

$$\sqrt{\pi} = 1.7724538509$$

§. 239.

Powierzchnia wycinka koła. Wycinek koła jest dokładnie oznaczony przez kąt środkowy, zawarty pomiędzy obydwoma promieniami. Równym kątom środkowym w tém samém kole odpowiadają równe wycinki. Ile razy jeden kąt środkowy jest większym od drugiego tj. ile razy jeden da się odjąć od drugiego (rozumie się oba w tém samém kole), tyle też razy wycinek odpowiedni pierwszemu jest większy od wycinka odpowiadającego drugiemu. Z porównania więc wycinków otrzymujemy ten sam wypadek co z porównania odpowiednich im kątów środkowych, tj., że wycinki tego samego koła, są do siebie w tym samym stosunku jak ich kąty środkowe.

Nazwijmy powierzchnię wycinka, odpowiadającego kątowi środkowemu, przez S i zwróćmy uwagę na to, że kątowi środkowemu o 360° odpowiada wycinek πr^2 , tj. całe koło, to otrzymamy:

$$360^\circ : \gamma^\circ = r^2 \pi : S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

ząd bezpośrednio wypływa:

$$S = \frac{\gamma \cdot \pi}{360^\circ} \cdot r^2,$$

a jeśli będziemy uważać b jako łuk koła i utworzymy równanie pomocnicze:

$$360^\circ : \gamma^\circ = 2r\pi : b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

z którego

$$b = \frac{\gamma \cdot \pi}{180^\circ} \cdot r$$

a następnie równania (1) i (2) połączmy z sobą, to otrzymamy:

$$S = \frac{b}{2} \cdot r.$$

ząd wypływa:

§. 240.

Twierdzenie. Powierzchnia wycinka koła, równa się powierzchni trójkąta mającego za podstawę łuk wycinka a za wysokość promień koła.

§. 241.

Objaśnienie. Chcąc obliczyć powierzchnię odcinka koła, jako część odpowiedniego odcinka, mierzy się bardzo dokładnie za pomocą podziałki, cięciwę wycinka, oblicza się powierzchnię tego ostatniego i od niej odejmuje trójkąt ograniczony obydwoma promieniami i cięciwą, pozostała reszta jest powierzchnią odcinka koła.

Praktyczny wzór. Odcinek koła $= \frac{2}{3} \cdot c \cdot h$; gdzie c oznacza cięciwę, zaś h wysokość łuku (Patrz parabola).

§. 242.

Powierzchnia pierścienia współśrodkowego równa się: $R^2\pi - r^2\pi = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R + r)(R - r)$, gdzie R oznacza promień większego, zaś r promień mniejszego koła.

§. 243.

Jeżeli d jest odległością kół, natenczas powierzchnia pierścienia współśrodkowego równa się: $2r\pi \cdot d + d^2 \cdot \pi$.

Część zaś pierścienia równa się: $\frac{a+b}{2} d$; a i b są to długości łuków.

Zasadnicze zagadnienia odnoszące się do styczności kół i do wpisywania lub opisywania kół stycznych.

§. 244.

Uwaga. Rozwiązując i wykreślając przytoczone tu zagadnienia, ze spokojem i cierpliwością, można nabyć biegłości, niezbędnej przy rozwiązywaniu zadań umieszczonych na końcu.

Wykreślenie. Fig. II7. Dane są 3 koła: *I*, *II*, *III*; nakreślmy do każdej pary zewnętrzne wspólne styczne (podług fig. II3), to otrzymamy punkta przecięcia się tychże tj. *A*, *B* i *C*, które leżą zawsze na jednej prostej.

Uzasadnienie. Punkta *O*, *O*₁ i *o* oznaczają w tej figurze środki kół *I*, *II* i *III*, których promienie nazwijmy przez a , b i c ; *A*, *B* i *C* są punktami przecięcia się stycznych, leżącemi wraz ze środkami odpowiednich im kół, na jednej prostej. Widocznie więc, że:

$$CO : CO_1 = a : b$$

$$AO_1 : Ao = b : c$$

$$Bo : BO = c : a$$

$$CO : AO_1 : Bo : CO_1 : Ao : BO = 1 : 1 \text{ czyli}$$

$CO_1 : Ao : BO = CO : AO_1 : Bo$, a więc wszystkie 3 punkta: *A*, *B*, i *C* leżą na jednej prostej.

Jako ćwiczenie w kreśleniu może jeszcze posłużyć:

1. dodatek. Nakreśliwszy do jednej pary kół zewnętrzne styczne, a do dwóch pozostałych wewnętrzne styczne, otrzymamy ztąd 3 punkta przecięcia się stycznych, leżące również na jednej prostej; naturalnie, że takich prostych jest trzy. Uzasadnienie to samo co powyżej.

2. dodatek. Punkta przecięcia leżą nadto tak, że, jeżeli środek jednego koła połączymy z punktem przecięcia się wewnętrznych stycznych do dwóch kół pozostałych, to otrzymamy trzy proste przecinające się w jednym punkcie.

Uwaga. Wykreślenie to można wykonać dokładnie jedynie tylko z pomocą konstrukcyj częściowych. Fig. II3 i II5.

§. 245.

Zagadnienie. Fig. 118. Dany jest kąt; wpisać w niego koła, styczne do siebie i do ramion kąta.

Rozwiązanie. 1szy sposób. Dzielę kąt t_1ot na dwie połowy za pomocą dwusiecznej ol , obieram na niej punkt jakiś np. l , w nim wystawiam prostopadłe do to i t_1o i zataczam koło I promieniem ll_1 , to to jest styczne do ramion kąta i przecina ol w punkcie l . W l wystawiam ab prostopadłą do ol a więc styczną do koła I , przepoławiam kąt aco linią cd , zkład otrzymuję punkt przecięcia 2, z tego ostatniego teraz, promieniem $2l$ zataczam koło styczne. Aby znaleźć punkta styczności f i g , zataczam z c łuk lg i tym samym promieniem z górnego punktu przecięcia, łuk lf . Cięciwę fg można korzystnie użyć przy konstruowaniu innych stycznych.

Uzasadnienie konstrukcji. Fig. 118. Kąt $tot = \sphericalangle tot_1 = \sphericalangle \frac{tot_1}{2}$, $ll \perp to$ i $ll_1 \perp t_1o$; $\triangle lto \cong$

$\triangle ll_1o$, ponieważ mają 1, 0 tj. przeciwprostokątnie wspólną i połówki kąta t_1ot równe, ztąd więc wynika, że $ll = ll_1$, jako przyprostokątne i jako promienie koła I , w ich końcowych punktach są styczne ol i ot_1 do nich prostopadłe. Styczna ab jest do pomocniczej ll w punkcie l prostopadłą. Weźmy teraz pod uwagę trójkąt coa ; ten składa się z trójkątów: col i aol , do siebie przystających, albowiem mają przyprostokątnie $lo = lo$ i $\sphericalangle col = \sphericalangle aol$, a ztąd wynika, że przeciwprostokątnia $co = ao$, $cl = ol$ i $\sphericalangle lco = \sphericalangle oal$. Podług wykreślenia: $\sphericalangle lcd = \sphericalangle ocd$. Wykreśliwszy z punktu przecięcia 2 (promieni cd i Ol) prostopadłe $2g$ i $2f$ do ot i ot_1 , to $\triangle 2cg \cong \triangle 2cf$, albowiem mają przeciwprostokątnią $2c$ i połówki kąta przy c równe, ztąd wynika zaś, że $l2 = g2$ i $lc = cf$. Pomyślimy sobie, że łącząca $a2$ jest rzeczywiście nakerśloną, to $\triangle c2l \cong \triangle a2$, ponieważ mają odpowiednie przyprostokątne równe, a ztąd wynika, że przeciwprostokątnia $a2 = c2$ i $\sphericalangle la2 = \sphericalangle lc2 = \sphericalangle gc2$. Ponieważ jednak kąt $lc2$ jest połową kąta aco , przeto i kąt $la2$ równa się połowie kąta aol , a ztąd $\sphericalangle fa2 = \sphericalangle la2$ i $\triangle la2 \cong \triangle fa2$, z czego wynika, że $l2 = 2f$ i $la = af$. Z powyższych rzeczy wynika równość linii $g2$, $l2$ i $f2$, będących promieniami koła 2, stycznego w o i f do ot i ot_1 , oraz stycznego do koła I w punkcie l .

Pozostaje jeszcze do dowiedzenia, że punkta styczności f i g mogą być z całą dokładnością oznaczone, za pomocą samych tylko łuków, bez użycia prostopadłych spuszczonej z 2 na ot i ot_1 .

Z przystawiania trójkątów wynika równość linii cg , cl , al , af i ta właśnie wyjaśnia przyczynę dla jakiej zataczamy z a i c łuki o tym samym promieniu, aby oznaczyć następnie punkta styczności g i f i łączącą je cięciwę fg .

2gi sposób. Fig. 119. Chcąc wpisać w kąt CBF koła styczne do siebie i do ramion kąta (BF), obieram na Bn dowolnie punkt O i kreślę koło I ; w punkcie x kreślę styczną rs i przepoławiam kąt rwB dwusieczną wa , ztąd otrzymam punkt o , z którego promieniem ox zataczam koło II .

W celu otrzymania punktów styczności y i f kreślę oy , $o'f \perp FB$.

Uzasadnienie konstrukcji. Fig. 119. Trójkąt $wox \cong \triangle woy$, ponieważ $\sphericalangle xwo = \sphericalangle ywo$ i przeciwprostokątnia $ow = ow$, a ztąd $oy = ox$ i równe prostopadłe, spuszczonej z o na BC ; a więc II jest kołem stycznem do koła I i do obu ramion kąta etc.

Praktyczne zastosowanie. Fig. 120 przedstawia pinakl (eine Wimberge), na którego szczycie konstruacja podług Fig. 118 wykonaną być może.

Praktyczne zastosowanie. Fig. 121 przedstawia konstrukcję dachową, w której przestrzenie trójkątne i czworokątne stycznymi kołami są wypełnione.

Praktyczne zastosowanie. Fig. 122 jest częściową konstrukcją zębatego koła. Części ab , bc , cd ... są równe pomiędzy sobą, a całe koło jest ich wielokrotnością. Na części koła podziałowego NS ustępy wolne między zębami równają się grubości pojedynczego zęba; punkta b , g , n i v są środkami łuków, dających zębom właściwy kształt. Bok zęba (*die Flanke*) Gt równa się szerokości GJ . AB jest grubością krawca koła, a równa się Gt . Inne części są już z konstruowania łatwe do zrozumienia.

§. 246.

Zagadnienie. Fig. 123. Dany jest jakikolwiek trójkąt FGC ; wpisać w niego styczne koła.

Rozwiązanie. Trzy kąty danego trójkąta połowimy prostymi Cr , GO i FO , te linie przetną się w O ; z O wyprowadzamy na boki prostopadłe Or , Ot i Os , a otrzymamy styczne punkta v , t i s , promieniem $Os = Ot = Or$ zataczamy koło.

Uzasadnienie twierdzenia. Gdy dwa kąty trójkąta przepołowimy, a z punktu przecięcia się linii połowiących odległością jego od jednego z trzech boków zatoczmy koło, to ono będzie w trójkąt wpisane.

Mamy dowieść, że $Os = Ot = Or$. Trójkąt $COs \cong \triangle COv$, bo $CO = CO$ jako przeciwprostokątnia, $\sphericalangle sCO = \sphericalangle vCO$, z tego wynika: $Os = Ov$. Dalej $\triangle sFO \cong \triangle tFO$, bo $OF = OF$ jako przeciwprostokątnia, $\sphericalangle sFO = \sphericalangle tFO$, z tego wynika: $Os = tO$; zatem $Os = Ot = Or$, a z równości tych prostopadłych wynika, że koło zatoczone z O jedną z nich, przechodzić musi przez s , t , v . Ponieważ $Os \perp CF$, $Ot \perp FG$, $Or \perp CG$, przeto boki trójkąta są styczne do koła czyli koło jest stycznie w trójkącie wpisane.

Dodatek. Jeżeli punkt przecięcia promieni połowiących dwa kąty w trójkącie, połączymy z trzecim wierzchołkiem, to ten trzeci kąt zostanie tą łączącą prostą także przepołowiony, a z tego wynika, że te trzy linie połowiące trzy kąty przecinają się w jednym punkcie.

§. 247.

Zagadnienie. Fig. 124. W dany równoboczny trójkąt KLo wpisać styczne koło.

Rozwiązanie. Kąty K , L i o połowimy prostymi KS , Ll i oII , te muszą się przeciąć w O ; punkta przecięcia I , II i III zaznaczamy i zataczamy z nich promieniem IO koło, które inne boki w II i III dotyka. Albo: z punktów L , o , K wyprowadzamy na przeciwległe boki prostopadłe LP , oII i KS , to te muszą się przeciąć w O ; I , II i III są punktami stycznymi, przez które koło o promieniu $OI = OIII = OII$ przechodzić musi.

Do tego **twierdzenie**. Jeżeli kąt u wierzchołka trójkąta równobocznego lub równoramiennego prostą przepołowimy, to ta prosta połowi także i bok i jest do niego prostopadłą.

Dowód. $\sphericalangle KoII = \sphericalangle LoII$, $Ko = Lo$, $IIo = IIo$, zatem $\triangle KoII \cong \triangle LoII$, z tego wypada: $KII = LII$ i $\sphericalangle oIK = \sphericalangle oIL = P$. W ten sam sposób dowodzimy, że $KI = oI$, $oIII = LIII$, a ponieważ trójkąt jest równoboczny, przeto te sześć odcinków są sobie równe. Te sześć trójkątów $KOII$, $LOII$, $LOIII$ itd. są przystające, bo mają po jednym kącie ostrym i jednej przyprostokątnej odpowiednio sobie równe, przeto te trzy odległości punktu O od trzech boków są sobie równe, a zatem koło O w trójkącie równobocznym jest stycznie wpisane.

Dodatek. Ponieważ $oO = KO = LO$, więc można trójkąt równoboczny wpisać w koło, którego środek będzie w O .

§. 248.

Zagadnienie. Fig. 125. W kwadrat $CDGK$ wpisać stycznie koło.

Rozwiązanie. Poprowadźmy przekątnie CG i DK , naznaczmy punkt przecięcia O i wyprowadźmy z niego na jeden z boków np. CK prostopadłą Oz , to t jest punktem przecięcia prostych i punktem stycznym koła mającego się wpisać. Promieniem Ot zataczamy z O koło.

Do **uzasadnienia konstrukcji, Fig. 125**, podajemy następujące **twierdzenie**: w kwadracie są przekątnie sobie równe, ich środek jest równo oddalony:

1. od wszystkich wierzchołków;
2. od wszystkich boków;

Przyjęcie. $CDGK$ jest kwadratem. DK i CG jego przekątnie $Ot \perp CK$.

Założenie 1sze. $DK = CG$ i $KO = GO = DO = CO$.

2gie. Ot = prostopadłym z O na trzy inne boki spuszczonemu.

Dowód do 1go. $\triangle KGD \cong \triangle KGC$ podług 1go przyp. przyst. trójk., zatem $DK = CG$ i $\sphericalangle KDG = \sphericalangle GKD$ i $\sphericalangle GDK = \sphericalangle GKD$, zatem też $\sphericalangle CDK = \sphericalangle GDK$, z tego samego powodu jest $\sphericalangle DCG = \sphericalangle KCG$ i t. d. Przekątnie połowią zatem kąty. $\triangle CDO \cong \triangle KGO$ podług 2go przyp. przystaw. trójk., zatem $KO = GO = DO = CO$.

Wniosek. Przekątnie są do siebie prostopadłe, a kwadrat może być z O opisany kołem.

Dowód do 2go. Przystające trójkąty KGO , KCO , CDO , DGO mają równe wysokości, te prostopadłe, które z O na boki poprowadzone zostały i leżą naprzeciw kątów 45° . Bok CK jest przeto rzeczywistą styczną do koła O , tak samo inne boki są styczne do tego koła.

§. 249.

Zagadnienie. Fig. 126. W kwadrat ukośny $KLNP$ wpisać koło.

Rozwiązanie. Poprowadźmy przekątnie, które się w punkcie O przecinają, z O zatoczmy dowolnym otworem cyrkla łuk 1, 2; z 1 zatoczmy promieniem $>$ od połowy 1, 2 łuk, który z 2 tym samym promieniem w n przecinamy. Poprowadźmy przez punkta O i n do NL prostopadłą dc . Promieniem dO zatoczmy styczne koło.

Do uzasadnienia niech posłuży **twierdzenie**: w kwadracie ukośnym przekątnie połowią kąty i przecinają się prostopadłe, ich środek jest od wszystkich boków równo oddalony.

Przyjmijmy, że $KLNP$ jest kwadratem ukośnym. $PN = NL = LK = KP$ i $ab \perp PN$, $cd \perp NL$.

Twierdzenie. $\sphericalangle KNP = \sphericalangle KNL$. $PL \perp NK$, a prostopadła $Ob = Od = Oa = Oc$.

Dowód. $\triangle NOL \cong \triangle NOP$ podług 3go przypadku przystawiania trójkątów, bo $PO \cong OL$ (w każdym równoległoboku połowią się przekątnie). $ON = ON$ i $PN = NL$ z założenia. Z tego wynika równość jednakich kątów PNO , LNO i PON , LOK ; jeżeli jednak kąty przyległe są równe, to każdy z nich wynosi jeden prosty, zatem $NO \perp PL$.

Dalej $\triangle NOc \cong \triangle NOb$, bo są trójkątami prostokątnymi, w których przekątnia $ON = ON$, $\sphericalangle ONb = \sphericalangle ONc$. Zatem jednakie boki Ob i oc są sobie równe; w ten sam sposób wypada także $Oc = Oa = Od$.

Dodatek. $Ob = Oc = Oa = Od$ są promienie jednego koła O , w końcach których b , c , a i d cztery proste NP , NL , LK i KP jako styczne są prostopadłe.

§. 250.

Zagadnienie. Fig. 127. Wpisać koło o w trójkąt równoboczny tak, aby punkt c był jednym z punktów stycznych.

Rozwiązanie. Połączmy dany punkt c z o i przedłużmy prostą na dół, z f to jest z punktu przecięcia się prostej cG z okręgiem, zatoczmy promieniem łuk acb , naznaczmy punkta a i b i połączmy je z c . Również można także G naznaczyć. Promieniem cb zatoczmy z c łuki bF i aC , a z a łuk cbG , przez co otrzymamy punkt przecięcia G . Połączmy ten punkt z punktami a i b prostymi, aż te zatoczone łuki aC i bF w C i F przetną, to C i F są inne punkta wierzchołkowe trójkąta. W końcu poprowadźmy CF , to $\triangle CFG$ jest równobocznym stycznie na kole opisanym.

Uzasadnienie. Zatoczywszy łuk z punktu f , przecięcia się okręgu koła o z cG , otrzymane wysokość trójkąta cG i środek o stycznie opisanego równobocznego trójkąta GFC , dalej oba punkta stycznie na kole a , b , a że ob i oa są prostopadłe do GF i GC , bo $\sphericalangle obG = \sphericalangle oaG = P$ jako kąty okręgowe, które obejmują półkole swemi ramionami. Punkta a , f , b są wierzchołkami foremnego sześciokąta wpisanego w koło o , $\sphericalangle afb = 120^\circ$ i $ab = bc = ca$ bokami równobocznego trójkąta abc wpisanego w koło o , który jest czwartą częścią CFG , to CFG składa się z czterech przystających równobocznych trójkątów; dlatego ab równa się połowie opisanego boku żądanego równobocznego trójkąta; z tego powodu oznaczono G jeszcze drugim sposobem, za pomocą łuku cbG zatoczonego z a promieniem równym ab .

§. 251.

Zagadnienie. Fig. 128. Na daném kole opisać stycznie kwadrat.

Rozwiązanie. Przez O poprowadźmy dwie prostopadłe do siebie proste BD i AC , oznaczmy na AC punkta g i k i przenieśmy na półkole $gabk$ promień trzy razy, to będzie $ga = ab = bk = gO$. Zatoczmy z k promieniem ka łuk aBd , a z g zatoczmy promieniem $gb = ka$ łuk bBc , to łuki te przetną się w punkcie B , który jest wierzchołkiem kwadratu. Z O przetnijmy promieniem OB przekątnie w A , D , C . Połączmy A z B , B z C , C z D , D z A , to boki powstałego kwadratu będą styczne do danego koła.

Uzasadnienie. 1. W foremnym sześciokącie wpisanym w koło o promieniu r , bok jego równa się r ; foremny sześciokąt składa się ze sześciu przystających trójkątów, których wysokość równa się połowie boku a , równobocznego trójkąta w toż samo koło wpisane. Połowa boku $\left(\frac{a}{2}\right)$ równobocznego trójkąta wpisanego w to samo koło $= \frac{r}{2} \sqrt{3}$, przeto cały bok $a = r \sqrt{3}$.

2. Bok kwadratu opisanego na kole o promieniu $r = 2r$, a przekątnia d tego kwadratu $= 2r \sqrt{2}$, zatem połowa przekątnej $BO = r \sqrt{2}$ (1).

3. W trójkącie prostokątnym BOg jest znowu $\overline{BO}^2 = \overline{Bg}^2 - \overline{gO}^2$ czyli:

$$\overline{BO}^2 = 3r^2 - r^2 = 2r^2 \text{ a } BO = r \sqrt{2} \text{ (2).}$$

Z obu równań (1) i (2) widzimy, że położenie punktu B jest oznaczone za pomocą boku trójkąta równobocznego w koło wpisane, o promieniu równym jego bokowi.

§. 252.

Zagadnienie. Fig. 129. Na danem kole opisać kwadrat ukośny o danym kącie α .

Rozwiązanie. Przez środek O prowadzimy dowolną sieczną np. bf , którą uważamy za ramię danego ostrego kąta α . Następnie oznaczamy zewnątrz tej figury dopełnienie kąta α , czyniąc $fOg = 90^\circ - \alpha$, naczeczamy równocześnie punkt c koła. Kreśląc teraz do gc w g i c prostopadłe FD i BJ , oznaczmy położenie dwóch boków kwadratu ukośnego. Kreśląc w O na bf prostopadłą średnicę ad , to poprowadzone z jej końców a i d prostopadłe DB i FJ , przetną się z poprzednio oznaczonymi w punktach B , D , F i J , które będą wierzchołkami żadanego kwadratu, a jego boki będą styczne do koła O , stykające się dwa boki FD i DB i dwa drugie obejmują dany kąt α .

Uzasadnienie. Mamy dowieść, że czworobok, którego boki są styczne do danego koła O , jest rzeczywiście kwadratem ukośnym.

Że każde dwa jednak leżące boki są równoległe, wypływa z twierdzenia:

- a) gdy dwie proste są do trzeciej prostopadłe, to są równoległe. Każde dwie z nich są sobie równe, wypływa to ze znanego twierdzenia:
- b) równoległe między równoległymi są sobie równe.
- c) że kąt α zawartym jest pomiędzy FD i DB , wynika to już z powyższego określenia. Mamy jeszcze tylko okazać, że cztery boki FD , DB , BJ i JF są sobie równe.

1. $\triangle DOg \cong \triangle DOa$, bo mają równe przyprostokątnię (r) i przeciwprostokątnię DO , zatem $Dg = Da$.

2. $\triangle FdO \cong \triangle FgO$, bo mają równe przyprostokątnię (r) i przeciwprostokątnię OF , zatem $Fg = Fd$.

Tak samo dowodzimy równości stycznych Ba i Bc ; a ponieważ $OF = OB$, przeto $Fg = Bc = Ba = Fd$.

2. $Dg + Fg = Da + aB$ czyli $DF = DB$.

3. Podług b) jest $JB = JF = DF = DB$, t. j. czworobok styczny do koła O jest rzeczywiście kwadratem ukośnym.

§. 253.

Zagadnienie. Fig. 130. Na danem kole opisać pięciokąt foremny.

Rozwiązanie. Podzielmy okrąg danego koła na dziesięć równych części i poprowadźmy przez środek O promienie 1, 6, 2, 7, 3, 8 i t. d. Poprowadźmy przez punkta 2, 4, 6, 8 i 10 styczne AB , BC , CF , FG , GA ; każde dwie takie styczne przetną się na prostych 1, 6, 3, 8, 5, 10, 7, 2 i 9, 4.

Dowód do Fig. 130. Mamy dowieść, że wielokąt $ABCFG$ na kole O opisany jest rzeczywiście pięciokątem foremnym.

1. $\triangle A2O \cong \triangle B2O$, bo przyprostokątnię $O2$, $\angle A02$ i $\angle B02$ mają równe, zatem $A2 = B2$. Tak samo dowodzimy

2. że $A10 = G10$, $G8 = F8$ i t. d. Dalej jest

3. $\triangle A10O \cong \triangle A2O$, bo mają równą przyprostokątnię i równą przeciwprostokątnię, zatem $A10 = A2$.

Z 1, 2, 3 wypada $AB = AG$. W ten sam sposób dowodzimy równości reszty boków. Równość kątów wypływa z przystawiania dziesięciu prostokątnych trójkątów.

§. 254.

Zagadnienie. Fig. 131. W kwadracie $BCFD$ wyszukać punkta okręgu koła, które połączone od ręki, dałyby nam koło.

Rozwiązanie. Poprowadźmy przekątnie kwadratu, naznaczmy O , poprowadźmy przez ten punkt $KL \perp BC$ i $5'5 \perp CF$, podzielmy każdą połowę boków $C5$, $5F$, $B5'$, $5'D$ na pięć równych części, oraz podzielmy $5'O = O5$ na pięć równych części. Połączmy K ze wszystkimi punktami podziału części $C5$, z punktami podziału części $B5'$ i z punktami podziału części $O5'$ i $O5$. Punkt L połączmy z punktami podziału części $F5$, $O5$, $O5'$ i $5'D$. Szukajmy przecięć tych prostych, które przechodzą przez jednakie liczby, jednaką liczbą są ograniczone i leżą po tej samej stronie prostej KL . Np. $K1$ przecina $L1$ w punkcie a , $L2$ przecina $K2$ w punkcie b , $K1$ przecina $L1$ w r , $K2$ przecina $L2$ w n i t. d. Wynalezione punkta a , b , c , f , g , k , n i r etc. łączymy od ręki.

Uzasadnienie kreślenia. Fig. 131. Rozważmy oba trójkąty prostokątne KLN i $LF1$, a przekonamy się, że $LF : F1 = 5 : 1$ i $LK : LN = 10 : 2$ lub $= 5 : 1$; mamy przeto dwa równe stosunki, zatem otrzymamy następującą proporcję: $LF : F1 = LK : LN$, obok tego $\angle LF1 = \angle KLN = P$; wynika z tego podobieństwo trójkątów według drugiego twierdzenia o podobieństwie: $\triangle KLN \sim \triangle LF1$. Ponieważ jednak obie przyprostokątne są do siebie prostopadłe, przeto muszą także i przeciwprostokątne KN i $L1$ być do siebie prostopadłe. Przytoczony wynik upewnia, że punkt przecięcia r obu przeciwprostokątnych jest wierzchołkiem kąta okręgowego KrL , który 90° wynosi, zatem punkt r jest punktem na okręgu koła.

2. Rozważmy oba trójkąty prostokątne KLA i $LF2$; znajdziemy znówu $LF : F2 = 5 : 2$, i $KL : LA = 10 : 4$ lub $5 : 2$, zatem $LF : F2 = KL : LF$, także $\angle LF2 = \angle KLF = P$. Z tego wypływa: $\triangle KLA \sim \triangle LF2$; obie jednak przyprostokątne są do siebie prostopadłe, zatem muszą także przeciwprostokątne AK i $L2$ do siebie być prostopadłe. Ostatni wynik upewnia nas, że $\angle LrK = P$ jest kątem okręgowym, zatem jego wierzchołek r jest punktem na okręgu koła. W ten sam sposób dowodzimy, że inne punkta k , g , f i t. d. są punktami okręgu koła O .

§. 255.

Objaśnienie. Niech będzie łuk BgC , Fig. 132, którego środek leży pod BC . Podzielmy części łuku Bg i Cg na dowolną ilość równych części, np. na cztery, tak że cały łuk na ośm równych części będzie rozłożony, poprowadźmy przez te punkta podziału i przez końcowe punkta cięciwy BC promienie, zatoczmy z punktów B i C łuki $Cb3_1$ i $Ba3''$, naznaczmy punkta przecięcia tych promieni z łukami w punktach b i a , potem w $1, 2, 3$ i $1', 2', 3'$; następnie $1_1, 2_1, 3_1$ i $1'', 2'', 3''$, to przekonamy się: że pęki promieni, wychodzących z B i C , składają się z elementów zawierających równe kąty, a mianowicie nBC , nBl i t. d., następnie BCn , cCd , dCf i t. d., a mianowicie według twierdzenia: wszystkie kąty okręgowe mające za miarę te same łuki, są sobie równe. Ponieważ kąty okręgowe w B i C są równe, a punkta B i C są zarazem środkami łuków $Cb3_1$, $B3''$, przeto muszą także odpowiednie im łuki, jako to: $C3, 3, 2, 2, 1$ i t. d., następnie $B3', 3', 2', 2', 1'$ i t. d. pomiędzy sobą być równe, a to na mocy twierdzenia: w jednym i tym samym kole lub w kołach równemi promieniami zatoczonych, zatem w kołach do siebie przystających, równym kątem środkowym, odpowiadają równe łuki, cięciwy i t. d.; z tego wypływa wniosek:

§. 256.

Zagadnienie. Fig. 132. Cięciwa BC i wysokość gh łuku niech będą dane; nakreślić pojedyncze punkta łuku.

Uwaga. To zagadnienie zdarza się wówczas, gdy mamy nakreślić łuk bardzo wielkiego koła, przyczem nie można użyć cyrkla do zatoczenia go. Przypadek ten zajść może także, gdy pod BC środek koła dla przeszkód nie może być obrany.

Rozwiązanie. Promieniem BC zatoczmy z B i C łuki $C3_1$, $B3''$ i to w tym kierunku gdzie się wierzchołek g łuku znajduje. Dany wierzchołek g łuku połączmy z B i C prostymi, prowadząc je tak daleko, aby przecięły łuki $C3_1$ i $B3''$ w b i a . Następnie przenieśmy od a i b na dół i do góry dowolnie równe części kilka razy, a otrzymamy: $a1'' = a1' = 1'2'$ i t. d., $b1 = b1_1 = 1_12_1 =$ itd. Proste ograniczone jednakowemi liczbami tworzą punkta przecięcia, które do tego samego łuku należą, np. $C3'$ przecina $B3_1$ w punkcie c ; $C2'$ przecina $B2_1$ w punkcie d . Punkta $B, c, d, f, g, \dots$ łączymy krzywą od ręki.

Twierdzenie. Punkta n, l, k, f, b, c są punktami okręgu koła, którego środek jest pod cięciwą BC .

Dowód. Przez dany punkt q okręgu koła prowadźmy promienie PB i Ca ; ponieważ podług wykreślenia łuki $Cb3_1$ i $Ba3''$ z b i a w równej wielkości przeniesione zostały, przeto odpowiadają im równe kąty środkowe przy B i C . Jednakowemi cyframi oznaczone elementy promieni, których środek w B i C leży, w punktach n, l, k, f, d itd. przecinają się; łączymy je prostymi nl, lk itd., a w ten sposób utworzymy linię ciągłą złożoną z elementów. Punkta B i C są dane punkta okręgu koła i odpowiadają założeniu $\sphericalangle nCl = \sphericalangle lBn$, zatem równe kąty obejmują tę samą prostą nl , a ta jest cięciwą, zatem punkta l i n są punktami okręgu koła. Równie $\sphericalangle lCk = \sphericalangle lBk$, ich wierzchołki leżą w punktach C i B okręgu koła, zatem element lk jest cięciwą, a przeto także punkt k jest punktem tego samego koła; ponieważ jednak wszystkie te kąty okręgowe są sobie równe, przeto i cięciwy ln i lk są sobie równe a ich odpowiednie łuki przystają do siebie. W podobny sposób dowodzimy także, że punkta f, d, c są punktami okręgu koła. Dalej rozważmy, iż środek O koła, którego cięciwą jest BC , znajduje się dlatego pod nią, ponieważ prostopadłe, wyprowadzone ze środków równych elementów, które równe kąty zawierają, tylko po jednej stronie BC w jednym punkcie po stronie wklęsłej przecinają się.

Praktyczne zastosowanie. Fig. 133. Przedstawia dyłowy łuk, którego zakrzywienie jest łukiem koła. Taki łuk może być podług figury 132 nakreślony. Ponieważ wykreślenie to jest pojedyncze, wykonanie przeto z pomocą podziałki, trzy razy większej jak umieszczona, jest dla początkujących korzystne, przyczem próbować można nakładania farbami.

Praktyczne ćwiczenia konstrukcyjne i nauka o krzywych.

Konstrukcja łuków na skrzyty przy wierzchniej budowie dróg żelaznych. *)

§. 257.

Uwaga. Zaleca się uczącym, przy konstruowaniu używać cyrkla, ołówka itp. także lewą ręką.

Zagadnienie. **Fig. 134.** Dane są dwie równoległe linie kolejowe af i gc , znajdujące się w odległości fc ; mamy punkt a prostą af połączyć z punktem c prostą cg zapomocą łuków o danym promieniu R tak, aby te łuki były stycznymi w punkcie t .

Rozwiązanie. Wyprowadźmy w a na fa prostopadłą aO' i odetnijmy długość równą R . W dowolnym punkcie prostej cg wyprowadźmy drugą prostopadłą do góry równą także R . W odległości R od i nad cg poprowadźmy trzecią równoległą. Z O' przetnijmy promieniem $R + R = R'' + R'''$ trzecią przez O poprowadzoną równoległą, to otrzymamy punkt przecięcia O . Z O poprowadźmy do cg prostopadłą Oc , to punkt c jest punktem, w którym krzywa droga wprostą wpada, ten punkt jest *punktem stycznym* (Berührungspunkt). Jeżeli połączymy O z O' , to na tej prostej leży punkt styeczny t łuków. W końcu zatoczmy z O' i O łuki at i tc .

§. 258.

Obliczenie skrzytów.

Chcąc obliczyć $cg = af$, to pomyślmy sobie przez O do linii kolejowej tak daleko poprowadzoną trzecią równoległą, aby przedłużoną $O'a$ w k przecięła: wskutek tego powstanie trój-

*) Jak doświadczenie uczy, ćwiczą uczniowie także przy tego rodzaju elementarnych teoriach swoje zdolności z szczególnem zamięłowaniem i rysują powyższe przedmioty z chwałębną gorliwością, bo uznają obok potrzeby najważniejszego wykształcenia umysłu, także potrzebę nauczania się praktycznych wiadomości w życiu.

kąt prostokątny OkO' , w którym Ok jest tak wielkie jak skręt $eg = x \cdot \overline{OO'}^2 = x^2 + \overline{kO'}^2$, $x^2 = \overline{OO'}^2 - \overline{kO'}^2$, $x = \sqrt{\overline{OO'}^2 - \overline{kO'}^2}$, zatem $OO' = 2R$, odległość obu linii kolejowych niech będzie E , zatem $kO' = 2R - E$; $x = \sqrt{4RE - E^2}$.

Praktyczne zastosowanie.

Promień krzywizny niech będzie równy 100 sążni, $E = 2^0$, podstawmy te wartości w powyższy wzór, a otrzymamy $x = \sqrt{4 \cdot 100 \cdot 1 - 4} = \sqrt{800 - 4} = \sqrt{796}$, $\sqrt{796} = 28 \cdot 0213$.

Zagadnienie. Zamiast 100^0 i 2^0 podstawmy w powyższym wzorze równe wartości 189·648 metrów i 3·793 metrów; potem obliczmy x .

§. 259.

Zagadnienie. Fig. 135. Punkta a i b dwóch zbiegających się linii kolejowych NM i PS są dane; mamy je połączyć łukami koła i styczną tak, aby łuki kołowe o promieniu R były styczne do aS i Mb w a i b .

Rozwiązanie. Poprowadźmy w b do MN prostopadłą bo' i dajmy jej długość równą danemu promieniowi, tak samo wyprowadźmy w a prostopadłą $ao = R$. Z o i o' zatoczmy promieniem R łuki $a2f$ i $b1c$, i poprowadźmy styczną 1, 2.

§. 260.

Zagadnienie. Figury 136 i 136 a. Dane są równoległe linie kolejowe NP i ST , k jest punktem wyjścia, g punktem wejścia (oba są punktami stycznymi), długość jednej stycznej $= AB$, długość skrętu $gb = ak$; mamy nakreślić łuki skrętu kB_1 , A_1g i styczną.

Rozwiązanie. Wyprowadźmy dowolnej długości w k do ST prostopadłą kO_3 , a do NP w g prostopadłą gO_2 . Poprowadźmy w prostokącie $gbka$ przekątne, które się przetną w O . Podzielmy daną styczną AB w punkcie o na dwie równe części i zatoczmy z O promieniem $oA = oB$ koło. Z k przenieśmy do O_1 połowę stycznej, zatoczmy z O_1 koło. Połączmy O z O_1 prostą i wyprowadźmy w punkcie przepołowienia tych prostych (l) prostopadłą fd , ta w przedłużeniu przetnie prostą kO_3 w O_4 . Prosta O_3k jest znalezionym promieniem, którym z O_3 i O_2 zataczamy łuki kB_1 i gA_1 . Połączmy nareszcie A_1 i B_1 prostą A_1B_1 , to ta musi przejść przez O .

Kolej szynowa w Baltimore *) w Ameryce.

§. 261.

Zagadnienie. Tab. IV., Fig. 137. Nakreślić plan główny kolei żelaznej w Baltimore w Ameryce północnej, podług podanych miar w większych rozmiarach.

Rozwiązanie. Równoległe szyny drogi żelaznej leżą w SN i PR , odległość szyn (Spurweite) niech będzie $SP = W$. Poprowadźmy AB prostopadłe do SN , przenieśmy od SN na AB do góry $6W$, od PR na dół $6W$, to dojdziemy do równoległych murów prywatnych i kolejowych budynków. Od PR przenieśmy na AB miarę $11\frac{1}{2}W$, to przyjdziemy do punktu środkowego g .

*) Leży w Stanach Zjednoczonych Ameryki północnej w Państwie Maryland, ma 200,000 mieszkańców, nad Patapsko; jest jednym z pierwszych miast handlowych w Stanach Zjednoczonych.

Na BA wyprowadzamy z g_1 prostopadłą g_1g . Prostopadła $g_1g = 24.W$. W g wyprowadzimy do g_1g prostopadłą FG , podzielimy g_1g prostopadłą CD , w którą cztery proste nachylone pod kątem 10° tak się przecinają, iż jeden punkt przecięcia leży nad g_1g , drugi zaś pod tą prostą. Inne części konstrukcyjne wynajdziemy z linii pomocniczych i zaznaczeń (Coten).

Przekrój kamiennego jazu.

§. 262.

Zagadnienie. Fig. 138. Nakreślić przekrój kamiennego jazu *).

Rozwiązanie. Poprowadzmy poziomą nM , z obranego punktu a wyprowadzmy do nM pionową ab i podzielimy ją na cztery równe części, jedną taką część przenieśmy od a do n , a wtedy będzie $an = \frac{1}{4}ab$, połączmy n z b , poprowadzmy z b do nb prostopadłą $b5$ i przenieśmy na nią $ba + \frac{1}{4}ba = 65 = R$. Zatoczmy z punktu 5 łuk bde . Nakreślmy $\sphericalangle b5e = 120^\circ$. Przedłużmy $5e$ do góry i odetnijmy $eO = 4R + \frac{1}{2}R$. Z O zatoczmy promieniem Oe łuk eM , którego długość wynajdziemy, jeżeli kąt $b5N = 80^\circ$ nakreślimy i OM równolegle do ramienia $5N$ poprowadzimy. Na MO poprowadzmy w M pionową (styczną do łuku eM).

Łuki wznoszące się.

§. 263.

Określenie. Fig. 139. Prosta BD zowie się linią wzniesienia (Steigungslinie), BC odległością filarów [rozpięcie] (Entfernung der Pfeilerkanten [Spannweite]), DC wielkością wzniesienia [różnica między wysokościami łuków], a szczytem łuku.

Uwaga. Łuki te używane są najczęściej przy budowie schodów.

§. 264.

Zagadnienie. Dane są BC i CD ; nakreślić łuk wzniesiony.

Rozwiązanie. Przedłużmy BC aż do d i zatoczmy z C łuk Dd , przepołówmy Bd w k , wyprowadzmy z k do Bd prostopadłą ko i z D na ko prostopadłą DF , to k i F są punktami środkowymi dla łuków Bo i Do . BT jest styczną do łuku Bo .

Praktyczne zastosowanie.

§. 265.

Opisanie. Fig. 140 przedstawia widok wznoszącego się sklepienia, opartego na słupach. Pod bd albo nad przedstawioną *gurtą*, wyobraźmy sobie

*) Fundament jest taki sam jaki przy jazach budowanych z drzewa, zakłada się ruszt na palach ograniczony ścianą szpuntową, a po wypełnieniu starannem przykrywa się dylami. Na nim muwuje się jaz. Według tego przekroju buduje się jaz z grubych kamieni spojenych dobrem wapnem hydraulicznem, a jego wierzch pokrywa się większemi ciosami sarranie obrobionemi. Niepotrzeba obrabiać ciosów z wierzchu. Chropawa powierzchnia jest właściwszą i sprawia widok większej mocy. Niżej jazu bije się jeszcze szereg pali, których końce są pod najniższym stanem wody i wypełnia się miejsce między niemi na prawo od M wielkimi kamieniami, a te uporzędkowane klinuje się małemi kamieniami, aby się nie wyruszyły. To łóżysko kamienne tworzy część prostą jazu, która wygląda jako styczna na prawo od M .

położone ramię schodów, których *wangi* do *bd* równolegle leżą. Górny łuk kreślimy tak samo jak i dolny z punktów *K* i *f*.

§. 266.

Zagadnienie. Fig. 141. Konstrukcja wzniesionego łuku. IIgi sposób. Dane są rozpięcie *ae*, wzniesienie *eb* i linija wzniesienia *ab*.

Rozwiązanie. Przepołówmy *ae* w *v* i poprowadźmy w tym punkcie podziału do *ae* prostopadłą *ov*; naznaczymy punkt przecięcia w *s*, przepołówmy $\sphericalangle aso$ liniją podziału *sz*, przedłużmy *sz* tak, aby ta przecięła *ae* w *O*, uczynimy *so* = *as* i połączmy *o* z *O*. Poprowadźmy z *T* $\perp ae$ i nakreślimy *zt* $\parallel$ do *ab*, to *Tz* i *tz* przetną się w *z*. Poprowadźmy *bf* $\parallel$ do *ae*, ze środka *f* zatoczmy łuk *ob*, a z *O* łuk *oa*.

§. 267.

Zagadnienie. Fig. 142. Konstrukcja wzniesionego łuku sposobem IIIim. Dane są rozpięcie *ac*, wzniesienie *bc*, linija wzniesienia *ab* i połowa sprzężonej osi *bd*.

Rozwiązanie. Wyprowadźmy w *a* prostopadłą do *ac* i przeniesmy na nią z *a* odległość *ag*. *ag* = *bd* i poprowadźmy *gd*. Przedłużmy *ca* do *g*₁ i zatoczmy promieniem *ag* z *a* łuk *gpg*₁. Podzielmy *ag*₁ na dowolną ilość równych części, np. na cztery, i wyprowadźmy z *k*, *l*, *n* prostopadłe do *g*₁*a*, które łuk w naznaczonych punktach przetną. Wyprowadźmy z punktu podziału *o* prostopadłą *ac* do *ac*. Podzielmy *ab* na dwa razy tyle części co *g*₁*a*, tu na ośm równych części, to otrzymamy punkta podziału w *a'*, *k'*, *l'*, *n'*, 2, 4.... Przez te punkta poprowadźmy do *bd* równoległe *k's'*, *l'r'*, *p'n'*....; odetnijmy *k's'* = 5, 6 = *ks*, *l'r'* = 3, 4 = *rl*, *n'p'* = 1, 2 = *pn*, a środkowa prosta równa *ga*. Otrzymane *s'*, *r'*, *p'*, *f*, 1.... łączmy od ręki, a będzie krzywa elipsy.

Graficzne uzasadnienie. Wyobraźmy sobie koła *K'*, *K''* na płaszczyźnie prostopadłej *E* na pierwszą płaszczyznę rzutu, tworzącą z drugą kąt ostry *v* tak położoną, aby ślad poziomy w Iszej ćwiartce od punktu leżącego po lewej stronie *O* na *AX* w prawo się rozciągał. Wyobraźmy sobie poprowadzone prostopadłe cięciwy do poziomej średnicy koła w równych odległościach na pierwszą płaszczyznę rzutu. Dalej niech będzie dany promień *S'*, *S''* skośnie rzucający względem obu płaszczyzn rzutowych, leżący w Iszej ćwiartce i przecinający obie płaszczyzny rzutowe, którego rzut pionowy rozciąga się w prawo w górę od śladu i punktu na osi *O*. Płaszczyzna rzucająca poziomo tego promienia, ma ślad pionowy na prawo od śladu pionowego danej płaszczyzny *E*. Oznaczmy skośny rzut tego koła wraz z średnicą i cięciwami na drugą płaszczyznę rzutów nad *AX*, to powstały w ten sposób obraz jest podobny do wykreślenia Fig. 142.

Różne zetknięcia kół.

§. 268.

Zagadnienie. Fig. 143. W dane koło *o* wpisać trzy styczne koła.

Rozwiązanie. Przenieśmy na okrąg promień, poprowadźmy średnice *I*, *IV*, *II*, *V* i *III*, *VI*; przedłużmy *III*, *VI* w lewo, a *II*, *V* do góry, uczynimy *aVI* = *oVI*, połączmy *a* z *I* prostą i przedłużmy ją do góry, dopóki przedłużonej *II*, *V* w *O* nie przetnie, przepołówmy kąt *aOV* prostą *Ob*, to otrzymamy punkt przecięcia *b*. Zatoczmy promieniem *Ib* z *b* pierwsze koło, które *aIII* i *OV* dotykać będzie i odetnijmy *IIIc* = *Vd* = *Ib*. Punkta *c* i *d* służą za środek do zatoczenia dwóch innych kół stycznych.

Uzasadnienie. Odległość *aVI* równa promieniowi *oVI* podług wykreślenia. W trójkącie równobocznym *IoVI* każdy kąt wynosi 60° i *I*, *VI* = *aVI* jako wynik wykreślenia; dalej $\sphericalangle IaVI$ = *aI*, *VI* = 1/2 $\sphericalangle I, VIo$ = 30°, zatem $\sphericalangle aIo$ = 90°, tj. *aO* $\perp$ *oI* w punkcie *I*; zatem *aO* jest

styczną do koła w punkcie I . $\triangle aoI \cong \triangle OIo$, ponieważ mają równą przyprostokątną i jeden z kątów ostrych, zatem bok $ao = oO$ a kąt przy $O = \alpha$, przeto trójkąt Ooa jest równoramiennym trójkątem, w który sposobem Fig. 123, koło b stycznie wpisane zostało. Trzy są takie trójkąty równoramienne przystające, zatem te trzy koła są styczne do siebie i do koła głównego, przystają także do siebie.

§. 269.

Zagadnienie. Fig. 144. W danem kole o wpisać stycznie cztery przystające do siebie koła.

Rozwiązanie. Okrąg danego koła podzielmy na ośm równych części i poprowadźmy odpowiednie średnice I, V, II, VI itd. Przedłużmy II, VI do góry i odetnijmy $OII = oII$; połączmy V z O prostą, to otrzymamy punkt przecięcia b . Opiszmy z b promieniem $bIII$ pierwsze koło, które koło wielkie w III i promienie IIo i IVo dotknie. Uczyńmy $Ia = VIId = Vc = IIIb$ i zatoczmy z punktów a, d i c trzy koła do siebie styczne. Nakreśliśmy $kh \parallel I, V$ i naznaczymy punkt przecięcia f , to otrzymamy fIV jako promień mniejszego koła stycznego; inne linie pomocnicze widzieć można z wykreślenia.

Bo ze środka V nakreślone koło styczne do średnic II, VI i IV . $VIII$, jak również i koło, którego środek leży w b , stykają się z drugą zewnętrzną styczną tak, iż takowa spotyka środkową Vb w punkcie O pierwszej zewnętrznej stycznej VI, II itd.

§. 270.

Zagadnienie. Fig. 145. W dane koło o wpisać pięć kół stycznych.

Rozwiązanie. Okrąg dzielimy na 10 równych części, kreślimy pięć średnic i styczną ab do danego koła VII , dzielimy $\sphericalangle oba$ prostą bf na dwie równe części, otrzymamy punkt 7. Kawałek $7VII$ jest promieniem koła, które ma być wpisane; promieniem $o7$ zataczamy z o koło pomocnicze, przez co otrzymamy punkta przecięcia 5, 4, 3, z których zatoczmy koła.

Uzasadnienie. Koło 7 styczne do boków równoramiennego trójkąta aob nakreśliłmy sposobem podanym przy fig. 123, tab. III. Cztery inne koła styczne leżą również w równoramiennych trójkątach, przystających do wymienionego, zatem te pięć kół przystają do siebie a ich środki są od O równo oddalone.

§. 271.

Zagadnienie. Fig. 146. W dane koło wpisać sześć równych przystających kół stycznych.

Rozwiązanie. Podzielmy okrąg na dwanaście równych części, poprowadźmy sześć średnic, podzielmy promień R na trzy równe części i zatoczmy jedną taką częścią styczne koło, np. z punktu środkowego III zatoczmy promieniem I, III z I pomocnicze koło, to ono przetnie średnicę w tych punktach, z których zatoczmy inne styczne koła. Z I wypadnie nam jeszcze zatoczyć jedno koło promieniem $= \frac{1}{3} \cdot I, I$.

Uzasadnienie. Jeżeli przez punkta 1, 11, 9, 7 itd., do danego koła I poprowadzimy styczne, to otrzymamy sześciokąt foremny, który na sześć przystających równobocznych trójkątów rozłożony być może. Koło styczne w każdy taki równoboczny trójkąt można sposobem podanym przy fig. 124 wpisać. Środek takiego koła leży od wierzchołka trójkąta w odległości $\frac{2}{3}$ wysokości jego. W fig. 146 wysokość trójkąta jest równa promieniowi koła II , który na trzy równe części podzieliłmy; $\frac{2}{3}$ tego promienia przypada na koło III a jedna trzecia przypada na małe środkowe koło zatoczone z I , które dotyka od zewnątrz sześć przystających kół a ma z nimi równą średnicę.

§. 272.

Zagadnienie. Fig. 147. Nakreślić gwiazdę utworzoną z łuków a ozdobioną kołami.

Rozwiązanie. Nakreślmy kwadrat $acfk$, poprowadźmy przekątnie i narysujmy na nim takiej samej wielkości kwadrat $bdgl$ ustawiony rogami pionowo i naznaczmy punkta przecięcia 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8, z punktów tych zatoczmy łuki. Dalsze wykonanie wskazuje nam figura.

§. 273.

Zagadnienie. Fig. 148. Wewnątrz danego półkola wpisać siedem równych kół stycznych.

Rozwiązanie. Dane półkole dzielimy na dwa razy tyle równych części ile kół stycznych nakreślić mamy, tu więc na czternaście równych części; poprowadźmy przez jeden taki punkt, jak np. przez p styczną tt_1 i naznaczmy punkt przecięcia się promienia Oo i stycznej tt_1 ; następnie przepołówmy $\sphericalangle Oot_1$ linią oy , ta przetnie się z Ob w punkcie 11 , z którego zatoczmy jedno z żądanych kół stycznych. Nareszcie zatoczmy promieniem $O11$ koło pomocnicze, na którym leży reszta punktów, z których koła styczne zatoczyć można.

Dowód. Styczna tt_1 tworzy z przedłużonemi promieniami Oo i OVI trójkąt równoramienny $OoVI$, w który podług fig. 123 koło styczne wpisaliśmy. Dalsze graficzne postępowanie wypływa z przystawania trójkątów równoramiennych.

§. 274.

Zagadnienie. Fig. 149. W dane półkole wpisać trzy koła styczne.

Rozwiązanie. Poprowadźmy Be a w C styczną $C4 = Be$, podzielmy $C4$ na cztery równe części i oznaczmy na Be , równoległą do AC , punkta b, O, c, e ; zatoczmy promieniem eb koło przecinające równoległą poprowadzoną przez c w punktach f i d . Punkta O, f i d są środkami, z których zatoczmy żądane koła.

§. 275.

Zagadnienie. Fig. 150. W dane półkole wpisać łuki styczne i koło.

Rozwiązanie. Podzielmy BC na cztery równe części i zatoczmy z 1 i 2 styczne półkola; podzielmy promień ab na trzy równe części i zatoczmy z 2' trzecią częścią $a2'$ małe koło styczne.

§. 276.

Zagadnienie. Fig. 151. W różnoliniżne kąty fok i gol wpisać koła styczne.

Rozwiązanie. Naznaczmy punkt styczności o i przenieśmy od niego na promień $O4$ na dół i do góry dowolną ilość równych części; poprowadźmy do fg przez $1'2'3'4'....$ równoległe proste $nm, sr, pq....$; z O poprowadźmy przez punkta 1, 2, 3, 4 itd. łuki, które przetną równoległe w I, II, III itd. Te punkta przecięcia połączmy od ręki krzywą IV, I, o i A ; na tej krzywej leżą punkta, z których koła styczne o różnych promieniach zatoczyć można; chcąc z A zatoczyć styczne koło, poprowadźmy do fg z A prostą pad i połączmy ten punkt z O , to otrzymamy punkta styczności z danem dużym kołem i styczną. Krzywa jest parabolą.

Usprawiedliwienie wykreślenia. Fig. 151. Krzywa pomiędzy styczną a kołem jest parabolą i miejscem geometrycznym dla środków takich kół, które styczną fg i koło O dotykają.

Środek koła O jest ogniskiem paraboli IV, III, II, I, A , kierownica (Directrix) LD leży równoległe do fg w odległości równej promieniowi Oo nad fg i przecina oś paraboli $O4$ w punkcie D . Według określenia: że każdy punkt paraboli jest równo oddalony od ogniska i kierownicy, polega kreślenie miejsca geometrycznego dla środków takich kół, które są styczne do gf i pół koła parometrycznego, którego promieniem jest oO . Podług powyższego określenia kreślimy parabolę IV, III, II, I, A , mierząc DI' i tą odległością z O przecinając przystawę na w I i Io , to te

punkta należą do paraboli. Lecz to koło przechodzi przez punkt I , który, ponieważ $Do = oO$, widocznie także $OI = D'I'$ a tak samo $O2 = D'2'$ itd., zatem krzywa jest rzeczywiście *parabolą*.

Promień OB jest $\frac{1}{4}$ parametru i równy Do (odległość między kierownicą a styczną gf), prostopadła z A na kierownicę L niech przecina styczną fg w J a kierownicę w K , to będzie $JK \perp DO$; na mocy własności paraboli musi $OA = AK$ lub $OB + BA = AJ + JK$, zatem jest $AJ = AB$, więc koło A dotyka wskutek położenia swych promieni proste fg i koło O .

§. 277.

Zagadnienie. Fig. 152. Pomiędzy łuk abc i prostą df wpisać koła styczne.

Rozwiązanie. Podzielimy odległość $1, 1'$ pomiędzy łukiem a daną prostą w o na dwie równe części, przenieśmy z o do góry i na dół kilka razy dowolny kawałek. Przez punkta podziału poprowadźmy *pod* o do df równoległe, a ze środka danego łuku przez punkta podziału leżące *nad* o zatoczmy łuki. Te łuki przetną się z równoległymi w punktach n, l, o, k I, II, III, IV itd., punkta te łączymy krzywą, na której leżą punkta, z których zatoczmy koła. Krzywa jest parabolą.

Uzasadnienie. Przeprowadza się w podobny sposób jak wykreślenie fig. 151.

§. 278.

Zagadnienie. Fig. 153. Dane są koła I, II, III, o różnych średnicach; nakreślić je stycznie między sobą.

Rozwiązanie. Do promienia koła I dodajmy promień koła II i przenieśmy sumę oa tych promieni na prostą oc ; promieniem koła I zatoczmy z o jedno koło, a promieniem koła II z a drugie, to koła te zetkną się na prostej oc . Następnie dodajmy do promienia koła I i do promienia koła II promień koła III i zatoczmy pierwszą sumą ob z o łuk df a drugą sumą ab z a łuk k , to te łuki przetną się w punkcie b , który jest środkiem koła III; punkta styczne leżą na liniach środków.

§. 279.

Zagadnienie. Fig. 154. Dane są trzy różnej wielkości dowolnie położone koła I, II, III; wyznaczyć środek X dla czwartego koła, z któregooby można zatoczyć koło *zewnątrz* do danych kół styczne.

Rozwiązanie. Połączmy punkt O_1 ze środkami O i O_2 , naznaczmy punkta przecięcia a, b i f, g . Przepołówmy ab w c i fg w d . Poprowadźmy dowolnej długości prostą RS , naznaczmy dowolnie punkt B , przenieśmy od niego do góry miarę $cO_1 = BO'$ i miarę $cO = BO''$ na dół. Z punktów O' i O'' przenieśmy na dół i do góry kilka razy dowolnie wielką część. Ze środka O_1 koła I zatoczmy promieniem $B1$ po lewej stronie łuk 1 a drugi łuk po prawej stronie u dołu; promieniem $B1'$ zatoczmy ze środka O koła III łuk $1'$ po lewej a drugi łuk u dołu po prawej stronie. W podobny sposób zatoczmy promieniami $B2, B3, B4, B5, B6, \dots$ z O_1 (środek koła I) łuki $2, 3, 4, 5, 6, \dots$; następnie zatoczmy promieniami $B2', B3', B4', B5', \dots$ z O (środek koła III) łuki $2' 3' 4' 5' \dots$, które przetną się z poprzednimi łukami w $\delta', \delta'', \gamma', \beta', \alpha'$ i utworzą punkta krzywej α', c, X i G , z których dowolnie wielkie koło zatoczone być może, a to dotknie koła I i III. Drugą część cXG kreślmy podobnie.

Obok RS poprowadźmy NM , naznaczmy na niej A i przenieśmy z tego punktu w górę $AO' = dO_1$ a na dół $AO'' = dO_2$. Z O' i O'' prostą NM przenieśmy małą, dowolnej długości część tyle razy, ile razy się zmieści. Z O_1 (środek koła I) zatoczmy promieniami $A1, A2, A3, A4, \dots$ łuki $h, k, l, m, n, \dots$ u góry i takie same u dołu; łuki te przetnijmy z O_2 (środek koła III) łukami $v, s, r, t, o, \dots$ o promieniach $A1', A2', A3', A4', \dots$, w punktach $\alpha, \beta,$

$\gamma, \delta, \dots$ i połączmy od ręki znalezione punkta, leżące nad i pod O_1, O_2 , krzywą; to otrzymamy krzywą $qadXF$, z której punktów zatoczmy styczne koła różnej wielkości; ostatnie dotykać będą kół I i II od zewnątrz. Znalezione krzywe przecinają się w X , a z tego punktu po wynalezieniu punktu styczności t promieniem Xt narysować można koło, które odpowiadać będzie wymagany warunek. Znalezione krzywe są hiperbolami.

§. 280.

Zagadnienie. Fig. 155. Dane są trzy koła I, II, III ; wynaleść zapomocą wykreślenia punkt, z któregooby można dane koła czwartem kołem tak otoczyć, aby to ostatnie było do danych styczne.

Rozwiązanie. Połączmy O z O_1 i O_2 , naznaczmy punkta przecięcia J i K , U i P ; przepołówmy JK w a a UP w b ; potem poprowadźmy prostą RS , naznaczmy dowolny punkt a i odetnijmy $aO' = aO$ i $aO'' = aO_1$. Z O' i O'' przenieśmy na dół i do góry kilka razy dowolną część. Promieniami $a1, a2, a3, a4, a5, a6, \dots$ zatoczmy z O'_1 (środek koła II) łuki $t, s, r, p, n, \dots$ i takie same poniżej OO_1 ; wszystkie te łuki przecinamy ze środka O koła I łukami $d, f, g, h, k, \dots$, zatoczonymi promieniami $a1', a2', a3', a4', \dots$ w punktach $u, v, w, x, y, \dots$ (Tak samo otrzymujemy poniżej OO_1 punkta przecięcia). Punkta przecięcia łączymy z sobą a otrzymamy krzywą W, u, X, V , na której nieskończenie wiele punktów leży, z których koła zataczać możemy a koła te nie tylko, że obejmować będą koła I i II , ale nadto będą do nich styczne.

Następnie poprowadźmy prostą NM , naznaczmy b , przenieśmy z tego punktu $bO = bO'$ i $bO_2 = bO''$. Z O' i O'' przenieśmy do góry i na dół dowolną część kilka razy; z O_2 zatoczmy promieniami $b1, b2, b3, b4, b5, \dots$, łuki $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$, które łukami $1', 2', 3', 4', 5', 6', \dots$, zatoczonymi odległościami $b1', b2', b3', b4', b5', \dots$, odpowiadającymi odległościom na NM przecinamy. Powstałe punkta przecięcia $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$, jak i te, które nad OO_2 znajdują się łączymy, przez co otrzymamy krzywą $ZaXY$, na której nieskończenie wielka ilość punktów leży, z których styczne koła, obejmujące koła I i III zatoczyć możemy.

Punkt X , powstały z przecięcia się obydwóch krzywych uważać można jako środek koła stycznego. Krzywe są hiperbolami.

Uzasadnienie wykreślenia Figur 154 i 155

Twierdzenie. Hiperbola jest miejscem geometrycznym wszystkich kół, które dwa dane koła dotykają, a których środki są ogniskami hiperboli.

Uwaga. Każda z gałęzi hiperboli ma własne swe przeznaczenie dla rodzaju styczności.

- Jeżeli szukane koło oba dane koła dotyka nie otaczając ich, fig. 154, wówczas gałąź hiperboli, leżąca bliżej środka mniejszego koła, jest miejscem geometrycznym dla środków kół stycznych.
- Jeżeli szukane koło oba dane koła dotyka i zarazem otacza je, fig. 155, w tym przypadku gałąź hiperboli leżąca bliżej większego koła, jest miejscem geometrycznym dla środków wszystkich kół stycznych.

Oprócz tych przypadków są jeszcze dwa inne.

Do Fig. 154. **Założenie.** Dane są dwa różnej wielkości koła leżące obok siebie I i III , których środki są w O_1 i O .

Twierdzenie. Różne koła, np. X , których środki leżą na gałęzi hiperboli G , bliższej środka O mniejszego koła III , są styczne do kół I i III .

Dowód. Oznaczmy promień pierwszego danego koła przez R , drugiego r , odległość środków $= d$, a promień koła, które oznaczyć mamy $= \varphi$; ponieważ przy styczności dwóch kół środki ich z punktem styczności zawsze na prostej leżeć muszą, przeto przedstawic mamy graficznie trójkąt, którego oba boki $R + \varphi$ i $r + \varphi$, a trzeci zawsze $= d$ będzie. W tym celu zatoczmy łuki ze środków O_1 i O promieniami $R + \varphi = O_1t + tX = B2$ (do fig. 154) i $r + \varphi = O_1 + tX = B2'$ (do fig. 154), które się w X przetną, a ten punkt jest widocznie środkiem koła stycznego o promieniu $= \varphi$, który dane koło dotyka. Jeżeli znowu $R + \varphi_1 = O_1\beta' = B5$ (do fig. 154), zatoczmy z O_1 łuk 5 i przetniemy go łukiem $5'$, którego promień $= r + \varphi_1 = O\beta' =$

$= B5'$ (do fig. 154), przedstawiający drugi bok trójkąta, to odległość punktu β' od obu kół I i III będzie ta sama, mianowicie ϱ_1 , a przeto ten punkt jest miejscem geometrycznym dla środka koła, które oba dane koła od wewnątrz dotyka. Tem graficznem postępowaniem przekonamy się z łatwością, że krzywa do mniejszego koła jest wklęsłą stroną zwróconą, bo odległości punktów krzywej od O mniejsze są aniżeli od O_1 . Widzimy, że, jeżeli którykolwiek punkt α' , β' , γ' , δ' i t. d. X do tej krzywej G należy, to musi $O_1X + tX = O_1X$ i $O_1 + t_1X = OX$, zatem zawsze $O_1X - OX = R - r$ być musi. Ponieważ więc $R - r$ jest daną wielkością, przeto zawsze $O_1X - OX$ będzie oznaczoną wielkością, chociażby X jakkolwiek leżało, aby tylko odpowiadało danym wymogom. Z tego widzimy, że X leży w hiperboli, bo hiperbola jest ową krzywą, przy której różnica promieni wiodących jest stałą i równą rzeczywistej osi. A zatem krzywa G jest rzeczywiście gałęzią hiperboli; jest bliższą środka koła mniejszego III , to jest bliżej leży ogniska swą stroną wklęsłą aniżeli drugiego sprzężonego z pierwszym.

Uwaga. Dane koła mogą być styczne, albo się także i przecinać, w każdym z tych wypadków odpowiednia gałąź hiperboli jest miejscem geometrycznem kół stycznych, nieotaczających danych.

Dodatek. Fig. 154. Mając dane trzy koła I , II , III , których środki w O_1 , O_2 i O leżą, to gałąź F' hiperboli, leżąca bliżej O_2 aniżeli O_1 , będzie tą, na której leżą wszystkie środki kół stycznych dotykających kół I i II od wewnątrz. Ponieważ jednak X jest wspólnym punktem obu podobnych gałęzi hiperboli, które do różnych hiperbol należą, to odpowiada warunkom, że jest środkiem koła, które wszystkie trzy koła równocześnie od wewnątrz dotyka, a nie otacza ich.

Do Fig. 155. Przyjmijmy, że oba różnej wielkości koła I i II są dane, położone obok siebie, a ich środki w O i O_1 .

Założenie. Oba koła I i II otaczamy stycznie różnemi kołami, np. kołem X , którego promień $= TX$, a jego środek X leży na tej gałęzi VW hiperboli, która jest bliższą większego koła O .

Dowód. Wyobraźmy sobie z O i O_1 promieniami $= \varrho - R$ i $\varrho - r$, zatoczone łuki f i s , przyczem promień ϱ jest dowolny, przecinające się w v , to $Ov = \varrho - R$, $vO_1 = \varrho$, przyczem v tworzy punkt przecięcia na kole O w przedłużeniu vO ; $vO_1 = \varrho - r$, $vO_1z = \varrho$, przyczem z jest punktem przecięcia kierunku vO_1 z kołem II , a zatem koło zatoczone z środka v promieniem vz , otoczy koło I i II od zewnątrz stycznie. Ponieważ ϱ jest dowolne, przeto wszystkie niezliczone punkta środkowe, jako to: w , x , v i t. d., odpowiedzą tym samym wymogom, jak tu v , i wszystkie te niezliczone środki kół będą w nieprzerwanym porządku po sobie leżeć, bo przyjmawszy ϱ mogą wszystkie możliwe długości wzrastać lub zmniejszać się. A że $Ov = \varrho - R$, $Ov = \varrho - r$, zatem $Ov = Ov = R - \varrho$, więc v leży na hiperboli, a mianowicie na gałęzi leżącej bliżej środka O koła I , a jego wklęsła strona jest zwróconą do środka. Jeżeli $R = r$, to prosta jest geometrycznem miejscem wszystkich środków kół.

Dodatek. Dane są trzy koła I , II i III , a jeżeli YZ jest geometrycznem miejscem kół otaczających stycznie oba koła I i II , w podobny sposób wynalezione, to punkt przecięcia X jest miejscem geometrycznem gałęzi hiperboli powstałych jednakowym sposobem a zarazem jest środkiem jedynego koła stycznego otaczającego.

Uwaga. 1. Koło I może być od zewnątrz, koło II od wewnątrz i

2. Koło I może od wewnątrz, a koło II od zewnątrz z trzecim kołem styka się, i w obu wypadkach hiperbola stosuje się.

§. 281.

Zagadnienie. Fig. 156. Dane są koła I i II stykające się w B . Koło II ma się od zewnątrz a koło I od wewnątrz z kołem zetknąć.

Rozwiązanie. D jest środkiem koła II , a C koła I ; poprowadźmy przez środkowe punkta AB . Różnicę danych średnic przepołowimy w e , z punktu e środka prostej cB poprowadźmy prostą gh do AB , przez co CD także przepołowioną zostanie. Promieniem $oB = oc$ zatoczmy z D i C nad i pod AB łuki, które się na prostej gh przeciąć muszą. Lub zakreślmy promieniem $oB = oc$ z C łuki 1 i 2, które gh w a i b przetną. Podług Fig. 201, Tab. V, nakreślmy dla osi ab i cB elipsę, na której nieskończenie wiele punktów leży, z których koła stycznie do I od wewnątrz i do II od zewnątrz zatoczyć można. Np. aby można zatoczyć III obierzmy E dowolnie i połączmy ten punkt z C , przedłużmy tę prostą aż do A_1 i B_1 , połóżmy E z D , to przyjdziemy do stycznych punktów B_1 i t . Jeżeli na znalezionej elipsie $cfaBbkE$ wynaleźć many inne punkta, z których jeszcze inne koła stycznie do I , II i III zatoczyć mamy, to nakreślmy pomiędzy koła I i III nową elipsę

B_1 punkt B_1 w ten sam sposób, jak elipsę $cfabB_1E$ pomiędzy koła I i II nakreślono. Punkta przecięcia obu elips będą punktami, z których zatoczmy koła styczne. Różnicę średnic kół I i III przepokłómy w n , a ze środka O prostej B_1n wyprowadźmy do ostatniej prostopadłą fr . Jeżeli rysunek jest dokładny, to EO jest $= OC$. Zatoczmy promieniem $On = OB_1$ z E łuki 11 i 12, przez co punkta przecięcia f i r na prostopadłej fr otrzymamy. Kreśląc dla osi fr i B_1n elipsę, to ta przetnie pierwszą elipsę u spodu w k , a u góry w innym punkcie; z obu tych punktów zatoczyć można nowe styczne koła.

Uzasadnienie wykreślenia Fig. 156.

Twierdzenie. Jeżeli koło II leży w kole I , Fig. 156, to elipsa $BafE$ jest miejscem geometrycznym środków wszystkich kół, które koło II od zewnątrz, a koło I od wewnątrz dotykają.

Dowód. Jeżeli D i C są środkami koła II i I , a z C promieniem $R = \rho$, zaś z D promieniem $r + \rho$ zatoczmy łuki, to te przetną się w E , i CE będzie $= R = \rho$, a $DE = r + \rho$, zatem $DE + CE = R + r = CB$. Krzywa, w której suma odległości każdego jej punktu od dwóch danych punktów stałych (ogniska C i D) równa ilości stałej, jest elipsą, zatem E jest punktem elipsy.

Uwagi. 1. Odetnijmy $d = \rho$, a zatem także odśrodkowość $e = \rho$, to otrzymamy koło jako linię pomocniczą do rozwiązania zagadnienia.

2. Jeżeli się przecinają dane koła różnej wielkości, to miejsce geometryczne środków wszystkich kół stykających się z kołem małym od zewnątrz, a z kołem wielkiem od wewnątrz, jest elipsą.

§. 282.

Zagadnienie. Fig. 157. Nakreślić okrągły łuk konieczu (Kleebogen).

Rozwiązanie. Nakreślmy AB i podzielmy tę odległość na cztery równe części, zatoczmy z a i b ćwierćkoła Ad i Bc . Wyprowadźmy w O do AB prostopadłą Or , uczynimy $Op = Aa = ad$ i zatoczmy z p półkoło drc . W A i B poprowadźmy styczne do ćwiartek kół.

§. 283.

Zagadnienie. Fig. 158. W duże półkoło, przedstawiające łuk okna lub ozdoby, wpisać styczne koła.

Rozwiązanie. Poprowadźmy przez O średnicę CD i wyprowadźmy do niej z O prostopadłą Ob , zatoczmy z o i a promieniem Co półkoła stykające się w O , poprowadźmy w C i D na dół styczne; styczną $C3 = Ob$ podzielmy na trzy równe części i poprowadźmy z 2 do CD równoległą $2d$, z przecięcia się z prostopadłą, wyprowadzonemi z o i a powstaną punkta przecięcia się f , e i d , z których te trzy koła zatoczmy. Połączywszy c z a , otrzymamy punkt styczności g .

§. 284.

Zagadnienie. Fig. 159. W dany odcinek koła wpisać dwa równe koła styczne do cięciwy i łuku. Środki tych kół niech leżą od oJ w odległości n .

Rozwiązanie. Przepokłómy wyskość odcinka w punkcie a . Ze środka o na dół przenieśmy $Ja = or$, zaś z r na dół $m = rO$; zatoczmy z O promieniem $m + Ja + oa = R + m$ łuk Iab . Z o przenieśmy odległości n na FG w lewo i prawo, wyprowadźmy z r i z punktu odciętego po lewej stronie Fb prostopadłą do FG , to otrzymamy punkta przecięcia s i b , które służą do zatoczenia dwóch kół stycznych. Połączywszy o z b i przedłużywszy ten promień aż do okręgu dużego koła, otrzymamy punkt styczności e .

§. 285.

Zagadnienie. Fig. 160. Dany jest prostokąt $GTSH$ i półkoło $KNyOL$, wpisać pomiędzy nie dwa koła tak, aby te dotykały półkoło od zewnątrz, a prostokąt od wewnątrz i znajdowały się w rogach prostokąta.

Rozwiązanie. W połówkach danego prostokąta poprowadźmy przekątnie TM i SM . Naznaczmy punkta przecięcia N i O , przedłużmy GT w górę i zatoczmy z T promieniem TN łuk NuU , aż przetnie przedłużenie TU w U . Połączmy U z N i naznaczmy punkt przecięcia V na TS . Wyprowadźmy w V do TS prostopadłą i naznaczmy na TM punkt przecięcia P . Promieniem VP zatoczmy z P styczne koło. Odetnijmy $SR = TP$ i zatoczmy drugie koło styczne. Wykonując to w wielkich rozmiarach odcinamy $xy = GK = LH = \frac{KL}{6}$.

§. 286.

Zagadnienie. Fig. 161. W trójkątach krzywolinijnych nakreślić koła I , II i III , styczne do ich boków.

Rozwiązanie. Poprowadźmy w C , F i D do $\sphericalangle B$ prostopadłe tC , uF i tG , odetnijmy $DG = DF$. Zatoczmy z G promieniem Gt łuk rts , promieniem CD zatoczmy z t łuki op i mn , które pierwszy łuk przetną w punktach s i r . Poprowadźmy przez te punkta prostą hk równoległą do $\sphericalangle B$ i naznaczmy na prostopadłych tC , tD i uF punkta przecięcia I , II i III . Połączmy II z C i III z D , to β i α będą stycznymi punktami. Promieniem $III\alpha = II\beta$ zatoczmy z I , II i III styczne koła.

§. 287.

Zagadnienie. Fig. 162. W równoboczny kolisty trójkąt wpisać styczne koło.

Rozwiązanie. Poprowadźmy $ef_1 \perp ab$, wyszukajmy środek O równobocznego kolistego trójkąta; to uskutecznia się, gdy wstawimy koniec cyrkla w b i otworzymy go nad połowę łuku bfe ; tym otworem zataczamy łuk 2 z b i łuk 1 z e . Łuki te przecinają się w punkcie g , prosta łącząca go z a przetnie prostopadłą ef_1 w O . Punkt h otrzymuje się tak samo jak g . Prosta hh służy do przekonania się, czy O było dobrze oznaczone. Punkta c , f , f_1 są punktami stycznymi.

§. 288.

Zagadnienie. Fig. 163. W równoboczny kolisty trójkąt kml wpisać stycznie trzy przystające koliste trójkąty.

Rozwiązanie. Połączmy k z l , podzielmy kl na cztery równe części i wyprowadźmy w punktach podziału prostopadłe $n1$, $m2$ i $o3$. Zatoczmy promieniem $pl = pk$ z l i k łuki po i pn , a z p łuki kn i ol . Każde dwa łuki muszą się przecinać w o i n . Tym samym otworem cyrkla zakreślmy z n i o łuki kp i pl . Z m zatoczmy łuk no , z o łuk mn , a z punktu n łuk mo .

Kreślenie różnych łuków w oknach i drzwiach.

§. 289.

Zagadnienie. Fig. 164. Przy rozpięciu AB wykreślić łuk perski, A i B są punkta wyjścia (Anlaufspunkte).

Rozwiązanie. Nakreślmy nad AB ostry łuk ANB , wyprowadźmy z N na AB prostopadłą ON . Poprowadźmy $KL \parallel AB$ i nakreślmy prostokąt $KLBA$,

następnie przekątnie KO i OL . Z O promieniem $OA = OB$ zatoczmy łuki AC i BG aż do przekątnej. Tym samym promieniem zakreślamy łuki CN i NG z K i L .

§. 290.

Zagadnienie. Fig. 165. Wykreślić łuk perski drugiego rodzaju, mając dane rozpięcie i długość łuku wyjścia (Anlaufbogen).

Rozwiązanie. Przedłużmy ab w obie strony, obierzmy bo dowolnie i odetnijmy $aO_1 = bo$. Z O i O_1 zatoczmy promieniem $Oa = O_1b$ łuki nieoznaczonej długości, odetnijmy $ap = br$ równe długości danego łuku. Połączmy a z p prostą i oznaczmy punkt przecięcia s na prostopadłej sk . Poprowadźmy przez s prostą ln równoległą do O_1O , połączmy O_1 z r i O z p prostą i przedłużmy ją aż przetnie ln w n i l . Nareszcie zatoczmy z l i n promieniem $ls = sn$ łuki ps i rs .

§. 291.

Zagadnienie. Fig. 166. Wykreślić łuk normański.

Rozwiązanie. Rozpięcie ac dzielimy na cztery równe części, z l i n zataczamy koła. Z punktu wyjścia c zataczamy promieniem cl półkoło, które przedłużoną prostą ac przetnie w d . Z d zataczamy na dół promieniem dl łuk, ten przetnie linię oporu (Widerlagslinie) cb w b . Odetnijmy $ar = cb$, połączmy b z l i r z n , przedłużmy te proste tak, aby małe koła w t i v przecięły. Z r i b zatoczmy otwartością cyrkla $rv = bt$ łuki vg i tg , które muszą się przeciąć w g .

To wykreślenie można łatwo wykonać za pomocą poprzedniego nakreślenia równobocznego trójkąta lms .

§. 292.

Zagadnienie. Fig. 167. Wykreślenie maurytańskiego łuku.

Rozwiązanie. Poprowadźmy pionową Oc , a z c prostą ab prostopadłą do niej, uczynimy $ac = cb = cO$. Przez O prostą AB prostopadłą do cO , a z O łuk $aABb$. Profile nakreślone przy a i b można łatwo naśladować.

§. 293.

Zagadnienie. Fig. 168. Mając dane rozpięcie FG , wykreślić ostrołuk maurytański.

Rozwiązanie. W środku 4 prostej FG wyprowadźmy prostopadłą Ax , odetnijmy $4O = 4G$, podzielmy $4O$ na cztery równe części, poprowadźmy przez O prostą BC równoległą do FG . Połączmy F i G z punktem l i poprowadźmy te proste aż do przecięcia się z BC w f i f' ; z tych punktów zatoczmy łuki GCA i FBA .

Możnaby także obrać środek leżący między 1 i 2, przeprowadzić przez niego fG i $f'F$. Punkta, z których zatoczylibyśmy łuki, byłyby od O na prostej BC bardziej oddalone, a punkt wierzchołkowy A leżałby wyżej na BC .

§. 294.

Zagadnienie. Tab. V., Fig. 169. Wykreślić ostry łuk koniecu.

Rozwiązanie. Poprowadźmy poziomą AB dowolnej długości, podzielmy AB na sześć równych części, wyprowadźmy z O , s i t prostopadłe OC , sf i tg do AB . Zatoczmy z s promieniem sB łuk Bu , a z t tym samym promie-

niem łuk AB , otrzymamy punkta przecięcia a i b . Miarę $rs + \frac{Ar}{2}$, przeniesmy z l na OC do k i poprowadźmy przez ten punkt poziomą fg . Punkta przecięcia f i g są środkami, z których zatoczmy łuki aC i bC promieniami $fa = fC$.

§. 295.

Zagadnienie. Fig. 170. Wykreślenie podwójnie wygiętego ostrołuku (doppelt geschweiften Spitzbogen).

Rozwiązanie. Poprowadźmy poziomą FG , podzielmy ją na cztery równe części, wyprowadźmy w punktach podziału prostopadłe i nakreślmy ośm kwadratów przystających. Punkta 7 i 6 będą punktami, z których zatoczmy łuki FK i GN , z punktów 2 i 4 zatoczmy łuki KL i LN .

§. 296.

Zagadnienie. Fig. 171. Wpisać koło styczne w ostry łuk JaK .

Rozwiązanie. W środku d rozpięcia JK wyprowadźmy prostopadłą Ld równą JK . Połową długości z rozpięcia zatoczmy z L łuk $f'bg$, to otrzymamy punkta przecięcia f i g , które złączmy z K i J , a te przetną się na prostej dL w c . Promieniem $cd = cf$ zatoczmy z c styczne koło.

§. 297.

Zagadnienie. Fig. 172. Nakreślić ostry łuk z punktów wewnątrz niego leżących, na rozpięciu, i wpisać w niego koło styczne.

Rozwiązanie. Obierzmy dowolny punkt I w bliskości A , uciźmy $BII = AI$. Z I i II zatoczmy promieniem $IB = AII$ łuki. Wyprowadźmy z punktu g połowy prostej AB prostopadłą Cg do IB i odetnijmy $gC = IB = AII$. Promieniem $gII = Ig$ zatoczmy z C łuk i , który przetnie ostry łuk w a i b . Połączmy I z b i II z a , to te przetną się na prostopadłej gC w c ; nareszcie atoczmy z c promieniem $cg = ca$ koło styczne.

§. 298.

Zagadnienie. Fig. 173. Wykreślenie ostrego łuku z punktów leżących zewnątrz niego na rozpięciu i nakreślenie koła stycznego wewnątrz niego.

Rozwiązanie. Obierzmy I zewnątrz ostrołuku w pobliżu A i odetnijmy $BII = AI$. Zatoczmy promieniem $IB = IIA$ z I i II łuki, które się w a przetną i wyprowadźmy z a do AB prostopadłą ag . Odetnijmy $Eg = IB$ i zatoczmy z E promieniem $gII = gI$ łuk bdc , który przetnie ostry łuk w b i c . Połączmy b i c z II i I , otrzymamy punkt f , z którego nakreślmy koło styczne promieniem $fg = fb$.

§. 299.

Zagadnienie. Fig. 174. Kreślenie cyrklem gotyckiego okna.

Rozwiązanie. Obacz rozwiązanie zagadnienia **Fig. 158**, przeniesz z N do d promień ob i nakreśl z d koło styczne.

§. 300.

Zagadnienie. Fig. 175. Wpisać koło styczne zewnątrz małych ostrych łuków, a wewnątrz dużego ostrego łuku.

Rozwiązanie. Promieniem $AII = IB$ zatoczmy z A lub B łuk, przecinający prostopadłą Dc w punkcie o . Połączmy o z A i B i przedłużmy te pro-

ste aż do przecięcia się z dużym ostrym łukiem w k i l , a otrzymamy styczne punkta l , k , h i g i promień og koła stycznego.

§. 301.

Zagadnienie. Fig. 176. Między duży ostry łuk i małe ostre łuki wpisać równoboczny wypukły czworobok, któryby do łuków mniejszych był styczny.

Rozwiązanie. Zatoczmy promieniem $Kb = fc$ łuk z K lub F , który przecnie prostopadłą IO w a . Przez a poprowadźmy kh równoległe do FK , naznaczmy punkta 4 i 2, zatoczmy z a promieniem $4a = a1$ koło, otrzymamy 3 jako czwarty róg wypukłego kwadratu. Z punktów 2 i 3 zatoczmy promieniem FK w górę w lewo łuki, które się przetną w e ; z tego punktu przecięcia zatoczmy łuk 3d2. Do zatoczenia łuku 4l3 poszukajmy w ten sam sposób punktu u góry z prawej strony. Prowadząc przez a i K prostą, otrzymamy punkta styczne v , d ,

§. 302.

Zagadnienie. Fig. 177. Wpisać w równoboczny wypukły trójkąt trzy przystające wypukłe czworoboki.

Rozwiązanie. Wyszukajmy środek o danego wypukłego trójkąta przedłużając łuki BC i BA z A i C o tyle, aby się części Cm i Af_1 przecięły w p ; w ten sam sposób znajdziemy punkt a leżący po prawej stronie u góry. Połączmy p z B i a z A , a otrzymamy punkt przecięcia o . Połączmy C z o i przedłużmy tę prostą na dół. Z o zatoczmy promieniem $oC = oA$ koło, otrzymamy punkt G . Połączmy punkta przecięcia D i F z G , otrzymamy równoboczny trójkąt DFG , a przez niego punkta przecięcia a , d , b , c , f i g . Promieniem AB zatoczmy z o największe koło 1, 2, 3, 4, ..., poprowadźmy średnicę 3, 6 równoległą do AB . Z 3 przenieśmy na okrąg promień $o3$. Promieniem $1o$ zatoczmy z 1 łuk oa i tym samym promieniem z 2 łuk ob ; łuki do i og zatoczmy z punktów 4 i 3, to samo uskutecznijmy z 5 i 6.

§. 303.

Zagadnienie. Fig. 178. Wykreślenie okna kaplicy św. Bartłomieja w kościele św. Szczepana w Wiedniu.

Rozwiązanie. Nakreślmy poziomą NM i zatoczmy nad nią z N i M ostrołuk NDM . Podzielmy łuki ND i DM na równe części w punktach T i U , złączmy N z U a M z T , przedłużmy te proste, naznaczmy punkt przecięcia O , złączmy D z O prostą i przedłużmy ją, to ta jest prostopadłą do NM i połowi ją. Połączmy T z U , naznaczmy punkt przecięcia a na prostopadłej DO , zatoczmy promieniem aO z a koło kropkowane, to ono przetnie poziomą TU w punktach b i c , a prostopadłą DO w C . Promieniem $MC = Mb = NC = Nc$ nakreślmy z punktów M i N drugi ostrołuk $AfebCcdgB$. Miarę NM przenieśmy na przedłużoną prostopadłą DO z D do E ; połączmy E z T i U i naznaczmy punkta przecięcia e , d , h i l . Łuki bo , oc , oh , ol , oe , ... zataczamy tym samym promieniem, którym nakreślono łuki CA i CB , t. j. promieniem $MA = NB$. Punkta z których te łuki zatoczone zostaną, leżą na okręgu o promieniu $MA = NB = Op$, które się zatoczy ze znajdującego punktu przecięcia O w 4p3W21....

Aby otrzymać punkt do zatoczenia łuku bo , weźmy $MA = NB$ w cyrkiel i przetnijmy tym otworem z punktu b duże koło w 2, to ten punkt jest szukany środek, z którego zatoczmy łuk bo . W ten sam sposób znajdziemy punkt 3 dla łuku oc , przecinając promieniem MA z c duże kropkowane

koło w 3. Z punktu przecięcia p przenieśmy miarę $p3$ do $p4$, podobnym sposobem powstana punkta 1, 6, 5. Z punktu 1 zatoczmy łuk Ol , z punktu 6 łuk Od , z punktu 5 łuk eO , wreszcie z punktu D łuki fh i lg . Podzielmy wewnętrzne światło VIO na sześć równych części i wyprowadźmy w punktach podziału do AB prostopadłe; naznaczymy F i G . Poprowadźmy przez punkta 1 i l prostą IR , przez 4 i h prostą $4S$, to otrzymamy na oporach (Widerstandslinien) punkta przecięcia K i L , przez które nareszcie prowadźmy HP równoległe do NM . Z punktu K zatoczmy łuk kn , a z L łuk lm . Oba ostołuki KTm i nGL zatoczmy z punktów K, m i n, L .

§. 304.

Zagadnienie. Fig. 179. Wykreślenie potrójnego przejścia o mieszanych liniach (ein gemischtliniger Dreipass).

Rozwiązanie. Nakreślmy trójkąt równoboczny abc i znajdźmy podług fig. 124 potrzebne linie pomocnicze. Z punktów I, II i III zatoczmy łuki styczne do boków trójkąta abc . Punkta styczności leżą na prostopadłych wyprowadzonych z punktów I, II i III do boków dużego trójkąta, np. w l .

§. 305.

Zagadnienie. Fig. 180. Wykreślenie ostołukowego potrójnego łuku.

Rozwiązanie. Nakreślmy równoboczny trójkąt FGK , a na nim trójkąt równoboczny wypukły. Oznaczmy środek o podług fig. 124; w koło styczne do $\triangle FGH$ wpiszmy trójkąt równoboczny fbg ; połączmy K z f , przedłużmy tę prostą do k i naznaczymy punkt przecięcia z . Promieniem zf zatoczmy łuk do fb , a drugi do fg . W ten sam sposób zatoczmy z b i g resztę łuków aż do odpowiednich boków trójkąta fbg . Dla dokładnego wykreślenia oznacza się wszystkie punkta styczne, jak np. przy z .

§. 306.

Zagadnienie. Fig. 181. Wykreślenie potrójnego przejścia.

Rozwiązanie. Nakreślmy koło a w niem gwiazdę $CHF a DG$; I, II i III są punktami, z których zatoczmy łuki bCc , bDd i cFd . Boki trójkąta CD , DF i FC są granicznymi linijami dla przecięć kół.

§. 307.

Zagadnienie. Fig. 182. Wkreślić różnolinijne poczwórne przejście (Vierpass) w kwadrat $ABCD$.

Rozwiązanie. Poprowadźmy przekątnie, przez ich punkt przecięcia nakreślmy $db \parallel AB$ i $ac \parallel AD$. Nakreślmy kwadrat $abcd$ i oznaczmy punkta 1, 2, 3 i 4, z których zatoczmy łuki promieniem $4g$. Chcąc to zadanie rozwiązać ładnie i dokładnie, potrzeba oznaczyć punkta styczne.

§. 308.

Zagadnienie. Fig. 183. Wykreślenie podwójnej wygiętości (eine Zweischweifung).

Rozwiązanie. Nakreślmy koło, poprowadźmy poziomą średnicę cb ; zatoczmy na promieniach półkola stykające się w 6 . Podzielmy półkole $ca6$ na sześć równych części i naznaczymy punkta podziału w 1, 2, 3, 4, 5 i 6; odejmijmy $cf = \frac{1}{6}$ małego półkola, t. j. $cf = 1,2 = bd$ i poprowadźmy fd przez środkowy punkt 6. Podzielmy promień $f6 = 6d$ na cztery równe części

i oznaczmy punkta p, r, s i t, u, y . Wyprowadźmy w r i u prostopadłe gh i kl do fd ; odetnijmy $xm = fp = pr = nw$ i zatoczmy z m łuk $\alpha x \beta$, z n łuk $\gamma w \delta$, z p łuk $f \alpha$, z s łuk $\beta \delta$, z t łuk 6γ , z y łuk $d \delta$.

§. 309.

Zagadnienie. Fig. 184. Wykreślenie poczwórnej wygiętości (eine Vier-schweifung).

Rozwiązanie. Nakreślmy z O koło, a w niem dwie prostopadłe do siebie średnice BC i AD , z pomocą ich kwadrat $ABDC$. Przepołówmy każdy bok w F, G, H i K , połączmy te punkta prostymi $FG, KF, \dots$, to $FGHK$ będzie nowym kwadratem, na którym zaznaczymy punkta m, l, o i n . Z punktu l zatoczmy promieniem lB łuk KBu , z o łuk DHt , z n łuk CGs , z m łuk AFr . Z K zakresłmy promieniem Kl łuk 1 , ten przetnijmy z m promieniem $FK = 2Bl$ łukiem 2 w a , to znaleziony punkt jest nowym środkiem dla łuku Kr . Aby wypadła dokładnie styczność w r , potrzeba połączyć m z a . Tym samym sposobem kreśli się łuk Fs , zataczając z n promieniem FK łuk 3 , a z F promieniem $Bl = mA$ łuk 4 , to f będzie znalezionym środkiem łuku. Na prostej fn leży punkt zetknięcia s . W ten sposób postępuje się dalej w kreśleniu.

§. 310.

Zagadnienie. Fig. 185. Wykreślenie potrójnego przechodu gotyckiego.

Rozwiązanie. Wykonywamy go podług **Fig. 181**, przyczém kreślimy trójkąt I, II, III , aby otrzymać jednakiej szerokości dzioby kl, mn, rs . Dwa wewnętrzne łuki (łuki dziobowe [Nasenhögen]) przedstawiają w widoku pu-sty gardziel (eine Hohlkehle), do którego dołącza się płytkę w $abcd, \dots$

§. 311.

Zagadnienie. Fig. 186 przedstawia kreślenie potrójnego ostrołuku gotyckiego, wykonane podług prawidła **Fig. 180**.

Rozwiązanie. Ostre dzioby n, p i r leżą na trójkącie DFG . Ponieważ łuk bB z punktu C a łuk bn z punktu D zatoczono, przeto punkta styczne b i t leżą na prostej CK , poprowadzonej przez środki C i D . Łuk vt musi połowić kąt krzywoliniowy zakreslony z punktu l prostej CK . Punkt m na prostej BH jest środkiem dla łuku wx .

§. 312.

Zagadnienie. Fig. 187. Okna rozetowe kościoła Minorytów w Wiedniu.

Rozwiązanie. Kreślimy koło, dzielimy jego okrąg na 24 równych części, kreślimy promienie, dzielimy $\frac{1}{24}$ okręgu na cztery równe części, a otrzymamy punkta $a, b, c, d, f, g, \dots$, z których zatoczmy łuki $u \delta, Bu, 4r, 5v, \dots$, te przetną się w $y, u, v, w, \dots$. Połączmy punkta $a, b, c, d, f, \dots$ ze środkiem O : poprowadźmy przez punkta a, u i b, u proste, to te przetną nakreślone promienie w IV i III . Z IV zatoczmy promieniem $IVu = IIIu$ łuki, które będą styczne do promieni $5O$ i BO . Zatoczmy promieniem $OIII$ pomocnicze koło, to w niem leżą punkta, z których zatoczmy inne łuki przystające. Kreśląc z punktu styczności p równoległą pa do BO , to otrzymamy na OG punkt przecięcia, a pomiędzy nim i promieniem BO leży szerokość ostrego łuku, który z punktów 10 i 9 zataczamy, a wierzchołek jego będzie w e .

Wykonując zataczamy z O odpowiednimi promieniami kilka kół współśrodkowych, aby otrzymać wykreślenie dokładne.

Zagadnienie. Na podstawie tego pięknego kreślenia cyrklowego spróbujmy nakreślić odpowiednią konstrukcyjną miarą rzemieślniczą, przyglądając się naturalnej rozecie okiennej.

Uwaga. Większa część tumów, w gotyckim stylu, ma w zachodniej fasadzie piękne okna rozetowe gotyckie, których konstrukcyjne cyrklowe świadczą o estetycznym zmyśle ówczesnych budowniczych i zasługują na zapoznanie się z nimi.

§. 313.

Profile gzymsów gotyckich.

Zagadnienia i rozwizania.

Fig. 188. Iszy sposób: Nakreślmy kwadrat $mprs$, poprowadźmy przekątnie, oznaczmy O i poprowadźmy przez środek $il \parallel ms$, $kn \parallel mp$, nakreślmy drugi kwadrat $kinl$ równy pierwszemu, ustawiony na rogu. Oznaczmy punkt przecięcia 1 , powstały z przecięcia prostych kn i pr i w ten sam sposób 2 . Przez 1 i 2 nakreślmy ef . Promieniem ar z r zatoczmy koło, które przetnie przekątnię mr w o , i zatoczmy z o promieniem $oc = oa$ łuk $abdc$. Z punktu przecięcia b nakreślmy bg równoległe do rs . Grubiej nakreślona linija przedstawia linię profilu. Zamiast kreskowaniem, można nałożyć płaszczyznę karminem, ceglastą (Sprengerroth) lub inną farbą.

Taki profil przedstawia się oku przyjemnie, gdy płaszczyznę profilu przedtem farbą nałożymy, a nareszcie wyciągniemy silnie czarno linię profilu.

Fig. 189. IIgi sposób: Przystające kwadraty kreślimy podług Igo sposobu, t. j. jeden wsparty na jednym z boków a drugi na rogu. Połączmy k z b ; promieniem gl zatoczmy koło i oznaczmy na ge punkt t ; przez t poprowadźmy $mn \parallel do fg$; przez punkt przecięcia s , powstały z przecięcia się boku bc z przekątnią ge , nakreślmy $pr \parallel gh$. Proste mn i pr przetną się w o , z którego zatacza się promieniem ol łuk lwx . Łuk zatoczony z o przecina bc w x , z którego zataczamy mały łuk styczny do mn .

Można także ten mały łuk zatoczyć z x promieniem vx ; wielkość jego otrzymamy, gdy znajdziemy pierwój punkt przecięcia koła zatoczonego z o z równoległą leżącą pomiędzy bc i fh ; odległość pomiędzy tym wynalezionym punktem przecięcia v a środkiem x równa się długości promienia.

Fig. 190. IIIci sposób: Nakreślmy kwadrat $FGJK$ i wstawmy w niego drugi jemu równy, wsparty jednak rogiem. Z A lub D zatoczmy promieniem AD łuk, który przedłużoną prostą BC przetnie w 4 . Wyprowadźmy z 4 do $B4$ prostopadłą he , podzielmy odległość $C4$ na cztery równe części, przenieśmy jedną taką ćwiartkę z punktu 4 do g i uczynimy także $Dn =$ czwartą część odległości $C4$. Połączmy punkta g i n prostą, przedłużmy prostą AC aż do przecięcia się z gn w a . Z wynalezionego punktu a zatoczmy promieniem aC łuk Cb , który łuk $DL4$ przetnie w O_1 . Z O_1 zatoczmy promieniem O_1a łuk profilowy; następnie z O_1 promieniem O_1a powiększonym czwartą częścią długości $C4$, przetnijmy prostą ng w c i połączmy c z O_1 prostą. Promieniem $cf = 4g$ zatoczmy z c łuk mały styczny. Odetnijmy $o4 = 3,4 = 4g$ i zatoczmy z o półkoło. Z A poprowadźmy Ah prostopadłą do An .

§. 314.

Fig. 191. Kreślenie cyrklowe południowego szczytu (Giebel) kościoła św. Szczepana w Wiedniu.

Fig. 192. Kreślenie jednej części południowego szczytu w $\alpha\beta\gamma\delta$.

Nakreśliśmy kwadrat $BCHG$ a wewnątrz przedłużonych prostopadłych boków BG , CH przystający kwadrat $GHDF$. Poprowadźmy w $BHGC$ przekątnie, oznaczmy O i zatoczmy z niego promieniem Ou wielkie styczne koło. Poprowadźmy przez O , uK równoległe do BF i np równoległe do BC . Przez narożniki małego kwadratu nakreśliśmy prostą cd , oznaczmy środek II małego kwadratu, i wpiszmy w niego promieniem $Iir = IIs$ styczne koło. Promieniem Iir zatoczmy z O łuki 3 i 4, które z II promieniem Ou (małe boki kwadratu) w I i III przecinamy. Połączmy I i III z O i przedłużmy te proste do w i z , oznaczmy o i wpiszmy z III i I promieniem $IIIo = Iir$ dwa małe koła styczne do wielkiego. Ze środka K kwadratu $DHGF$ zatoczmy promieniem Ku łuk styczny ut .

§. 315.

Fig. 193. Wykreślenie poczwórnego przechodu wyprowadzono z kwadratu. W każdym z tych czterech stycznie wpisanych koł przeprowadźmy wykreślenie potrójnego przechodu podług **Fig. 181** i rysujmy od ręki odpowiednie ozdoby. *Ozdoby miarą rzemieślniczą* (Masswerk-Verzierungen), należące do tego prawa cyrklowego, znajdziemy pod budową szczytu **Fig. 191** pomiędzy ostrołukowymi oknami tunu św. Szczepana w Wiedniu.

§. 316.

Fig. 194. Kreslenie żłóbkowania.

W kole oznaczającem podstawę słupa poprowadźmy cięciwę CD , podzielmy ją na pięć równych części, zatoczmy z C i D promieniem CD łuki Df i Cf , to te przetną się w f ; połączmy f z 1 i 4 , przedłużmy te proste do a i b . Następnie zatoczmy promieniem $1,2 = 3,4$ łuki $2e$ i $3d$, oznaczmy ich punkta przecięcia c i d ; zatoczmy z c i d promieniem cC łuki Ca i Db ; z f zatoczmy promieniem fa większy łuk ab . **Fig. 195** jest w przekroju żłóbkowanym słupem (Säulenschaft) i przedstawia zastosowanie praktyczne.

§. 317.

Fig. 196. Inny sposób kreslenia żłóbkowania.

W daném kole jako podstawie słupa poprowadźmy cięciwę AB , przepołówmy ją w K , nakreśliśmy z C i D na średnicach $AK = KB$ dwa koła styczne. Promieniem CD zatoczmy z C i D łuki, które się przetną w L . Poprowadźmy przez CL i LD proste FL i LG . Z L promieniem FL zatoczmy łuk FG . **Fig. 197** przedstawia postępowanie przy żłóbkowaniu słupa.

Nauka o krzywych.

§. 318.

Fig. 198. Nakreślić dowolną krzywą z pomocą łuków.

Krzywa jest w ogóle oznaczoną, jeżeli położenia jej pojedynczych punktów $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ lub prawo dla tego położenia jest znane. Wynalazszy podług prawa istniejącego dla krzywej, którą rysować mamy, te położenia rodzących, o ile można blisko i w równych odległościach, to można kawałki krzywej należące do cięciw $ab, bc, cd, de, ef, gh, hk$ zastąpić łukami, które tem bardziej zgadzać się będą z zakrzywieniem krzywej, im mniejsze cięciwy obrano.

W tym celu wyprowadźmy do tych cięciw prostopadłe $nd, oy, p\beta, q\alpha, rz, sy, tx, nw$, a te przedłużone przetną się, a mianowicie nd z oy w I , oy

z $p\beta$ w *II*, $p\beta$ z qa w *III*, qa z rz w *IV*, rz z sy w *V*, sy z tx w *VI* i tx z vw w *VII*. Połączmy punkt przecięcia obu zewnętrznych prostopadłych $n\delta$ i vw i punkt przecięcia obu wewnętrznych qa i rz , to prosta lm będzie linią połowiącą krzywą.

Zatoczywszy z *I* odległością Ib łuk ograniczony prostopadłymi $n\delta$, $o\gamma$, tak samo z *II* odległością IIc , z *III* odległością $III\delta$, z *IV* odległością IVe , z *V* odległością Vf , z *VI* odległością IVg , z *VII* odległością $VIIh$; to otrzymamy krzywą $abcdefghk$ złożoną z samych łuków.

§. 319.

Zagadnienie. Fig. 198. Do danej krzywej $abcdefghk$ z danego punktu *P*, leżącego zewnątrz niej, poprowadzić styczną.

Rozwiązanie. 1szy sposób. Żadaną styczną kreślimy w praktyce bezpośrednio z dostateczną dokładnością, jednak dla oznaczenia punktu styczności niech posłuży następujące wykreślenie: W bliskości punktu styczności stycznej z krzywą, dzielimy krzywą po obu jego stronach na małe równe łuki $fg = gh = fe = ed$, wyprowadzamy prostopadłe tx , sy , rz , qa , następnie prowadzimy z *P* prostopadłą PB do tx , $PC \perp sy$, $Pd \perp rz$, $PF \perp qa$; to punkta *B*, *C*, *D*, *F* będą punktami nowej krzywej, która przetnie daną w szukanym punkcie styczności *f*.

2gi sposób. Przez dany punkt *P* i krzywą $abcd \dots k$ poprowadzmy dowolną ilość siecznych, przepołówmy wszystkie tą krzywą ograniczone kawałki tych siecznych i poprowadzmy przez otrzymane punkta podziału drugą krzywą, która daną przetnie i oznaczy w ten sposób punkt, przez który styczna przechodzić musi.

Elipsa.

§. 320.

Określenia. Fig. 199. Elipsa jest krzywą linią, mającą tę własność, że suma odległości $III f + III f'$ jakiegokolwiek punktu *III* krzywej jest równa wielkiej osi *BD*. Punkta *f* i *f'* zowią się ogniskami (Brennpunkte), linie $III f$ i $III f'$ promieniami wodzącymi (Leitstrahlen) dla punktu *III*, *AC* zowie się osią małą a *BD* osią wielką elipsy.

Sposoby kreślenia elipsy.

§. 321.

Fig. 199. Kreślenie elipsy, gdy obie jej osie są dane.

Wyprowadzmy dwie prostopadłe do siebie, w punkcie *O* połowiące się proste, *AC* równa danej małej a *BD* danej wielkiej osi, weźmy kawałek $Bc < Bf'$ w cyrkiel i zatoczmy z *f* i *f'* łuki *I*, *I'*, *VI*, *VI'*, i przetnijmy je znowu z *f* i *f'* pozostałym kawałkiem *Dc* wielkiej osi; tak otrzymamy cztery punkta *I*, *I'*, *VI* i *VI'* elipsy. Łuki *II* *II'*, *V* *V'* zatoczone otworem Bb z *f* i *f'* i przecięte również z *f* i *f'* odległością Db , dadzą punkta *II*, *II'*, *V*, *V'*; łuki *III* *III'*, *IV* *IV'* zatoczone i przecięte odpowiednikami długościami *Ba* i *Da* z ognisk dadzą punkta *III*, *III'*, *IV*, *IV'* elipsy.

Jeżeli tak otrzymane punkta *I*, *II*, *III*, *A*, *IV*, *V*, *VI*, *D*, *VI'*, *V'*, *IV'*, *C*, *III'*, *II'*, *I'*, *B* połączmy od ręki nieprzerwaną linią, to otrzymamy żadaną elipsę.

§. 322.

Fig. 200. *Inny sposób kreślenia elipsy, gdy jej osie są dane.*

Kreślimy dwie w punkcie o połówiące się prostopadłe, lm równa wielkiej, np równa małej osi, tak na np jak i na lm jako średnicy zataczamy koła, i przecinamy je dowolnie nakreślonymi promieniami w $A, B, C, D, E, H, J, K, L, M, N, R, P, Q, S, T$; przez punkta przecięcia na okręgu małego koła prowadzimy $A1, B2, C3, D4, G5, H6, J7, K8$ równoległe do wielkiej osi, a przez punkta na okręgu wielkiego koła $L8, M7, N6, R5, P4, Q3, S2, T1$ równoległe do małej osi.

Punkta $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ tworzą z końcowemi punktami l, p, m, n obu osi, połączone od wolnej ręki, elipsę.

§. 323.

Fig. 201. Wpisać w prostokąt elipsę.

Cztery boki danego prostokąta $CDFG$ połowimy i prowadzimy linie połówiące $NM, 4, 4'$, które zarazem stanowią wielką i małą oś żądanej elipsy, obie połowy jednej, n. p. małej osi, dzielimy na dowolną, lecz równą ilość równych części $0, 1 = 1, 2 = 2, 3 = 3, 4 = 01' = 1'2' = 2'3' = 3'4'$ i oznaczamy je od środka liczbami, tak samo obie połowy po drugiej osi, tu po wielkiej. Równoległe boki CG i DF prostokąta dzielimy na tę samą ilość części równych i oznaczamy liczbami do środka, jak figura wskazuje. Teraz prowadzimy przez punkta $1, 2, 3$ tak na małej półosi jak i na połowie boku prostokąta linie $N1, N2, N3$, tak samo $M1, M2, M3$, te przecinając się, a mianowicie: $N1$ z $M1$ dadzą punkta a lub g , $N2$ z $M2$ punkta b lub e , $N3$ z $M3$ punkta c lub d jednej połowy elipsy, i podobnym sposobem otrzymamy punkta p, n, m, l, k, h drugiej połowy. Punkta elipsy łączymy znowu od ręki.

Uzasadnienie. To kreślenie elipsy polega na kreśleniu koła Fig. 131, tab. III. Bo wyobraźmy sobie kwadrat $BCDF$ wraz z kołem wpisanem, obrócony około pionowej średnicy KB , a ośko niech będąc w nieskończonej odległości, to powyższy kwadrat rzuci na płaszczyznę obrazową prostokąt, a koło elipsę; punkta pomocnicze zmieniają swą odległość tylko na poziomej średnicy koła.

§. 324.

Fig. 202. Kreślenie elipsy łukami.

Na danych osiach ab, cd elipsy, wykreślimy prostokąt $BCDE$. Obie połowy jednej osi przepołowimy, mianowicie uczynimy $OI = Ic = Ol = ld$, uczynimy to samo z półbokami równoległoboku, równoległemi do drugiej osi, t. j. $cI' = BI' = Cl' = dI'$, poprowadzimy $aI', a1'$ i $bI', b1'$, te się przetną w k i l , następnie poprowadzimy cl i dk ; ze środka cl wyprowadzimy do niej prostopadłe nh , taksamo al przepołowimy prostopadłą pf , zaś ak i kd prostopadłemi gf i mg . (Znak q niema w figurze).

Przecięcie h prostopadłej nh z wielką osią służy za środek do zatoczenia łuku cl , przecięcie f na przedłużonej małej osi jest środkiem dla łuku ak , a g dla łuku kd ; z tych łuków otrzymana półelipsa może być zamienioną odpowiedniem wykreśleniem na całą elipsę.

Uwaga. W ten sposób kreślone elipsy zwiemy elipsami o koszykowym łuku (Kreisbogen-Elipse), bo tylko punkta l i k są właściwemi punktami elipsy.

§. 325.

Fig. 203. *Inne dokładniejsze postępowanie w kreśleniu elips z pomocą łuków.*

Na obu danych osiach wykreślimy prostokąt $FGLK$, podzielmy obie połowy jednej osi na trzy równe części $01 = 1, 2 = 2C = 01' = 1'2' = 2'A$,

tak samo połowy boków równoległych do drugiej osi, t. j. uczynimy $G1 = 1, 2 = 2C = F1' = 1'2' = 2'A$, poprowadzmy $B1, B2, B1', B2', e2, e1, e1', e2'$, przeczo otrzymamy przecięcia l, k, n, p i prowadzimy jeszcze cięciwy *) kl i lC .

Bk przepołowiona prostopadłą hI ; kl przepołowiona prostopadłą sg , która przetnie hI w punkcie g ; lC przepołowiona prostopadłą $gIII$, która przecina sg w k ; gk przepołowiona w II . Punkt I na przedłużonej małej osi (w razie potrzeby) służy do zatoczenia łuku Bk , punkt II dla łuku kl , punkt III , leżący na wielkiej osi, jest środkiem dla trzeciego łuku ćwiartki elipsy BC .

Dla pozostałych jeszcze trzech ćwiartek elipsy powtarza się to kreślenie w odpowiedni sposób. Jakkolwiek to postępowanie przedstawia większą zaawansłość aniżeli poprzednie, to jednak jest dokładniejsze, ponieważ te łuki przechodzą przez dwanaście, tam zaś przechodziły tylko przez ośm punktów elipsy.

Uwaga. Dla tych samych powodów zowią tę linię jak w fig. 203 elipsą kozykowego łuku.

§. 326.

Fig. 204. *Kreślenie elipsy za pomocą sumy półosi.*

DN prostopadła do ZW ; bierzemy w cyrkiel sumę obu półosi i z punktów a, b, c, d leżących na ND przecinamy tą otwartością linię ZW w g, e, f i h ; $aI = bII = cIII = dV =$ małej, albo co dla wykreślenia na jedno wyjdzie: $gI = fII = eIII = hV$ równe wielkiej osi, otrzymamy punkta I, II, III, V elipsy. Odpowiedniemiż użyciem tego kreślenia możemy oznaczyć dowolną liczbę punktów tak jednej części jak i całej elipsy. Wyobraźmy sobie obie prostopadłe ND i ZW stałe, i ślizgającą się po nich prostą AB tak, aby się posuwała jednym końcem A po ZW , a drugim końcem B po ND . Do tej linii pomiędzy A i B w nierównych odległościach od tych punktów przydany jest okówek; to ten nakreśli ciągłym ruchem ćwierć elipsy w każdym z czterech przez prostopadłe ND i ZW utworzonych kątów, a tak postępując dalej, otrzymamy całą elipsę, przyczem kształt elipsy zależy w każdym razie jeszcze od odległości rysującego okówka od punktów A i B .

Praktyczny rysownik kreśli na papierze dwie takie prostopadłe, a za AB bierze w każdym razie pasek papieru, aby w podany sposób oznaczyć punkta elipsy, jeżeli przy jej kreśleniu nie chodzi o szczególną dokładność.

§. 327.

Tab. VI., Fig. 205. **) *Kreślenie elipsy za pomocą różnicy półosi.*

Nakreślimy dwie prostopadłe do siebie $AC \perp BD$, odetnijmy $OA = OC = a$, $OB = OD = b$. Na boku na prostą mn , odcinając $O'C' = OA = a$ i $O's = OB = b$, szukajmy sposobem na figurze podanym różnicę obu półosi $O'C' - O's = sC' = a - b = R$.

Weźmy w cyrkiel długość R , wstawmy w odległości sO lub $s'O$ lub $s''O < R$ jeden koniec cyrkla w s, s', s'' na małej osi BD , to musi drugi koniec cyrkla przeciąć oś wielką AC w C', C'', C''' , a mianowicie zawsze w odległości $sC', s'C'', s''C''' = R$. Połączmy punkta s i C' , s' i C'' , s'' i C''' prostymi linijami, przedłużmy je do I, II, III tak, aby proste $sI = s'II = s''III = a$ równe były połowie wielkiej osi, to punkta I, II, III należą do elipsy.

*) Linij kl i lC brakuje w tej figurze.

**) W figurze mamy $s'C''$ zamiast w lewą dolną, w prawą górną ćwiartkę elipsy przedłużyć, zatem s' i C'' , jak równie I na III przemienić.

W ten sposób można wynaleźć kilka t. j. dowolnie wiele punktów elipsy, które potem od ręki w nieprzerwanym ciągu połączone, dadzą żadaną krzywą. Wyobraźmy sobie linię sI położoną na Oc , to punkt s musi paść na O a punkt I na C , co jest możebne, bo $sI = OC' = a = b + R$. Niechby prosta sI poruszała się ciągle tak, aby punkt I przebiegał wszystkie punkta elipsy pomiędzy C i II , to punkt s prostą sI musi się na małej osi od O ku D oddalać, a punkt C' tej prostą sI musi się na wielkiej osi ku O przybliżać, dopóki prosta sI nie przyjdzie w położenie sII . Jeżeli więc prosta ma takie położenie, że kreslący punkt I przyjdzie do B , to musi się C' w O , a s w pewnym oddaleniu od O ku D na małej osi znajdować, oddalenie to jest równe R , t. j. $OB = a - R$; w ten sposób ma punkt I prostą sI przebieść wszystkie punkta ćwiereki elipsy od C do B .

Poruszając dalej prostą sI i pamiętając, aby jej punkt s poruszał się zawsze na małej osi i po obu stronach O , punkt C' na wielkiej osi również po obu stronach O , to punkt kreslący I opisze całą krzywą $ABC'D$.

Postępowanie to używane jest przy kresleniu elipsografami, któremi elipsę podobnie jak koło cyrklem jednym ciągiem można zakreslić, jednak te przyrządy, jak to już z większego mechanicznego zakłócenia wypływa, są pośledniejsze od cyrkliów co do czystości i dokładności rysunku.

§. 328.

Fig. 206. Kreslenie elipsy, mając dane jej dwie sprzężone średnice FG i HK .

Na średnicy FG zatoczmy półkole, wyprowadźmy w niem w dowolnych odległościach prostopadłe przystawy $Ia, IIb, IIIc, IVe, Vf, VIg$, poprowadźmy przez punkta I, II, III, IV, V, VI linije $op \parallel nq \parallel mr \parallel ts \parallel kt \parallel hu \parallel HK$, połączmy punkt H średnicy HK z punktem d przystawy środkowego punktu półkola, i poprowadźmy $ao \parallel bn \parallel cm \parallel el \parallel fk \parallel gh \parallel HD$, odcinajmy następnie $Ip = Io, IIn = IIq, IIIm = IIr, IVl = IVs, Vt = Vh, VIh = VIu$; to punkta F, o, n, m, H, l, k, h do q, p są punktami elipsy, które łączmy jednym ciągiem od ręki.

Pamiętać jeszcze należy, że linije HK i FG , jeżeli mają być średnicami elipsy, muszą się w punkcie O wzajemnie połowić.

Graficzne uzasadnienie wykreślenia Fig. 206. Wyobraźmy sobie przez średnicę koła FG przeprowadzoną oś rzutów AX , a na niej koło $FcdG$ nakreślone na poziomej i pionowej płaszczyźnie rzutow. S', S'' niech będą danymi rzutami ukośnie rzucającego promienia S pod AX . Jeżeli przez O poprowadzimy prostą $KII \parallel S'$, a przez d równoległą do pionowego rzutu S'' dopóki nie trafi AX w z'' , a w tym punkcie wyprowadzimy do AX prostopadłą $z''H$, to otrzymamy punkt H , który jest punktem sprzężonej średnicy KH . $OK = OH$. W ten sposób wyobraźmy sobie, że ta sprzężona średnica powstała, podczas gdy średnica koła FG jest drugą średnicą sprzężoną. W podobny sposób oznaczamy za pomocą ukośnego rzutu punkta m, n etc. Dalej otrzymany trapezoidy podobne do trapezoida $dOH z''$, które na jednako leżące podobne trójkąty rozłożyć się dadzą, a pomiędzy temi najważniejsze są $OHd, cIIIm, bIIIn$ etc, których bokami $dH \parallel cm \parallel hn$ punkta m, n, q etc. elipsy oznaczone zostały.

§. 329.

Fig. 207. Kreslenie normalnych i stycznych do elipsy.

Prosta MN jest w punkcie h do zakrzywionej elipsy normalną czyli prostopadłą, gdy jest prostopadłą do stycznej przez ten punkt poprowadzonej, lub jeżeli połowi kąt zawarty między promieniami wodzącymi.

W tym celu poprowadźmy do danego punktu h przedłużone promienie wodzące fs i f_1t , podzielmy powstały ztąd kąt, tak aby $\alpha =$ był β , poprowadźmy linię dzielącą MN , to ta będzie żadaną normalną; jeżeli poprowa-

dzimy jeszcze TT_1 prostopadłe do MN w punkcie h , to TT_1 jest styczną do elipsy w punkcie h .

Jeżeli przez punkt P zewnątrz elipsy mamy poprowadzić do niej styczną, to postępujemy w ten sposób: Z P jako środka zataczamy promieniem Pf_1 koło, otwartością AB przecinamy z ogniska f koło w punktach G i H , kreślimy fG i fK , proste te przeczną elipsę w punktach R i L : te dwa punkta połączone z P , dają dwie styczne PT_2 i PT_1 , które przez punkt P prowadzić możemy do elipsy.

Chcąc się wreszcie przekonać o robocie, możemy nakreślić jeszcze linie f_1G i f_1K , to styczne muszą je połowić.

Uwaga. Jeżeli obie prostokątne osie elipsy są dane, to można przez odpowiedni wybór punktów, jak np. P , które zewnątrz pomyslanej elipsy obieramy, i za pomocą tych prostych, jak np. PT_2 , PT_1 , Kf , Kf_1 , f_1G , fG , elipsę dokładnie nakreślić.

Zagadnienie. Z punktu obranego zewnątrz elipsy nakreślić do niej obie styczne, podług drugiego sposobu, wyjaśnionego w fig. 199.

Do kreślenia elipsy w fig. 207, które zresztą jest takie samo jak kreślenie w fig. 199, dodać jeszcze należy: Jeżeli wyobrazimy sobie cienki nierozciągalny sznurek długości wielkiej osi, przytwierdzony końcami w obu ogniskach, a sznurek ten jednostajnie wyprężony posuwać będziemy ostrzem rysującym ciałem nad i pod osią AB ; to powstała ztąd krzywa musi być elipsą, ponieważ sznur tylko wszystkie możliwe położenia promieni wodzących przyjmie, zatem każdy punkt krzywej będzie oddalony od ognisk o stałą linią AB , równą wielkiej osi.

Ten sposób nie jest dokładny, co łatwo widzieć można, jednak w zastosowaniu praktycznym jest bardzo często użyteczny.

§. 330.

Fig. 208. Wpisać elipsę w równoległobok $BCDF$.

To kreślenie jest podobne do fig. 201.

Boki równoległoboku połowimy w A , G , J , K , prowadzimy AK , GJ , dzielimy boki BF , CD i linię GJ na sześć równych części, oznaczamy je liczbami, prowadzimy cztery linie $A1$, a często także $A2$, $K1$ i $K2$; wszystkimi sposobem uwypakowanym w figurze.

Linie $A1$ przecinamy z $K1$, powstaną tu cztery punkta a , b , f , g elipsy, tak samo linie $A2$ z $K2$ dają cztery eliptyczne punkta c , d , h , k .

Punkta A , b , c , J , d , f , K , g , h , G , k , a połączone od ręki nieprzerwaną linią, dadzą nam szukaną krzywą.

Postać $BCDE$, Fig. 208, wraz z owiniętymi linijami, jest wypadkiem ukośnego rzutu Figury 131.

§. 331.

Fig. 209. Wynalezienie prostokątnych osi ab i cd elipsy, którą w równoległobok $ACDG$ wpisać mamy.

Proste BF i HK połowią boki równoległoboku w B , K , F i H . $Ff = \frac{1}{2}GD \perp GD$; Of w o przepołowione od kl , a przecinające GD w O' . Z O' jako środka zataczamy promieniem $O'O$ koło, które przecina prostą GD w h , a przedłużoną GD w e ; połączymy f z e i h ; połączone e z O daje kierunek małej, zaś h z O kierunek wielkiej osi.

Chcąc przedstawić wielkość osi postępujemy jak następuje: Z f zataczamy promieniem fF koło $rFgp$, które przecina ef w g , a także tworzy zf

przecięcie α^*); przez te punkta przecięcia prowadzimy gc i mn równoległe do fO , to od tych równoległych będzie przecięcie eO w c a hO w b , Oc i Ob są obie połowie; a gdy uczynimy $Od = Oc$, $Oa = Ob$, ab wielką i cd małą osią elipsy, która jednym z sposobów nakreślona, będzie wpisana w równoległobok.

Graficzne uzasadnienie. Fig. 209. Niech będzie Ge osią rzutów: $rFyp$ koło na poziomej płaszczyźnie rzutów, wpisane w kwadrat, którego bok GD leży w Ge . Na boku GD nakreślmy kwadrat $GDA''C''$, na pionowej płaszczyźnie rzutów, i poprowadźmy przez jego środek O'' koło $FK''B''H''$, które kwadrat w F , K'' , B'' , H'' dotyka; średnica $H''O''K'' \parallel GFD$ i średnica $FO''B''$ prostopadła do GD w F ; GFD jest przeto poziomym rzutem koła i kwadratu. Dalej niech będzie EB poziomą a z B'' w prawo ku osi rzutów Ge poprowadzona prosta pionowym rzutem ukośnie rzucającego promienia S . Rzucając przeto kwadrat wraz z stycznie wpisanym kołem O'' , F , to $GDA''C''$ będzie ukośnym rzutem kwadratu $GDA''C''$, a $FcKaBdHb$ jest ukośnym rzutem koła $FK''B''H''$ w ten kwadrat wpisane. Dalej HK jest ukośnym rzutem poziomego promienia $H''K''$ koła, a FB jest ukośnym rzutem pionowej średnicy $FO''B''$ koła. Zatem HK jest jedną sprzężoną średnicą, a FB drugą. Następującem wykreśleniem można łatwo oznaczyć dla średnicy dowolnie obranej w tej elipsie, drugą sprzężoną z pomocą koła f . Niech będzie np. ab dowolnie nakreślona, a mamy do niej nakreślić graficznie odpowiednią średnicę sprzężoną. W tym celu oznaczmy punkt przecięcia h tej średnicy na Ge , połączmy h z f prostą hf , wyprowadźmy w f prostopadłą fe do fh i nakreślmy przez punkt osi e i O prostą ed , to ta jest drugą sprzężoną średnicą elipsy. Można więc używając właściwego rodzaju czworoboku kołowego $Ohfe$, w którym kąty okręgowe przy O i f są proste, umieścić dwie prostopadłe średnice w kole $rFyp$ tak, że przeto średnice w elipsie leżące także muszą tworzyć kąty proste, mianowicie gdy wyprowadzimy prostopadłą lk z środka o do cięciwy fO , aż ta przecinie średnicę koła he w O' , a ten punkt jest środkiem pomocniczego koła $hfeO$. Prowadząc zatem hf i fe , to

$\angle$ przy f jako kąt okręgowy $= \angle \frac{hO'e}{2}$. Kreśląc w końcu $ecOd$ i $hbOa$, to $cd \perp ab$. Musimy

także usprawiedliwić oznaczenie punktów c i b za pomocą równoległych gc i mn . Z punktu przecięcia prostej hf z kołem f , oznaczonego przez α , i z punktu O nakreślmy prostopadłe do Ge ; i te oznaczmy $\alpha\beta$ i gy . Z β i y prowadźmy równoległe βb , gc do FB , to położenie wierzchołków b i c wielkiej i małej osi elipsy jest oznaczone. Kreślenie wierzchołków b i c upraszcza się, pamiętając, że $\angle fFO = \angle gyc$, dalej $Ff:gy = eF':ey$ i $FO:yc = eF':ey$, zatem $Ff:gy = FO:yc$, przeto trójkąty fFO i gyc są podobne. Ponieważ jednak dwie pary jednakowych boków są równoległe, przeto i trzecie, t. j. fO i ge równoległe być muszą. W podobny sposób dowieść można równoległości mn i fO .

§. 332.

Fig. 210. Mając daną elipsę, znaleźć osie.

Prowadźmy dwie równoległe cięciwy EF i GH , połowimy je w N i P , prowadźmy przez te punkta podziału prostą LK , którą znowu w O przepołowimy, a otrzymamy środek O elipsy.

Z O zatoczmy dowolnym promieniem koło $ORST$ tak, aby to przecięło elipsę w punktach Q , R , S , T ; jeżeli wykreślenie dobrze wykonano, to te punkta połączone odpowiednio, dadzą nam prostokąt. Nareszcie z punktu O poprowadźmy równoległe AB do jednego a CD do drugiego wymiaru prostokąta, to AB i CD będą żądanymi osiami.

Podług tego, co dotąd o kreśleniu elipsy powiedziano, myślący uczeń może w inny sposób rozwiązać zadanie pod **fig. 209**.

§. 333.

Niech trójkąt SGR **fig. 211** przedstawia ostrokąt, to płaszczyzna przecinająca go, jeżeli spotyka wszystkie jego boki, tworzy z niemi zamkniętą krzywą; linija ta będzie kołem, jeżeli przecinająca płaszczyzna, jak np. GR , tworzy z osią SY kąt prosty; elipsą zaś, gdy przecinająca płaszczyzna, jak np. V , VI , tworzy kąt ostry, przytem jednak, jak to już powyżej wspomniano, spotyka wszystkie boki ostrokągu.

*) Wyobrażamy sobie tylko w figurze.

$\frac{1}{2}GR$ jest promieniem koła przecinającej płaszczyzny GR , zaś postać elipsy dla płaszczyzny przecinającej V, VI można oznaczyć następującym sposobem.

Kreśliny $I, II \parallel III, IV \parallel GR$, to równoległe przetną V, VI w c i e , a boki ostrokąta w s, t i u, v ; na su i tv jako średnicy zatoczmy półkoła, poprowadźmy przystawy ch i ek przez c i e , zaś gm i nr prostopadłe do V, VI ; odetnijmy $cm = eg = ch$ i $er = en = ek$; to punkta m, r, g, n utworzą z a i b punkta elipsy, która zarazem przedstawi się obróconą o 90° na płaszczyznę rysunkową.

§. 334.

O powierzchni elipsy.

Powierzchnia elipsy jest równą powierzchni koła, którego promień jest średnio geometrycznie proporcjonalnym między półosiami.

Uzasadnienie. Powierzchnia elipsy wypływa z powierzchni koła, którego ona jest rzutem i z kąta nachylenia płaszczyzny koła do płaszczyzny rzutu; obwód wielokąta zbliża się ustawicznie zwiększaniem liczby boków do krzywej linii. Niech a oznacza promień koła, zaś φ nachylenie jego płaszczyzny, to powierzchnia eliptycznego rzutu koła $= a^2\pi \cdot \cos\varphi$; zarazem a jest wielką półosią elipsy, a $a \cdot \cos\varphi$ wartość małej półosi b , tak że powyższe wyrażenie dla powierzchni elipsy zamienia się na $a \cdot b \cdot \pi$.

§. 335.

Fig. 220. *Porównanie powierzchni elipsy z powierzchnią koła, którego średnica równa się sumie obu półosi.*

Na **Fig. 220** widzieć można uzmysłowienie wymaganego porównania.

Odpowiednio do tego oznaczmy połowę wielkiej osi przez a , połowę małej osi przez b zaś powierzchnię elipsy przez E , a koła przez K , i szukajmy czy $E \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} K$.

Niech będzie $E = K$, to wynika: $\pi ab = \pi \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$,

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4},$$

$$4ab = a^2 + b^2 + 2ab,$$

$$(a-b)^2 = 0,$$

$$a-b = 0,$$

$$a = b.$$

Ten wypadek wskazuje, że elipsa którą mieliśmy porównać równa ma osie, zatem musiałaby być kołem; przeto obie powierzchnie przy danych warunkach nie mogą być równe.

Ponieważ $a > b$ iloczyn ab równy kwadratowi z przystawy w półkołu, jest mniejszy od kwadratu z promienia r , zatem $\pi ab < \pi r^2$; przeto powierzchnia elipsy jest mniejszą od powierzchni koła podług żądanego wykreślenia. W praktyce taka przemiana figur przy małej różnicy osi jest możebną.

Parabola.

§. 336.

Określenia. Parabola **Fig. 212** jest krzywą mającą własność, że każdy jej punkt a, b, c od stałego oznaczonego punktu f i oznaczonej stałej linii LL_1 , jednakowo jest oddalony. Punkt f zowie się ogniskiem, linija LL_1 kierownicą, proste af i $aIII$, wyrażające wspomniane odległości punktu a paraboli, zowią się promieniami wodzącymi. Przez odległość od linii rozumiemy zawsze prostopadłą do niej.

§. 337.

Kreślenie paraboli.

W fig. 212. $AX \perp LL_1$ i $O_f = \frac{1}{2}Af$. Punkt O zowie się wierzchołkiem paraboli, a AX jej osią.

Na kierownicy wyprowadźmy prostopadłe $Ic, IIb, IIIa$, połączmy punkta I, II, III z ogniskiem, przepołówmy te proste $fI, fII, fIII$, poprowadźmy prostopadłe połowiące linije kc, lb, na ; to z przecięcia się ich z prostopadłymi $Ic, IIb, IIIa$ powstaną punkta a, b, c paraboli.

Tak otrzymane punkta, do których postępowaniem podobnym można dołączyć inne, łączymy od ręki, a otrzymamy parabolę.

§. 338.

Fig. 213. *Inne sposoby kreślenia, mając dany parametr (213).*

1szy sposób. $AX \perp LL'$; $Af = \frac{1}{2}PR$ (do 213) równe połowie parametra; $AO = \frac{1}{4}PR$; O jest wierzchołkiem, f ogniskiem. W dowolnych lecz od wierzchołka O odpowiednio zmniejszających się odległościach prowadźmy do osi AX prostopadłe, t. j. do kierownicy równoległe hk, lm, no, pr, su, vw , uczynimy $fl = fe = 1A$; następnie $fII = fXI = fA$, która przez ognisko przeprowadzona równoległe do kierownicy, zowie się parametrem $XIII = 4AO$ paraboli.

Uczynimy następnie $fIII = fX = 2A$, $fIV = fIX = 3A$, $fV = fVIII = 4A$, $fVI = fVII = 5A$.

Tak otrzymane punkta $I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, e, O$ połączone z sobą, dają parabolę.

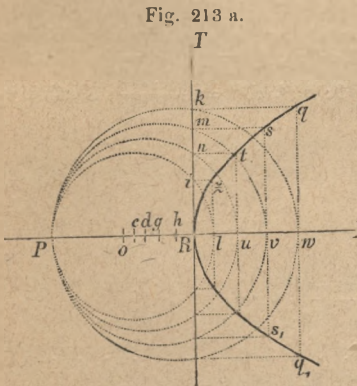


Fig. 213 a.

2gi sposób. **Fig. 213 a.** PX oś paraboli, w R wierzchołek, PR parametr. Wyprowadźmy w R do PX prostopadłą T , obierzmy na parametrze dowolne punkta c, d, g, h etc. i zatoczmy z nich promieniami $= Pc, = Pd, = Pg$ etc. koła, które przetną styczną T w i, n, m, k etc.; wyprowadźmy w i, n, m etc. do stycznej T prostopadłe, te przetną prostopadłe wyprowadzone do PX z l, u, v etc. w punktach z, t, s, q etc.; te punkta należą do paraboli. $wq_1 = wq, vs = vs$ etc. Prowadząc nareszcie przez te punkta krzywą $qstRs_1, \dots$, to ona jest parabolą.

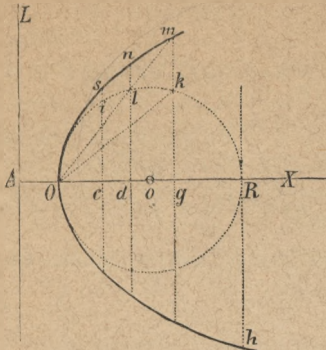
Dowód. Z nauki o kole wiadomo, że $iR^2 = PR \cdot Rl$, $nR^2 = PR \cdot Ru$, $mR^2 = PR \cdot Rv$ etc. Połączenie $Rlzi, Rutn, Rvsm$ etc. są prostokąty, zatem $zl = Ri, ut = Rn, vs = Rm$ etc. Przez podstawienie otrzymamy, gdy oprócz tego $PR = p$ podstawimy: $zl^2 = p \cdot Rl$, $ut^2 = p \cdot Ru$, $vs^2 = p \cdot Rv$ lub ogólnie $y^2 = px$, i to jest równanie paraboli.

Dodatek. $p = \frac{zl^2}{Rl}$, $p = \frac{ut^2}{Ru}$, zntem $\frac{zl^2}{Rl} = \frac{ut^2}{Ru}$ lub $zl^2 : ut^2 = Rl : Ru$.

Ta proporcja wyraża się słowami:

W paraboli kwadraty z przystaw są w stosunku prostym odcinków.

Fig. 213 b.



ostatni $= p$, to będzie $x : y = y : p$, a przeto $y^2 = px$, to jest zrównanie paraboli.

3ci sposób. Fig. 213 b. AX oś, O wierzchołek, L kierownica paraboli. $OR = p$ parameter paraboli. Zatooczmy na parametrze OR jako średnicy koło z o ; wyprowadźmy w dowolnych punktach c, d, g etc. do AX prostopadłe; poprowadźmy cięciwy Oi, Ol, Ok etc. i odetnijmy przystawę $cs = Oi$, przystawę $dn = Ol$, przystawę $gm = Ok$ etc. i poprowadźmy przez punkta m, n, s, O itd. krzywą, to ta jest parabola.

Dowód. Z nauki o kole wiemy: $Oc : Oi = Oi : OR$, $Od : Ol = Ol : OR$, $Og : Ok = Ok : OR$ etc.; podług wykreślenia $Oi = cs$, $Ol = dn$, $Ok = gm$ etc., a przez podstawienie wyraża się powyższe proporcje $Oc : cs = cs : OR$, $Od : dn = dn : OR$, $Og : gm = gm : OR$ etc. Podstawiając w jedno z tych równań jako średni wyraz $= y$, jako pierwszy $= x$, a jako

§. 339.

Fig. 214. Kreślenie paraboli, gdy odcinek SD i przystawa BD punktu B paraboli są znane.

BC jest $\perp DS$ i $CD = BD$. Podzielmy BD i CD na cztery równe części: $B1 = 1, 2 = 2, 3 = 3D = D3' = 3'2' = 2'1' = 1'C$; również DS , t. j. $D1'' = 1''2'' = 2''3'' = 3''S$ (odwróćmy porządek cyfer $1'', 2'', 3''$). Poprowadźmy przez $1, 2, 3$ i $1', 2', 3'$ prostopadłe do BC , następnie przez $1''$ proste Ca i Ba' , przez $2''$ proste $C\beta$ i $B\beta'$, przez $3''$ proste $C\delta$ i $B\delta'$; to linie jednakiemi cyframi oznaczone dadzą przecięcia $\alpha, \beta, \delta, \alpha', \beta', \delta'$, które z B, S i C połączone odpowiednio, dadzą żadaną parabole.

Do Fig. 214. Przyjmijmy, że trzy punkta B, S, C współrzędnych są punktami paraboli.

Mamy dowieść, że punkta $\alpha, \beta, \delta, \alpha', \beta', \delta'$ etc. według podanego wykreślenia należą do krzywej, która jest parabola.

Dowód. SD odcinek $= x$ i BD przystawa $= y$, zostały na n równych części podzielone. Z punktów α, β, δ wyprowadźmy do SD prostopadłe $\alpha d = y_1, \beta d = y_2, \delta d = y_3$ i odcinki $SD = x_1, \triangle \alpha d 3'' \sim \triangle D 3'' C$, zatem jest $\alpha d : d 3'' = DC : D 3'', d 3'' = \frac{ad \cdot D 3''}{DC}$. Ogólnie jednak jest $\alpha d = \frac{z}{n} y$ i $D 3'' = \frac{n-z}{n} x$, przeto jest

$$d 3'' = \frac{\frac{z}{n} y \cdot \frac{n-z}{n} x}{y} = \frac{zx(n-z)}{n^2}; Sd = x_1 = S 3'' - d 3'',$$

zatem

$$x_1 = \frac{z}{n} x - \frac{zx(n-z)}{n^2} = \left(\frac{z}{n} - \frac{zn-z^2}{n^2} \right) x = \left(\frac{zn}{n^2} - \frac{zn-z^2}{n^2} \right) x = \frac{zn-zn+z^2}{n^2} \cdot x = \frac{z^2}{n^2} x. \quad (1),$$

a ponieważ $y^2 = px$, przeto $x = \frac{y^2}{p}$, wstawmy to w zrównanie (1), a otrzymamy

$$x_1 = \frac{z^2}{n^2} \cdot \frac{y^2}{p}. \quad (2).$$

Jednak $\alpha d = y_1 = \frac{z}{n} y$, $y = \frac{n}{z} y_1$ i $y^2 = \frac{n^2}{z^2} y_1^2$; jeżeli tę wartość wstawimy w zrównanie (2), to otrzymamy

$$x_1 = \frac{z^2}{n^2} \cdot \frac{n^2}{p} \cdot \frac{y_1^2}{z^2} = \frac{y_1^2}{p} \text{ i } y_1^2 = p x_1, y_1 = \sqrt{p x_1}.$$

y_1 i x_1 są współrzędne punktu α , który do krzywej $B\alpha SC$ należy, a która rzeczywiście jest parabola. Że i punkta β, δ, δ' są punktami paraboli, dowodzimy w podobny sposób.

§. 340.

Jeżeli *ostrokąg prosty GRS Fig. 215* przetniemy płaszczyzną *xy* równoległą do jednej z rodzących *RS*,

to przekrój da nam krzywą niezamkniętą, bo płaszczyzna nie przetnie wszystkich rodzących.

Aby krzywą przecięcia, która w tym przypadku jest parabolą, uwidocznić, postępujemy w następujący sposób:

W dowolnych odległościach prowadzimy do *GR* równoległe *I, II, III, IV, V, VI*, które *xy* w *a, l, n, r* przetną, na tych równoległych jako średnicach zatoczmy półkola, wyprowadzimy przystawy *aa', lβ, nγ, rδ*, następnie *nm || po || sr || ut ⊥ xy*, przetnijmy je promieniami *aa' = a1 = aa', lβ' = l, 2 = lβ, nγ' = n3 = nγ, rδ' = r4 = rδ*; to będą *α', β', γ', δ', 1, 2, 3, 4* punktami paraboli, które odpowiednio połączone, przedstawiają parabolę, obróconą o 90° na płaszczyźnie rysunkową.

§. 341.

Fig. 216. *Kreslenie paraboli, mając dane kierownicę, oś i parametr paraboli.*

$PR = 2Af$. Wykreślenie jest takie samo jak w **Fig. 213**.

Wyobraźmy sobie trójkąt prostokątny *abc* **Fig. 216** ślizgający się kątem prostym po stałej kierownicy *LL₁* (lineał) **Fig. 216**, dalej jeden koniec *a* trójkąta połączony z ogniskiem *f* nierozciągalnym sznurkiem, który w *a* i *f* umocowany jest i tak długi jak przekątnia *ab*; to, jeżeli sztyft wytyczający sznur porusza się wzdłuż linii *ab*, a równocześnie trójkąt posuwa się po kierownicy, to sztyft w jakimkolwiek położeniu w punkcie *p* na krzywej przez niego utworzonej znajdować się będzie, z czego pokazuje się: $fp + pa = bp + pa$, zatem $fp = bp$, t. j. jego odległość od ogniska i od kierownicy jest jednakowa. Kreslący sztyft opisuje parabolę; ten sposób kreślenia używamy jest tylko w praktyce, bo i tu zachodzi podobna niedokładność, jak to przy elipsie wspomnieliśmy.

Dodatek. Parabola jest miejscem geometrycznym wszystkich środków kół, stycznych do danej prostej, a przechodzących przez stały punkt.

Zagadnienie. Danym promieniem zatoczyć koło, przechodzące przez dany punkt, a styczne do danej prostej.

§. 342.

Fig. 213. *Kreślenie stycznych.*

Iszy sposób. Dany jest punkt styczności *e*. Prowadzimy *e1* prostopadłą do *AX*, z punktu *O* promieniem *O1* przecinamy *AX*, powstały ztąd punkt łączymy z *e*, a powstanie żądana styczna *at*, t. j. prosta, która parabolę w *e* dotyka.

IIgi sposób. Jeżeli punkt styczny nie jest wiadomy, lecz zewnątrz obwodu paraboli dany jest punkt *a*, przez który styczną prowadzić mamy.

Z *a* jako środka kreslimy promieniem *af* łuk, przecinający kierownicę *LL'* w punktach *b* i *c*; w *b* i *c* wyprowadzamy prostopadłe do *LL'*, to te przetną parabolę w punktach *e* i *g*, które połączymy z *a*, otrzymamy dwie styczne *at'* i *at*, jakie można prowadzić z punktu *a* do paraboli.

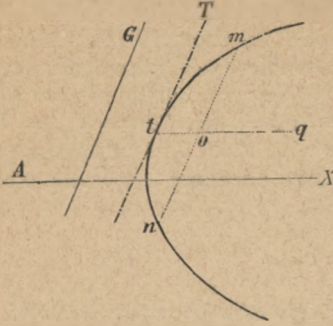
Każda prosta, prostopadła do stycznej w punkcie styczności, zowie się *linią normalną*.

§. 343.

Zagadnienie. Fig. 213. Równoległe do danej prostej G nakreślić styczną do paraboli.

Rozwiązanie. Do G prowadzimy w paraboli równoległą cięciwę mn , połowimy ją i prowadzimy przez środek o prostą tg , równoległą do osi AX , która parabolę przetnie w punkcie t ; t przeto jest punktem styczności, przez który styczną Tt równoległą prowadzimy.

Fig. 213 c.



Uwaga. — Strumień wody wytryskujący z rury niepionowo stojącej zatacza łuk paraboliczny; wystrzelona kula opisuje łuk paraboliczny. Na własnościach tych krzywych polegają *reverbery lamp*, użycie wklęsłych zwierciadeł, trąbek do słuchu i tub. W nowszych czasach używają paraboli jako części łuków skrzętowych przy budowie kolei żelaznej, regulatorów przy maszynach parowych itd.

§. 344.

Zagadnienie. Powierzchnia paraboli równa się dwóm trzecim częściom prostokąta na nią opisanego.

Uwaga. Tu miejsce nie pozwala na uzasadnienie powyższego twierdzenia.

Hyperbola.

§. 345.

Określenie. Fig. 217. Każdy punkt hyperboli ma tę własność, że różnica jego odległości od dwóch stałych punktów jest stałą.

§. 336.

Objaśnienie i graficzne przedstawienie.

Na prostą (do 217) odetnijmy najpierw odległość ff_1 obu punktów stałych, te zowią się ogniskami hyperboli, a oznaczają się przez ff_1 ; równie nakreślimy stałą różnicę am odległości jakiegokolwiek punktu hyperboli od ognisk.

Dalżej jest $CD \perp XY$, $OA = OB = \frac{1}{2} am$; $Af = Bf_1 = \frac{1}{2} af_1$; $AC = AD = Of = Of_1$. To kreślenie stanowi system osi hyperboli, które wypada nam jeszcze wykreślić. Rozpoczęto odległością ff_1 , potrzeba zatem teraz przedstawić dalsze kreślenie większymi odległościami f_1, f_2, f_3 . Obierzmy dowolną wielkość $f_1 b = A\beta > ff_1$, zatoczmy z f i f_1 łuki ST i wv , odetnijmy na $f_1 b$ stałą różnicę $bc = AB = am$ i zatoczmy promieniem $f_1 c$ znowu z f i f_1 łuki 19, 14 i 6, 11, to otrzymamy cztery punkta m, r, G, g .

Tak samo uczynić można odległością $f_1 d$, jednak z opuszczeniem linii pomocniczych, które tylko dla łatwiejszego przegładu są wprowadzone, a obchodząc się można w odpowiedni sposób z XY . Na niej mamy już $AB = ad = am$ odcięte; bierzemy więc $A4 = f_1 d$ w cyrkiel, zataczamy z f i f_1 łuki VW i tu , przecinamy je z ognisk promieniem $B4 = f_1 a'$ łukami 20, 13 i 5, 12, a otrzymamy punkta l, s, a, k . Bierzemy jeszcze $A2$ i tym promieniem zataczamy z f i f_1

łuki HR , xy , przecinamy je promieniem $B2$ z f i f_1 łukami 15, 18 i 7, 10 w punktach b , e , n i q , z f i f_1 zataczamy promieniem $A1$ łuk FJ i zz' ; promieniem $B1$ z f i f_1 łuki 16, 17 i 8, 9, powstaną ztąd punkta przecięcia o , p , c , d . Tak otrzymane punkta a , G , b , c , A , d , e , g , k , i l , m , n , o , B , p , q , r , s połączone z sobą od ręki nieprzerwaną linią dają szukaną hyperbole. XY zowiemy osią poprzeczną, CD osią urojoną, O środkiem, A i B wierzchołkami hyperboli. Chcąc otrzymać pożądaną dokładność, pamiętajmy, iż różnica wielkości f_1 1, 1, 2 itd. odległości $f1$, $f2$ w bliskości punktu f_1 powinna zwolna wzrastać.

Uwaga. Styczną do hyperboli, poprowadzoną przez punkt zewnątrz niej położony, kreśli się w podobny sposób jak przy elipsie. Linia połowiąca przyległa kątowni między promieniami wodzącymi jest *normalną*, a linia połowiąca kąt między promieniami wodzącymi jest styczną w punkcie hyperboli.

Praktyczne postępowanie. Lineał Kf_1 mogący się obracać naokoło f_1 ; ze sznurem przytwierdzonym u K i f' a na krawędzi GK i ślizgającym się sztyftem rysującym podobnie jak przy kreśleniu elipsy i paraboli, uzmysłowi uczniowi z pomocą figury praktyczne kreślenie hyperboli; przytęm lineał powinien być dłuższy o stałą am od sznura.

W ten sposób otrzymano po obu stronach CD krzywolinijne figury, które zarazem są jednakowe, tj. przystają do siebie. Z obu tych figur zowie się jedna dodatnią a druga ujemną gałęzią hyperboli.

§. 347.

Hyperbola uważana jako przekrój ostrogręgu.

Ta krzywa wypada jako ograniczenie krzywolinijne przekroju, utworzonego płaszczyzną AX' z ostrokręgiem gSr , Fig. 218, tworzącą kąt z jego rodzajem gS mniejszy od kąta gSr zawartego między rodzającymi. Przedłużmy ostrokąg, przedłużając jego rodzaje, to płaszczyzna AX' przetnie także ostrokąg nad S , a tak powstanie druga gałąź hyperboli. Przedstawienie, tj. obrocenie tego przekroju hyperbolicznego odbywa się podobnie do przedstawienia przekroju paraboli pod Fig. 215.

§. 348.

Fig. 219. *Kreślenie hyperboli, jeżeli tylko jej osie są dane.*

Nakreślimy prostokąt $FHJK$ na liniach AB i DG , które liniom AB i CD w Fig. 217 odpowiadają; podzielmy $oG=oD$ na dowolną ilość równych części, tak samo i równe DJ i GK , oznaczmy liczbami i połączmy otrzymane punkta z A i B , jak figura okazuje, to przecięcia $A1$ i $A2$ z $B1$ i $B2$ dają punkta a , b , c , d , e , g , hyperboli.

Gdybyśmy przeprowadzili linią AG i jej podobną DB , to te linie odpowiadając własnościom równoległoboku są równoległe, mogłyby dopiero w nieskończenie wielkiem oddaleniu dać punkt hyperboli; prowadząc więc do tych linii równoległe przekątnie HK i FJ , te przedłużając do nl i hk , to będą się zbliżać coraz więcej do hyperboli, jednak nigdy jej nie osiągną. Te proste nl i hk zowią się *ledwo nie styczne* (asymptoty) hyperboli.

Uwaga. Mając dane obie gałęzie hyperboli, można oznaczyć środek o , osie i ledwo nie styczne następującym sposobem: prowadzimy dwie dowolne równoległe cięciwy s i s_1 , połowimy każdą z nich w α i β , łączymy punkta podziału prostą $\alpha\beta$, prosta ta przetnie gałęzie hyperboli w punktach γ i δ ; odległość $\gamma\delta$ połowimy w o , to ten punkt jest środkiem hyperboli. (Pamiętajmy te litery w dal-szym ciągu)

Aby kierunek osi głównej XY otrzymać, zatoczmy ze środka o koło, które przetnie obie gałęzie w punktach ε i τ ; oba te punkta przecięcia łączymy prostą $\varepsilon\tau$ i prowadzimy do téj linii przez środek o równoległą prostą XY , to będzie żądaną osią poprzeczną.

Chcąc otrzymać ledwo nie styczną, przecinamy obie gałęzie prostą $\zeta\eta$ w dowolnej odległości od o równoległe do osi głównej, a ta przecinająca będzie miała z gałęziami hyperboli punkta ζ i η wspólne; odległość $\zeta\eta$ połowimy w punkcie θ i zatoczamy z tego punktu jako środka koło na $\zeta\eta$ jako średnicy. W odległości połowy rzeczywistój osi nakreślimy do téj średnicy koła równoległą cięciwę $\iota\kappa$ i wyprowadzimy z jéj końców ι i κ prostopadłe $\iota\lambda$ i $\kappa\mu$ do średnicy koła i poprowadzimy nareszcie przez punkta λ i o , następnie przez μ i o proste, to te są żądane ledwo nie styczne.

Uwaga. Powierzchnia hyperboli nie da się wynaleść za pomocą geometrii elementarnej i można ją tylko w przybliżeniu oznaczyć mechanicznym sposobem przez rozłożenie na trapezy lub trójkąty i trapezy.

§. 349.

Objaśnienie. Parabola, elipsa i hyperbola są z sobą blisko spokrewnione i już ich powstawanie wskazuje, że uważać je można jako ogólnego wypadku trzy szczególne wypadki. Jeżeli przez odległość punktu od koła rozumiemy wymierzoną odległość na odpowiedniej prostopadłej do koła i przyjmujemy, że prostą jest koło, którego promień jest nieskończenie wielkim, to każda z tych trzech krzywych jest miejscem geometrycznym punktu jednako oddalonego tak od danego punktu jak od danego koła. Stosownie do tego, czy dany punkt na wypukłej lub wklęsłej stronie koła leży, powstaje elipsa lub hyperbola. Różnica pomiędzy wklęsłą lub wypukłą stroną znika, jeżeli koło przeszło w linię prostą i o tyle parabola jest przejściowym wypadkiem między elipsą a hyperbolą. Ponieważ dany punkt przedstawia jedno a środek koła drugie ognisko, to przy paraboli znika drugie ognisko w nieskończonem oddaleniu a drugi promień wodzący (Leitstrahl?) zastępuje średnica.

Cykloidy i cykloidowe krzywe.

§. 350.

Określenie. Wyobraźmy sobie koło $1, 2 \dots 6, \dots 12$, Fig. 221, na jednej i téj saméj płaszczyźnie toczące się po prostej GL , to którykolwiek punkt 12 koła opisze podczas ruchu krzywą $12, a, \dots f \dots l, n, 12'$, którą zwyczajną cykloidą lub poprostu cykloidą zowiemy. Prosta GL zowie się podstawą, a koło kołem rodzącym cykloidę.

§. 351.

Fig. 221. Kreslenie cykloidy.

GL jest $\perp O 12$; dzielimy koło na dowolną, lecz ile możności wielką ilość równych części $12, 1 = 1, 2 = 2, 3 = \dots = 10, 11 = 11, 12$; prowadzimy do GL równoległe $6 f, 7, 5$ ku u ; $8, 4$ ku t ; $9, 3$ ku s ; $10, 2$ ku r ; $11, 1$ ku p przedłużoną; przenosimy długość łuku $12, 1$, która, ponieważ bardzo małą obrótą została, zgadza się prawie z cięciwą $12, 1$ ku $12, 1'$, tj. na prostej GL odejmamy $12, 1' = 12, 1, 1' 2' = 1, 2, 2' 3' = 2, 3$ itd.; wreszcie $11' 12' = 11, 12$; do GL wyprowadzamy prostopadłe $1' I, 2' II, 3' III, 4' IV, 5' V, 6' VI, 7' VII, 8' VIII, 9' IX, 10' X, 11' XI$; promieniem $O 12$ przecinamy z I równoległą $11 p$ łukiem $1' a$ w punkcie a , z II prostą $10 r$ łukiem $2' b$ w b , z III prostą $9 s$ łukiem $3' c$ w c , z IV prostą $8 t$ łukiem $4' d$ w d , z V

7 u przez 5' e w e , wkońcu odcinamy $VI f' = VI 6' = O 12$; dalej kreslimy zawsze tym samym otworem cyrkla $O 12$ z VII przecięcie g łukiem 7' g ; z $VIII$ przecięcie h , z XI przecięcie k , z X przecięcie l , a n otrzymamy cięciem łuku $11' n$ z XI .

Punkta 12 $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, n, 12'$ połączone od ręki dają żadaną cykloidę.

§. 352.

Fig. 222. Drugi sposób kreślenia.

Dzielimy koło i przenosimy na GL z punktu 12 w prawo części koła, prowadzimy równoległe jak w Fig. 221. W $1'$ wyprowadzamy prostą GL , która przecina am w I , prostą GL w $2'$ przecina 10 , 1 w II . Prostopadłe do GL w $3', 4', 5', 6'$ dają z równoległymi przecięcia III, IV, V, f ; odcinamy $I a =$ cięciwie $I a$, $II b =$ cięciwie 2β , $III c = 3 O$, $IV d = 4 \gamma$, $V e = 5 \delta$; to otrzymamy punkta 12, a, b, c, d, e, f połowy cykloidy, którą łatwo dopełnić można podobnem oznaczeniem punktów g, h, k, l, m .

Kreśląc linie $m 11' \dots l 10' \dots k 9' \dots h 8' \dots g 7'$ i przecinające się $I' \dots II' \dots$ itd. to z punktów $II' \dots P' \dots 11' \dots$ zatoczmy łuki promieniami $11' 12' \dots I m \dots II l \dots$, za pomocą których połączyć można punkta $12', m, l, k, h, g, f$, a otrzymamy cykloidę.

§. 353.

Fig. 223. Kreślenie przedłużonej cykloidy.

Określenie. Jeżeli punkt rodzący a jest zewnątrz okręgu toczącego się koła 1, 2, 3... 6... 11, 12, to powstanie przedłużona cykloida.

Kreślenie. $g_1 l_1$ jest $\perp$ do $O 12$ w punkcie 12. Połączmy a z O , zatoczmy promieniem $O a$ z O koło i poprowadźmy przez a prostą $GL \parallel g_1 l_1$.

Toczące się koło lub z niem współśrodkowe zwane także kołem rodzącem, ponieważ zawiera punkt rodzący, podzielmy na dowolną jednakże ile możliwości wielką liczbę równych części, tak że równe kawałki łuków z cięciwami swemi prawie są równe, prowadzimy przez punkta podziału promienie, tak aby i drugi współśrodkowy ale jeszcze niepodzielony okrąg niemi był podzielony na taką samą ilość równych części. Przenieśmy na $g_1 l_1$ z 12 w prawo części 12, 1, 1, 2 toczącego się koła.

Poprowadźmy $qr \parallel qs \parallel dt \parallel \gamma v \parallel \beta w \parallel ay \parallel g_1 l_1 \parallel GL$; przez $1' \dots 2' \dots 3' \dots 11' \dots 12'$ do GL prostopadłe $b I, c II, d III, e IV, \dots n XI, o XII$; przetnijmy promieniem $O a$ z I równoległą ay w b' , z II równoległą βw w c' , z III równoległą γv w d' , z IV równoległą δt w e' , z V równoległą qs w f' ; lecz $VI g' =$ jest $VI g$. W podobny sposób znajdziemy punkta drugiej połowy krzywěj.

Punkta $a, b', c', d', e', f', g', h', k', m', n', o$ połączone od ręki nieprzerwaną linią dadzą przedłużoną cykloidę.

Jest także skrócona cykloida, powstająca, gdy podług Fig. 223 prosta GL jest podstawą, większe koło $a, \alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$ jest kołem toczącym się, a punkt 12 jest punktem opisującym skróconą cykloidę w małym kole 12, 11, 10, 9...

§. 354.

Fig. 224. Kreślenie epicykloidy.

Określenie. Jeżeli koło $o, 1, 2, \dots 10, 11$ toczy się po okręgu innego koła na jednej i tej samej płaszczyźnie, to jakikolwiek punkt O koła toczącego się kreśli epicykloidę podczas ruchu.

Toczące się koło zowie się kołem rodzącem (Erzeugungskreis), bo zawiera punkt rodzący O , a drugie podstawą lub kołem toczenia (Wälzungskreis, — koło, po którym się toczy).

Kreślenie. Rodzące koło dzielimy na dowolną o ile możności wielką ilość równych części, które także na okrąg koła podstawowego przenosimy, tj. łuk $o 1 =$ łukowi $o 1' =$ łuk. $1, 2 =$ łuk. $1', 2' = 3, 3 =$ łuk. $2' 3' = \dots =$ łuk. $10, 11 =$ łuk. $10', 11' =$ łuk. $11, o =$ łuk. $11', 12'$.

Poprowadzmy współśrodkowe koła $6x, 7t, 8r, o VI, 9q, 10l, 11h$ i promienie $O 6, O I, O II, O III, O IV, O V, O VI$; promieniem rodzącego koła przetnijmy z I łukiem $1' a$, z II łukiem $2' b$, z III łukiem $3' c$, z IV łukiem $4' d$, z V łukiem $5' f$, z VI łukiem $6' g$; to o, a, b, c, d, e, f, g będą punktami połowy epicykloidy, którą dopełnić można podobnym wynalezieniem reszty.

Jeżeli koło rodzące i podstawowe mają równe promienie, to w tym przypadku epicykloida zowie się *linią sercową* (Herzlinie, [Cardioid]). Początkujący może nakreślić taką krzywą bez wskazanej figury.

Kreślenie podłużonej epicykloidy polega na kreśleniu Fig. 223, z tą tylko różnicą, że przy przedłużonej epicykloidzie same tylko współśrodkowe koła z O Fig. 224 kreślą się zamiast równoległych $\psi r, \delta s, \dots$ Fig. 223.

§. 355.

Fig. 225. *Kreślenie hypocykloidy.*

Określenie. Jeżeli rodzące koło toczy się wewnątrz podstawowego koła, to powstanie hypocykloida.

Kreślenie. Łuk $o 1 = o 1' =$ łuk. $1', 2' =$ łuk. $1, 2 =$ łuk. $2', 3' =$ łuk. $2, 3 = \dots$, bo rodzące koło podzieliło się na bardzo wielką ilość równych części, a te równe kawałki łuków przeniosło się na okrąg koła podstawowego.

Nakreślimy przez $1, 2, 3, 4, 5, 6$ współśrodkowe łuki $s r, t p, v o, VI n, w m, x l, y k$ i promienie $O o, O 1', O 2', O 3', O 4', O 5', O 6'$; przetnijmy z I, II, III, IV, V, VI łukami $1' a, 2' b, 3' c, 4' f, 5' g, 6' h$, to a, b, c, f, g, h są punktami hypocykloidy.

Jeżeli średnica rodzącego koła równa się promieniowi koła podstawowego, to wówczas hypocykloida zamienia się na prostą, tj. na średnicę koła podstawowego. Początkujący może się przekonać o prawdziwości tego osobnym kreśleniem według powyższego określenia. Jeżeli w hypocykloidzie promień koła rodzącego jest cztery razy większy od koła podstawowego, to powstałą hypocykloidę zwiemy *astroidą*.

Krzywa ta ma tę szczególną własność, że jeżeli do jakiegokolwiek jej punktu poprowadzimy styczną, a jej długość między obiema osiami będzie zawsze stałą, to jej punkta przecięcia po sobie następujące utworzą ćwiartkę astroidy. Jeżeli to we wszystkich czterech kątach prostych wykonamy, to otrzymamy astroidę.

§. 356.

Fig. 226. *Kreślenie przedłużonej hypocykloidy.*

Określenie. Jeżeli przy powstawaniu hypocykloidy punkt rodzący a jest zewnątrz okręgu koła rodzącego, to powstanie hypocykloida przedłużona.

Kreślenie. Skoro się rodzące koło na wielką ilość równych części podzieliło, a wielkości te: $O 1 = O 1' = 1, 2 = 1', 2' \dots$ także na okrąg koła podstawowego przeniesiono, poprowadzmy przez $1, 2, 3, \dots 10, 11, o$ promienie, aby otrzymać punkta podziału $\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, \psi$ koła zatoczonego promieniem $O a$, mającego z rodzącym kołem wspólny środek; poprowadzmy następnie przez $\alpha, \alpha, \beta, \gamma, \delta, q, \psi$ łuki współśrodkowe z kołem podstawowym; a przez $1', 2', 3', 4', 5', 6'$ promienie $I b, II c, III d, IV e, V f, VI g$; z I, II, III, IV, V przecięcia

łuków bb' , cc' , dd' , ee' , ff'' i $VIg' = VIg$; to a , b' , c' , d' , e' , f' , g' będą punktami, które połączone od ręki dadzą żadaną przedłużoną hypocykloidę.

Uwaga. Jeżeli promień koła podstawowego dwa razy jest większy od promienia toczącego się koła, to przedłużona lub skrócona hypocykloida zamienia się na *elipsę*; promienie rodzącego i toczącego się koła mogą mieć dowolny stosunek. Na tem polega mechaniczne urządzenie kilku *elipsografów*.

Rozwijające koło.

(Kreisevolvente.)

§. 357.

Fig. 227. *Kreślenie rozwijającej koło.*

Koło zatoczone promieniem OR dzielimy na dowolną, lecz o ile możności wielką liczbę równych części, tak aby cięciwy należące do małych kawałków łuków 1, 2, 2, 3, 3, 4.... prawie imi były równe. Z punktów podziału prowadzimy promienie $O1$, $O2$, $O3$, $O4$, a do tych kreślimy prostopadłe $1f$, $2e$, $3d$..., $7n$..., $12g$.

Niech będzie n. p. w punkcie 7 początek linii spiralnej, przenieśmy kawałek łuku na prostopadłą af , dwa kawałki łuków $5, 6 + 6, 7$ na $b5$, trzy kawałki łuków $4, 5 + 5, 6 + 6, 7$ na $c4$, na $d3$ cztery i t. d., wystawimy sobie, jak gdyby naokoło całego koła nawinięto cienką, giętą, nierozciągalną linię, którą zwolna odwijamy, przez to zgięcie okrąg przedstawi się jako prosta. W ten sposób otrzymamy punkta a , b , c , d , e , f ... linii odwiniętej koła lub rozwijającej koło. Tak samo otrzymamy punkta rozwijającej *gnop*.

Jeżeli przyjęto bardzo małe części łuków, to można nakreślić rozwijającą za pomocą łuków w następujący sposób: Z punktu np. 6 zakreślamy promieniem $6, 7$ łuk $7a$, z 5 promieniem $5a$ łuk ab , z 4 promieniem $4b$ łuk bc , z 3 promieniem $3c$ łuk cd i t. d.; ten sposób kreślenia daje zbliżoną rozwijającą.

1sza uwaga. Jeżeli z punktów g , h , k , l , m , n etc. wyprowadzimy prostopadłe, przeciwnie kierunkowi ruchu stycznych, uczynimy je równymi i wielokątnymi częściami promienia koła, to krzywa, poprowadzona przez ich końce, jest *przedłużoną rozwijającą koło* (verlängerte Kreisevolvente).

2ga uwaga. Prowadząc równe prostopadłe, z których każda jest wielokrotną częścią promienia koła, na końcach stycznych do koła w kierunku ruchu stycznych lub zwróconych od koła, to ich końcowe leżą na *skróconej rozwijającej koła* (verkürzte Kreisevolvente).

Linije ślimakowate.

(Schneckenlinien.)

§. 358.

Określenie. W poprzedniem uważano koło jako rozwiniętą krzywą (rozwijającą), a otrzymaną linię spiralną (kołowo zwiniętą linię) jako odwiniętą linię. Jeżeli weźmiemy tak otrzymaną linię spiralną za linię rozwiniętą nową krzywą, t. j. jeżeli weźmiemy rozwijającą za rozwiniętą drugą rozwijającą, to otrzymamy ślimakowate (ślimakowo zwinięte) jako drugie rozwijające.

§. 359.

Fig. 228 i 229. *Kreślenie ich wymaga co następuje:*

Dany jest zaród ślimakowatej. Fig. do 228.

Koło, w którym zwykle każdą ślimakowatą kończymy, zwiemy jej *zarodem* (das Auge); odpowiednio do warunku, jeżeli zaród jest dany, nakreślić odpowiednią ślimakowatą.

W zaród wpisujemy kwadrat, przez punkt środkowy kreślimy do jego boków równoległe ac i bd , które dzielimy na trzy równe części 1, 5, 9... 2, 6, 10... 3, 7, 11... 4, 8, 12 i naznaczamy je liczbami, jak to fig. wskazuje. Łączymy 1 z 2, 2 z 3, 3 z 4 i t. d., 9 z 10, 10 z 11, 11 z 12, i przedłużamy te łączące linie, a wszystkie z wyjątkiem 4, 5 i 8, 9 są równoległe do przekątnej kwadratu. Otrzymane dwanaście punktów są środkami dla ćwiartek łuków, z których tym sposobem kreślenia otrzymany ślimakowatą.

Rozpocznijmy od jednego z czterech wewnętrznych punktów 9, 10, 11 lub 12 w kwadracie. Punkt np. w 9, jako koniec przekątnej, równoległej do 9, 10, jest początkiem dla ślimakowatej. Naznaczoną odległością zataczamy łuk, przecinający przedłużoną 8, 9 w r , Fig. 228; łuk zatoczony z 8 promieniem $8r$, przecnie przedłużoną 7, 8 w b , z 7 promieniem $7b$ przecniemy przedłużoną 6, 7 w n i t. d., aż wreszcie z 1 promieniem $1g$ zatoczony łuk przecnie $1f \parallel Oe$ w f . Kreślenie to da nam ślimakowatą, którą *Vignola* zastosował do kapiteli jonickich słupów.

Miejmy jeszcze na uwadze, że, gdy rozpoczniemy w punkcie 12, ślimakowata ma o jeden zwój więcej, a Oe dokładnie dziewięć razy dłuższą jest aniżeli promień zarodu.

§. 360.

Fig. 229. Kreślenie ślimakowatej wpisanęj w prostokąt $ABCD$.

Obieramy prostokąt $ABCD$, którego boki są najlepiej w stosunku 8 : 9, prowadzimy przekątnię BD , do niej prostopadłą EC ; cztery tak utworzone kąty proste połowimy linijami FG i Hk .

W H prostopadła do AB przecina EC w 1; poprowadzona $1n$ przecina BD w 2; $2k$ przecina CE w 3; $3,1$ przecina BD w 4. Dalej prowadzimy przez 4 równoległą do $1H$, która przecnie Hk w q' , a EC w 5; przez 5 równoległą do $1n$, ta przecnie FG w p i BD w 6; tak samo otrzymamy 6*q*, 7*r*, 8*s*, 9*t*, 10*v*, a postępując tak dalej otrzymamy szereg punktów (16 lub 17) w zarodzie ślimakowatej. Obacz fig. do 229.

W ten sposób otrzymamy punkta 1, 2, 3, 4, 5... jako środki i $m, n, k, l, q', p, q, \dots$ na długości promieni ślimakowatej złożonej z ćwiartek kół.

Jeżeli to kreślenie jest dokładne, to muszą zachodzić następujące warunki: $1n = 1m$ i są prostopadłe do siebie, dalej muszą się $1n, FG$ i BC w punkcie n przecinać; $2k = 2n$ są do siebie prostopadłe, $2k, Hk$ i CD przecinają się w punkcie k ; $3l = 3k'$ i $\perp 3k$, w punkcie l spotykają się znowu trzy linie; tak samo $4q' = 4l$ i $\perp 4l$ i t. d.

Mając środki 1, 2, 3, 4... i długość promieni $1m, 2n, 3k, 4l, 5q' \dots$ dla ćwiartek kół, to dosyć zatoczyć łuki, mianowicie: z 1 łuk mn , z 2 łuk nk , z 3 łuk kl , z 4 łuk lq' i t. d., dopóki nie dopełnimy w punkcie 16 lub 17 ćwiartki koła do półkola, które będzie zarodem ślimakowatej, a tak zakończymy jej kreślenie.

Tę ślimakowatą zwiemy ze względów analitycznych *logarytmiczną linią spiralną*.

§. 361.

Jeżeli nakreślimy Fig. 230 prostą mn i zatoczymy z jakiegokolwiek jej punktu O promieniem 1, O

z jednej strony półkole, potem z drugiej strony dwoma $O1$ z 1 półkole i znowu z pierwszej strony z O promieniem $O2$ półkole i t. d., to otrzymamy spiralną złożoną z półokręgów.

Kreślenie różnych krzywych i połączenia zębatki z latarką.

§. 362.

Kreślenie Fig. 231.

$ac \perp MN$, z c w dowolnych odległościach poprowadźmy promienie ck , ch , ..., cd , ce , a po obu stronach ich przecięć I , II , ... O ... VI , ... VII z MN odetnijmy równe kawałki $Ik = Il = Iih = IIm$... $VIIe = VIIt = Oa = Op$, połączmy od ręki punkta k , h , g , ... a , ... d , e i l , m , ... p , ... s , t , otrzymamy *konchoidę* czyli linię muszlową *Nikomedesa*.

Uwaga. Jako południk sprzężony użyty do słupów, nadaje im kształt piękny wypukły.

§. 363.

Określenie krzywej, zwanęj *cissoïdą*.

Niech będzie dane koło o średnicy OA , z jej końca A wyprowadźmy styczną T .

Poprowadźmy przez O dowolną ilość siecznych, przecinających styczną w pojedynczych punktach; taka sieczna przecina na przykład koło w punkcie N a styczną w punkcie P . Jeżeli odmierzymy odległość NP , t. j. ten kawałek siecznej, który od punktu przecięcia się z kołem aż do punktu P ze styczną T i przeniesiemy go z punktu O na sieczną drugim końcem ku punktowi P tak, abyśmy otrzymali od OP kawałek $OM = NP$, to punkt M jest punktem *cissoïdy*.

§. 364.

Określenie linii, zwanęj krzywą *Cassini*'ego.

Krzywą *Cassiniego* zowiemy tę linię, w której iloczyn z odległości każdego punktu od dwóch punktów danych jest zawsze stały.

Kreślenie. Niech będzie AB osią krzywej *Cassiniego*, O jej środkiem, punkta F i G niech będą dane na AB w równych odległościach od O , tak iż F pomiędzy A i O a punkt G pomiędzy B i O stale są położone; jeżeli więc c jest punktem tej krzywej, to musi $Fc \cdot Gc = a^2$; $AO = BO = a$.

Uwaga. Podług kształtu zowiemy tę krzywą *Cassini*'ego *elipsą*, albo *Lemniskatą*, lub nareszcie *hyperbolą Cassini*'ego.

§. 365.

Wykreślenie Fig. 232

przedstawia połączenie zębatki (gezahnte Stange) z latarką (Drehling). Na zasadzie kreślenia cykloidy możemy nakreślić zębatkę wprawiającą w ruch jednostajny latarkę. Koło podziałowe $1'$, 5 , 8 , 12 ..., przechodzące przez środki $1'$, 5 , 8 ..., cewek (Triebstöcke), których płaszczyzna bieży równolegle z denkami latarki, niech ma promień dany R , jako też prosta NS , będąca styczną tego koła, jest dana. Aby nakreślić najpierw przecięcie latarki, dzielimy jej koło podziałowe na tyle równych części, ile latarka ma cewek otrzymać, w tym przypadku np. na ośm równych części, następnie weźmy w cyrkiel ćwierć takiej części jako promień i zatoczmy z punktów $1'$, 5 , 8 , 12 , ... ośm koł, które oznaczają przecięcia takiej samej ilości cewek. Zatem przestrzeń zajęta przez cewkę równa się przestrzeni zawartej pomiędzy dwoma obok siebie znajdującymi się cewkami.

Ścisłe biorąc nie zachodzi ten przypadek, bo jeżeli poprowadzimy średnicę cewki jako styczną prostopadłą do promienia koła podziałowego, należącego do którejkolwiek cewki, to ta średnica będzie leżała za kołem podziałowym. Jak tylko ten przypadek zachodzi, to linija, która łączy oba

punkta, gdzie koło podziałowe przecina obwód cewki, jest cięciwą koła cewki, zatem jest mniejszą od jej średnicy.

Ponieważ jednak odpowiednio do wykreślenia średnica cewki była równa odległości między cewkami, to rzeczywiście nie średnica, lecz cięciwa leży na kole podziałowym, szerokość między cewkami będzie większą aniżeli szerokość cewek. Ta różnica daje potrzebne wolne miejsce części chwytających się. Aby miejsca między zębami na zębatec miały tę samą wielkość, jaka jest między cewkami latarki, przenosimy z $1'$ na rozwiniętą, t. j. wyprostowaną część koła podziałowego latarki, np. $1'2'$ na NS przedstawiającą podziałkę cewki tyle razy, ile razy potrzeba, a wtedy punkta $1', 5', 9', 13', \dots$ będą środkami ustępów, a punkta $3', 7', 11', 15', \dots$ środkami zębów. Przypuśćmy, iż po wykonaniu tego wykreślenia nie mamy jeszcze cewek tylko ich środki oznaczone, a mamy oznaczyć krzywiznę zębów według cykloidy, przechodzącej przez jakikolwiek punkt koła o promieniu R , zrodzonej ruchem koła po NS , to wykreślimy ząb następującym sposobem.

Wyobraźmy sobie środek takiej cewki na NS w $9'$ i toczmy koło podziałowe w kierunku S , to punkt $9'$ opisze cykloidę $9'\psi$. Wyobraźmy sobie środek drugiej cewki w $13'$, tak że $9', 13'$ równa się wyprostowanej podziałce między dwoma cewkami na kole podziałowym i toczmy koło podziałowe od $13'$ ku N , to punkt $13'$ opisze cykloidę $13'I$.

Gdyby cewka nie miała grubości, to ząb miałby kształt po lewej stronie UxW taki sam jak po prawej. Aby jednak dla średnicy cewki nakreślić kształt zęba, weźmy promień cewki w cyrkiel i zatoczmy kółka z dowolnych punktów l, s, r, m, n . p. cykloidy UxW w lewo; jeżeli teraz nakreślimy cykloidę równoległą do kółek, dotykającą je, to otrzymamy postać i granicę zęba. Następnie kopiuujemy według tego zęba resztę przystających zębów w miejscach $ef, gh, \psi k$. Tu także przyjmujemy jeszcze, że ten ząb w danym położeniu porusza się od lewej ku prawej. W praktyce ustępujemy od tego warunku o tyle, że szerokość zęba nieco mniejszą robimy od ustępu między zębami, aby uniknąć wielkiego tarcia, któreby było, nie zapobiegłszy mu. Ta różnica szerokości wynosi zwykle $\frac{1}{16}$. Widzieliśmy, że we wszystkich dotąd wskazanych szczegółowych wykreśleniach nie uwzględnialiśmy różnicy szerokości, bo skoro ząb miał właściwy mu kształt, zmniejszało mu się ją o tyle, o ile potrzeba było usunąć tarcie. Podstawę zębów można utworzyć prostopadłami, poprowadzonymi z podziałki, gdzie ją cykloidy dotykają, na pierwotną linię zębów; aby jednak nie osłabić cewki i aby większych ustępów między zębami uniknąć, wystarcza $\frac{1}{32}$ częścią koła podziałowego zakreslić półkoła, dotykające u dołu każde dwie cykloidy; przytém uważać należy na wolne miejsce między cewkami, dlatego środki tych półkoli pod NS w $1', 5', 9' \dots$ przyjmujemy. Pomiedzy prostopadłami ab i nm niech przecięcie poprzeczne cewki dotknie kształtu zęba w punkcie $2'$ i zostawmy z prawej strony ustęp podany wyżej przy $2'$ pomiędzy przekrojem cewki a zębem, którego wierzchołek jest C . Połączmy $1'$ z 5 prostą $1'5$, to 4 jest punktem zahaczenia zęba cewki leżącej po prawej stronie, gdzie jest punkt styczny. Wierzchy tych zębów ścinają się zwykle, prowadząc przez punkta 5 i 28 poziomą $\delta, 28$. Co się tyczy mechanizmu, wypada jeszcze wspomnieć, że ząb na prawo, którego środkiem jest cd , peha cewkę, której środek jest 5 , i nie powinien jej pierwój opuszczać, aż następny ząb na lewo, którego środkiem jest ab , rozpocznie działać.



SPIS RZECZY.

	Strona
Wstęp	1
Niektóre narzędzia i materiały rysunkowe	2
Różne farby wodne	4
Cennik rozmaitych farb wodnych	5
Mieszanie farb i nakładanie geometrycznych figur	5
Naciąganie papieru na rysownice. Lineał, trójkąt i podziałki	7
Opis rajscajgu i jego części składowych	8

Konstrukcje cyrklowe i linearne oparte na zasadach matematycznych.

Określenia i wyjaśnienia	10
Punkt	10
Cwiczenia w kresleniu prostych	10
Przedłużenie prostej	11
Cztery główne działania linijami prostemi	12
Dodawanie	12
Odejmowanie	12
Mnożenie	12
Niewłaściwe mnożenie	13
Dzielenie	13
Niewłaściwe dzielenie	14
Różne zagadnienia	14
Kreślenie linii prostopadłych	14
Proste równoległe użyte jako konstrukcja pomocnicza przy dzieleniu linii prostych	16
O dzieleniu prostych za pomocą linii pomocniczych	17
Oznaczenie wspólnej miary dwóch prostych	19
Oznaczenie stosunku dwóch prostych	20
Proporcjonalność prostych	20
Kreślenie kątów	21
Dzielenie kątów	22
Kreślenie przenośnika (Transporteur)	25
Cztery pojedyncze działania kątami	26
Dodawanie	26
Odejmowanie	26
Mnożenie	27
Dzielenie	27

	Strona
Linije równoległe	27
Wynależenie kątów przy liniach zbiegających się, których punkt przecięcia na płaszczyźnie rysunkowej nie jest dany	30
Kąt proporcjonalny	32
Przystawanie trójkątów i wypływające ztąd konstrukcye trójkątów z danych części	33
Kreślenie trójkątów	35
O czwartej, trzeciej, średniej proporcjonalnej linii, o harmonijném dzieleniu i złotém cięciu	38
O złotém cięciu (Sectio aurea, S. divina)	40
Różne zagadnienia	41
I. Zagadnienia odnoszące się do trójkątów równobocznych	41
II. Zadania odnośne do trójkątów równoramiennych	41
III. Zagadnienia odnoszące się do trójkątów różnobocznych	42
IV. Zadania odnoszące się do trójkątów prostokątnych	42
V. Trójkąty o oznaczonej wysokości	43
Czworobok	43
Przystawanie równoległoboków	44
Trapezy	45
Trapezoidy	45
Kreślenie rozmaitych czworoboków	45
Wstęp do kreślenia trapezoidów	49
Kreślenie wielokątów foremnych	50
Ogólna metoda kreślenia wielokątów foremnych	53
Przystawanie wielokątów i wynikające ztąd sposoby kreślenia wielokątów przystających .	53
Opisanie wykreślenia	56
Praktyczne zastosowanie	57
Równość figur	57
Obliczenie miary powierzchni płaszczyzn	58
Zamienianie figur	59
Podział figur	64
Zastosowanie	66
O nowej i starej miarze długości	68
Określenia, wyjaśnienia i tablice przemian	68
Tablice do przemiany	69
O miarze rysunkowej	70
Kreślenie podziałek	71
Przykłady zdejmowania miary.	73
Ćwiczenia w odmierzaniu miar i w oznaczaniu miary powierzchni rozmaitych wielokątów	73
Podziałka stosunkowa	76
Różne zagadnienia dla początkujących konstruktorów	77
Konstrukcya podobnych figur	79
Podobieństwo trójkątów	79
Kreślenie trójkątów podobnych	82
O podobieństwie wielokątów i wynikających ztąd sposobach kreślenia wielokątów podobnych	83
Koło	86
Najważniejsze twierdzenia dotyczące kreślenia stycznych do koła	89
Rozwinięcie czyli prostowanie okręgu	91
Powierzchnia koła i jego części	92
Zasadnicze zagadnienia odnoszące się do styczności kół i do wpisywania lub opisywania kół stycznych.	93

Praktyczne ćwiczenia konstrukcyjne i nauka o krzywych.

Konstrukcya łuków na skróty przy wierzchniej budowie dróg żelaznych	100
Obliczanie skrętów	100

	Strona
Kolej szynowa w Baltimore w Ameryce.	101
Przekrój kamiennego jazu	102
Łuki wznoszące się	102
Praktyczne zastosowanie	102
Różne zetknięcia kół.	103
Kreślenie różnych łuków w oknach i drzwiach	110
Profile gzymsów gotyckich	116
Zagadnienia i rozwiązania	116
Nauka o krzywych	117

Elipsa.

Sposoby kreślenia elipsy	118
Fig. 200. Inny sposób kreślenia elipsy, gdy jej osie są dane	119
Fig. 203. Inne dokładniejsze postępowanie w kreśleniu elipsy z pomocą łuków	119
Fig. 204. Kreślenie elipsy za pomocą sumy półosi	120
Fig. 205. Kreślenie elipsy za pomocą różnicy półosi	120
Fig. 206. Kreślenie elipsy, mając dane jej dwie sprzężone średnice FG i HK	121
Fig. 207. Kreślenie normalnych i stycznych do elipsy	121
Fig. 208. Wpisać elipsę w równoległobok BCDF	122
Fig. 209. Wynaleźć prostokątne osi <i>ab</i> i <i>od</i> elipsy, którą w równoległobok ACDG wpisać mamy	122
Fig. 210. Mając daną elipsę, znaleźć osie	123
O powierzchni elipsy	124
Fig. 220. Porównanie powierzchni elipsy z powierzchnią koła, którego średnica równa się sumie obu półosi	125

Parabola.

Kreślenie paraboli	125
Fig. 213. Inne sposoby kreślenia, mając dany parametr	125
Fig. 214. Kreślenie paraboli, gdy odcinek SD i przystawa BD punktu B paraboli są znane	126
Fig. 216. Kreślenie paraboli, mając dane kierownicę, oś i parametr paraboli	127
Fig. 213. Kreślenie stycznych	127

Hyperbola.

Objaśnienie i graficzne przedstawienie	128
Hyperbola uważana jako przekrój ostrokągu	129
Fig. 219. Kreślenie hyperboli, jeżeli tylko jej osie są dane	129

Cykloidy i cykloidowe krzywe.

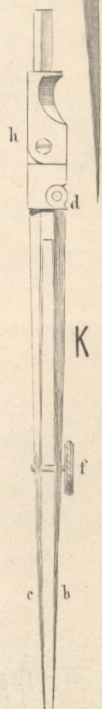
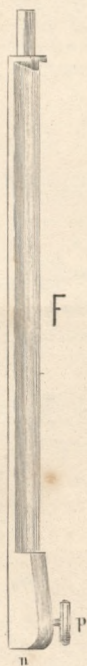
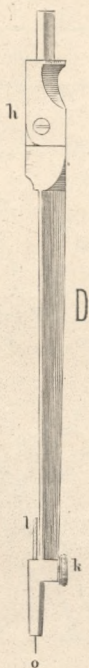
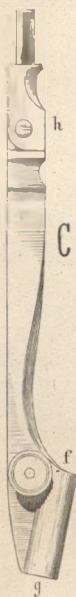
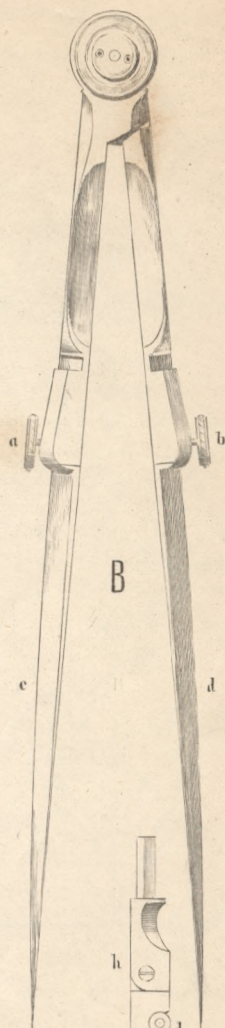
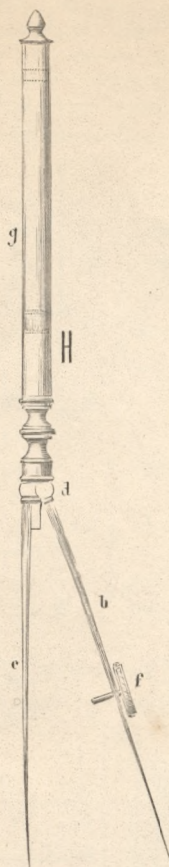
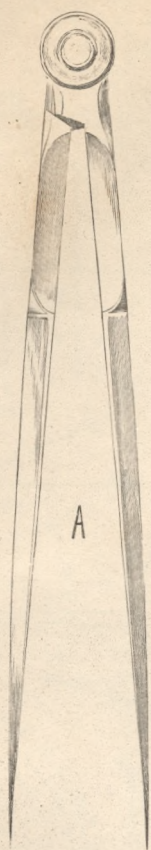
Fig. 221. Kreślenie cykloidy	130
Fig. 222. Drugi sposób kreślenia	131
Fig. 223. Kreślenie przedłużonej cykloidy	131
Fig. 224. Kreślenie epicykloidy	131
Fig. 225. Kreślenie hypocykloidy	132
Fig. 226. Kreślenie przedłużonej hypocykloidy	132

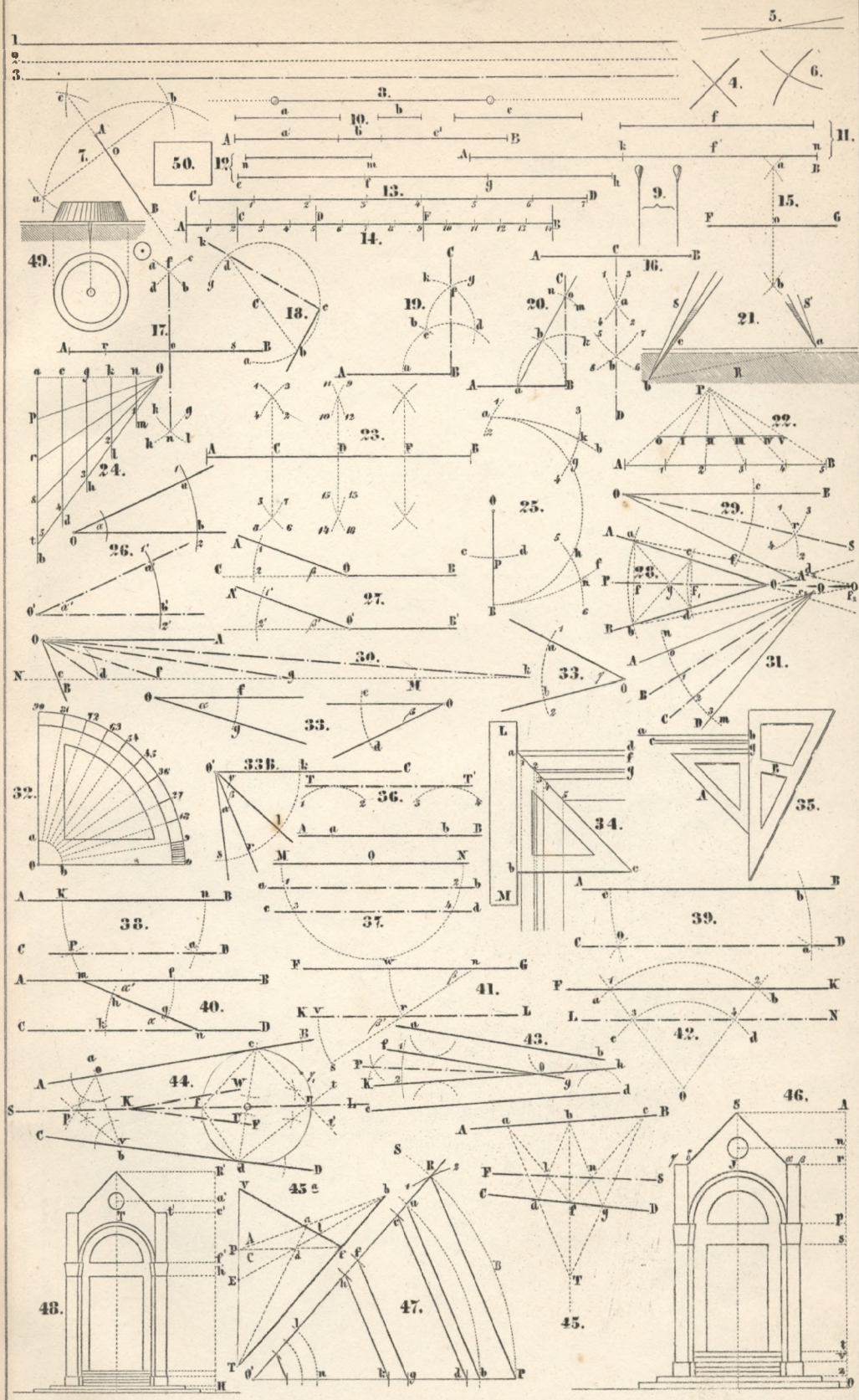
Rozwijające koło.

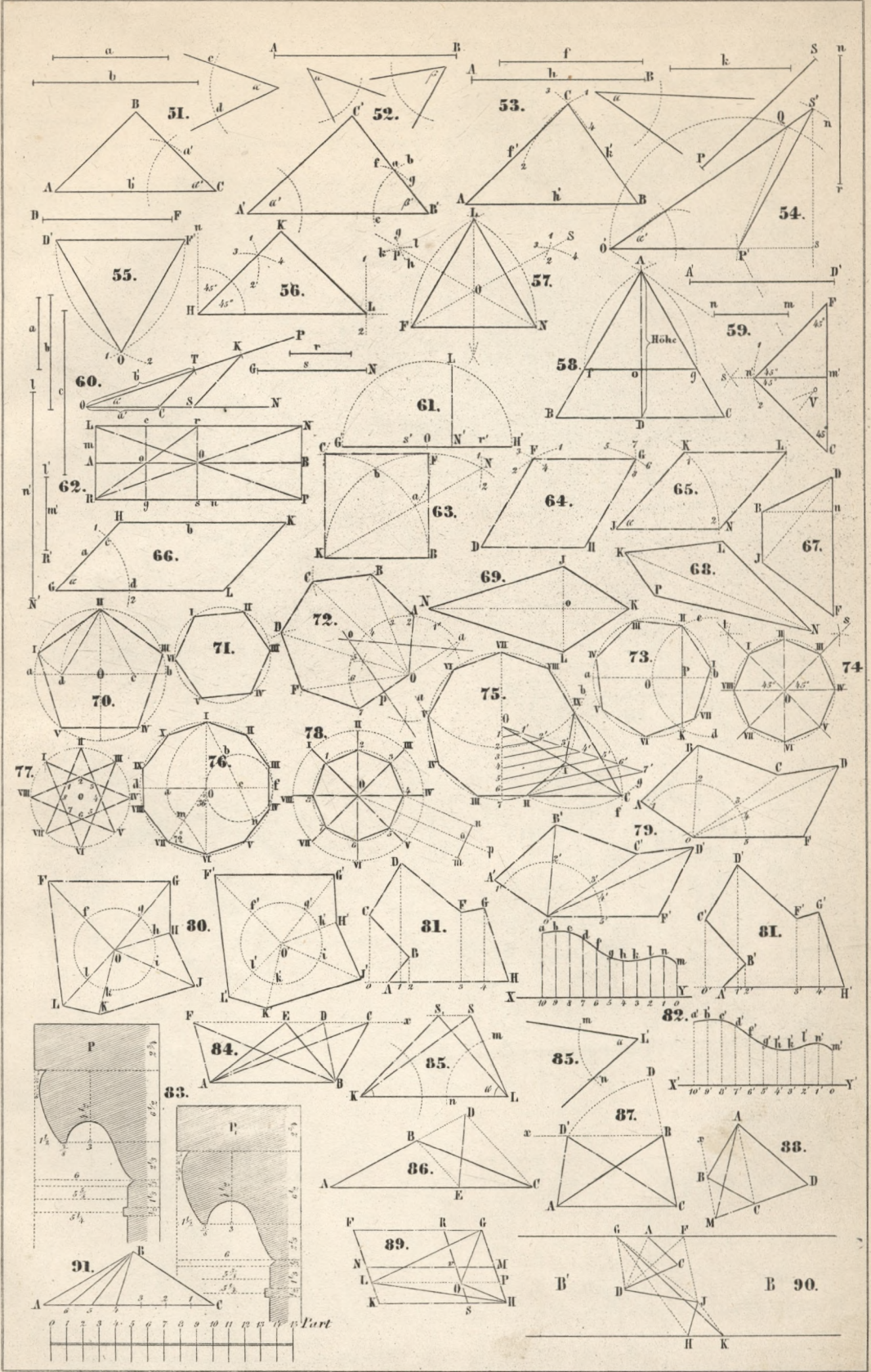
Fig. 227. Kreślenie rozwijającej koło	133
---	-----

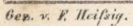
Linije ślimakowate.

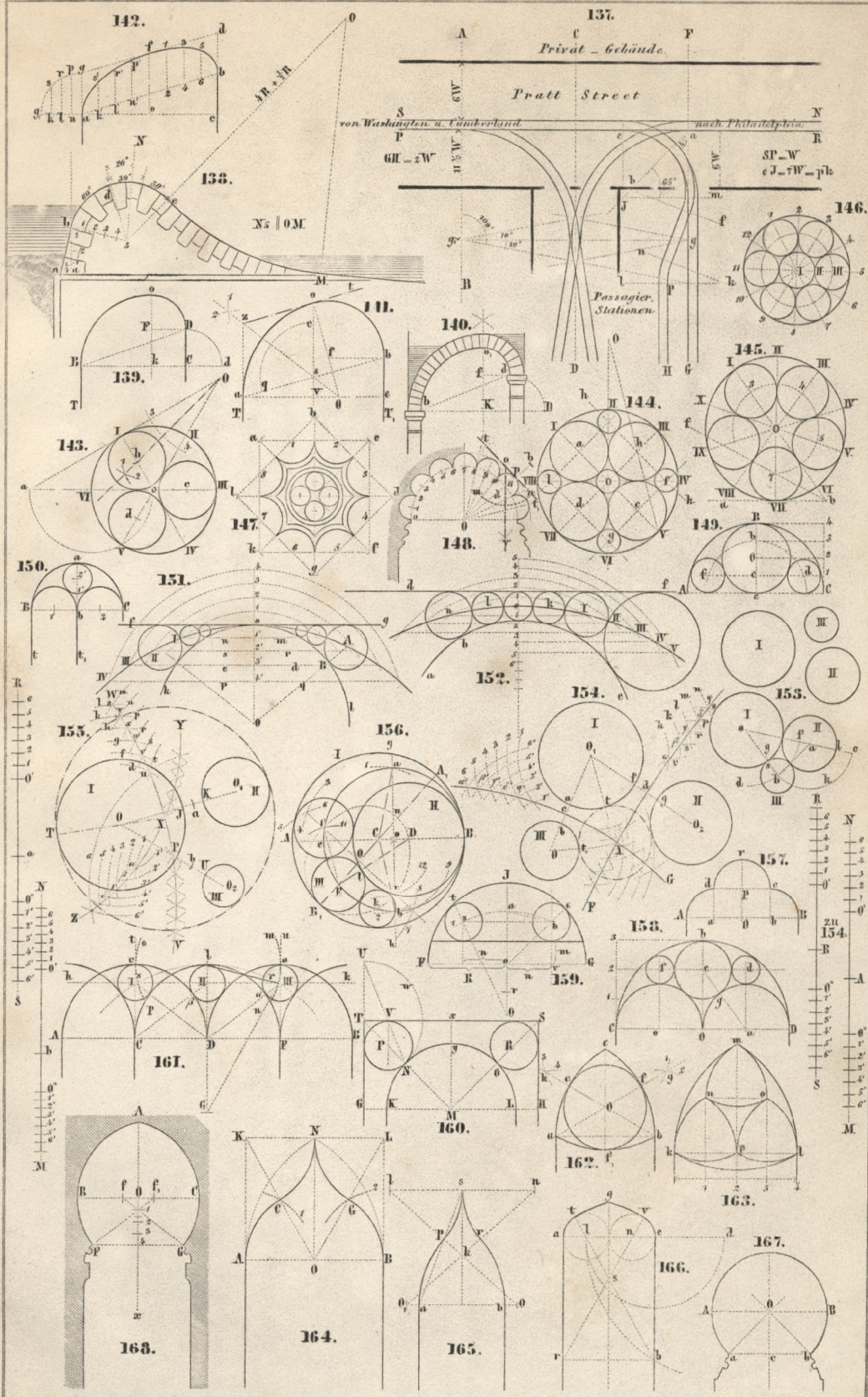
Fig. 228 i 229. Kreślenie ich wymaga co następuje	133
Fig. 229. Kreślenie ślimakowatej wpisanej w prostokąt ABCD	134
Jeżeli nakreślimy Fig. 230 prostą mn i zatoczmy z jakiegokolwiek jej punktu O promieniem 1, O	134
Kreślenie różnych krzywych i połączenia zębataki z latarką	135
Kreślenie Fig. 231	135
Wykreślenie Fig. 232.	135

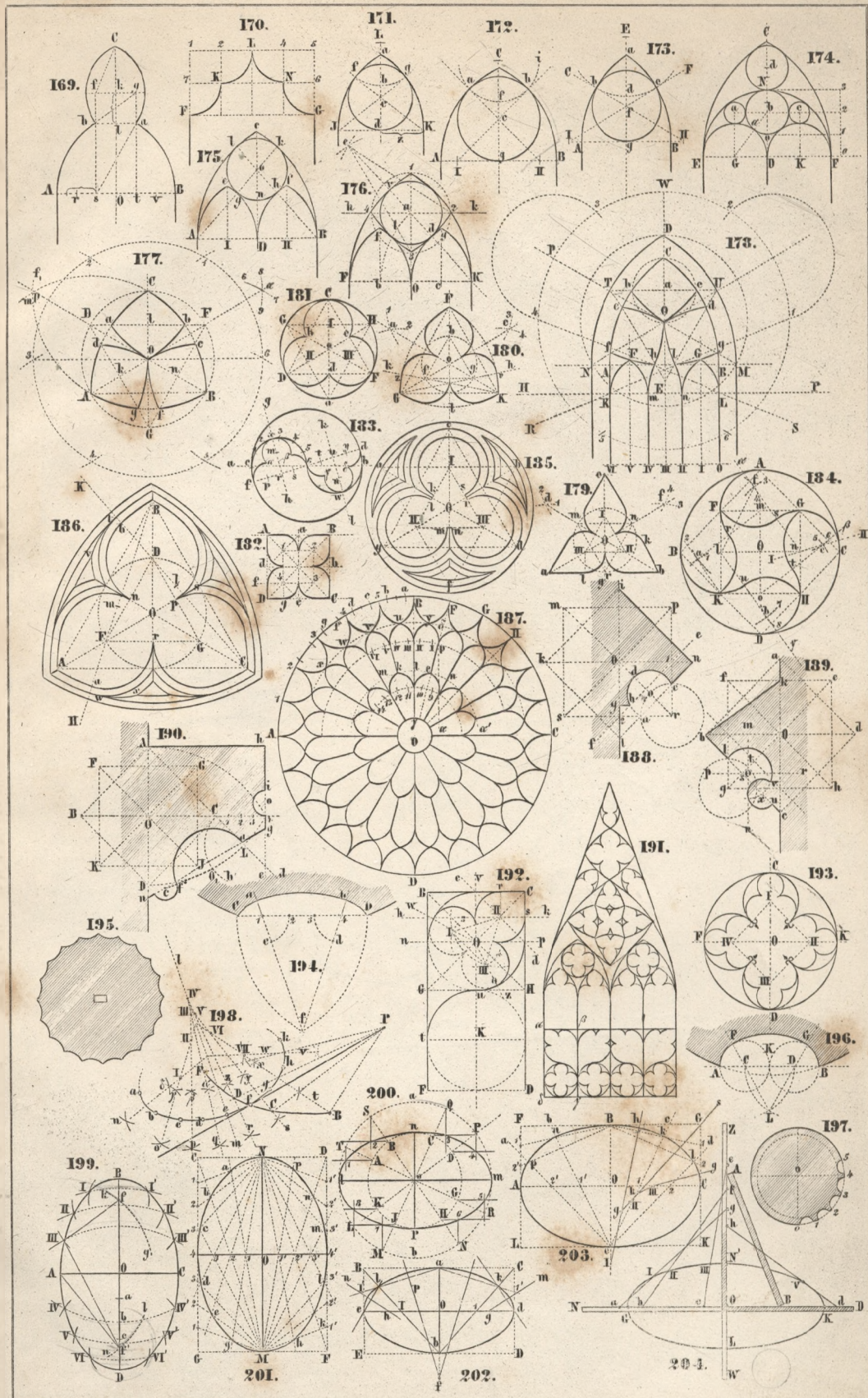


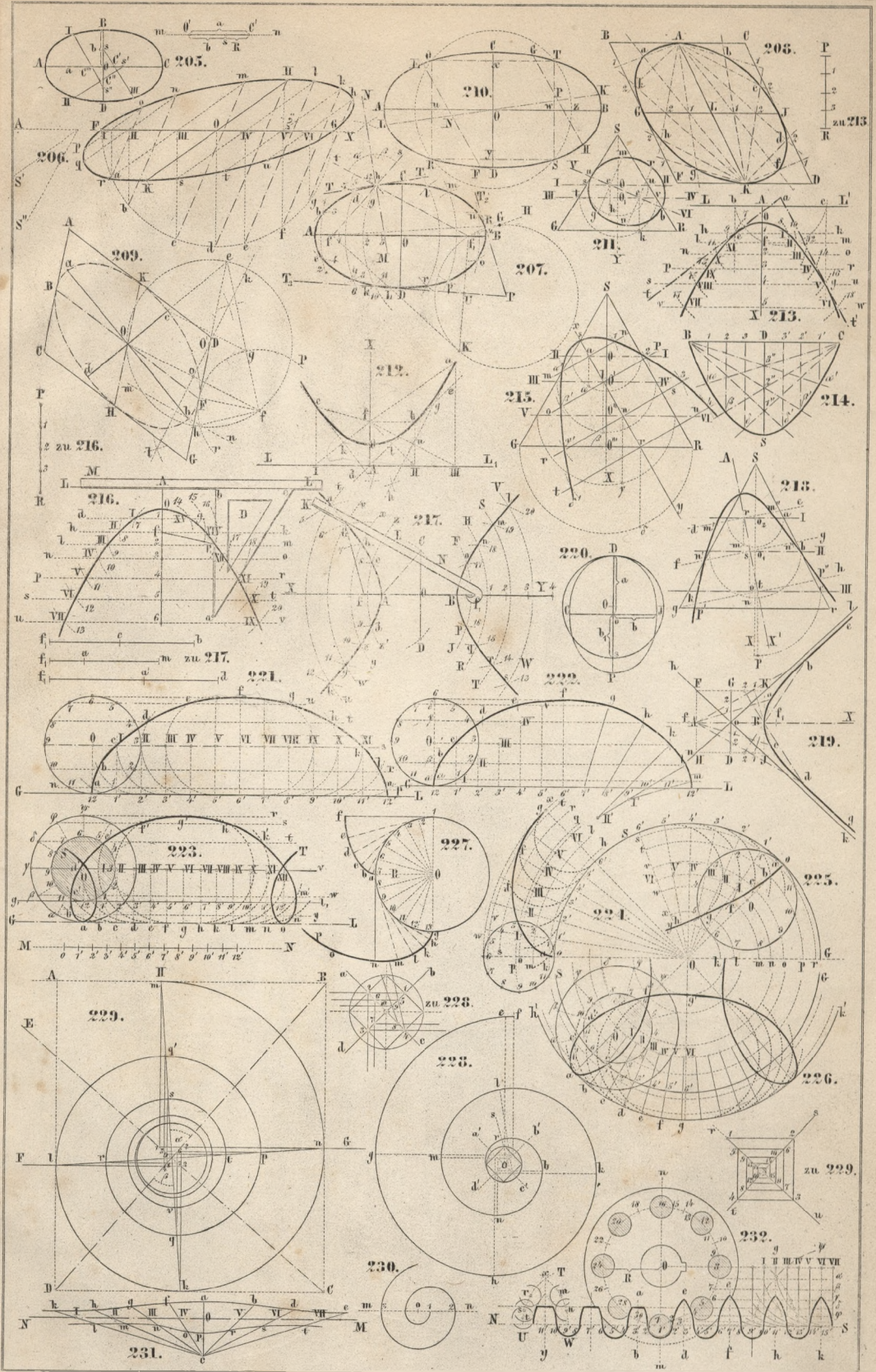












KSIEGARNIA
ANTYKWARIAT



