

ARYTMETYKA

dla

ABITURYENTÓW GIMNAZYALNYCH.

Napisał

Mieczysław Jamrógiewicz

prof. przy c. k. IV. gimn. we Lwowie.



LWÓW.

NAKŁADEM Drukarni W. Manieckiego.

1894.



2543482

ARYTMETYKA

dla

Abituryentów gimnazyalnych.

Napisał

Mieczysław Jamrógiewicz.

prof. przy c. k. IV. gimn. we Lwowie.



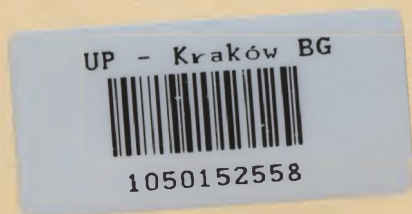
LWOW,

NAKŁADEM Drukarni W. Manieckiego.

1894.



M42113/1



BG. UP
2012 D. 141-3

11

I. O liczbach w ogólności.

§. 1. Liczba jestto wyraz oznaczający ilość jednostek, zawartych w danej ilości. Tworzy się liczby przez liczenie, t. j. przez przybieranie po jednej takiej ilości, jaką się za miarę obrało:

$$1 + 1 + 1 + \dots \dots a \text{ razy} = a \cdot 1 = a \quad 1)$$

Ponieważ przy wielkiej ilości potrzebaby bardzo wiele wyrazów, przeto by tego uniknąć, używa się jednostek rozmaitych, ale zostających w pewnym, z góry oznaczonym stosunku do jednostki zasadniczej (pierwotnej). Od tego stosunku zawisł układ, w którym się liczbę podaje. Jeżeli g jednostek pewnego rzędu tworzą jednostkę rzędu wyższego, natenczas liczba jest wyrażona w układzie gtowym. W takim układzie jest:

jednostka zasadnicza	$1 = g^0$
„ pierwszego rzędu	$1^I = g \cdot g^0 = g^1$
„ drugiego	„ $1^{II} = g \cdot g^1 = g^2$ i t. d.

Podając liczbę w jakimkolwiek układzie należy podać:
1) jakimi jednostkami mierzono — 2) ile razy każda z tych jednostek w danej ilości się mieści. Więc

$$L = a \cdot g^n + b \cdot g^{n-1} + \dots \dots + mg^1 + ng + p$$

gdzie $a, b, \dots$ są cyfry, a każda z nich może przybierać wszystkie całkowite wartości od 0 do $g-1$.

Jeżeli $g = 10$, otrzyma się układ dziesiętny. Więc

$$L = a \cdot 10^n + b \cdot 10^{n-1} + c \cdot 10^{n-2} + \dots \dots + m \cdot 10^2 + n \cdot 10 + p \cdot 10^0 \quad 2)$$

Ponieważ od 10^n do 10^n jest $n + 1$ jednostek, przeto wynika z tego:

1. Ilość miejsc jest o 1 większa od najwyższego wykładnika jednostki. [Liczba L w 2) ma $n + 1$ miejsc].

2. Gdy $a = 1$ $b = c = \dots = 0$, $L = 10^n$.

3. W każdym innym razie jest

$$10^n < L < 10^{n+1} \quad 3)$$

z tego wynika: $\log 10^n < \log L < \log 10^{n+1}$

$$\text{czyli: } n < \log L < n + 1$$

przeto $\log L = n + \text{ułamek właściwy}$ 4)

Cecha logarytmu briggowskiego liczby całkowitej jest o 1 mniejsza od ilości miejsc.

§. 2. Odliczając od danej liczby po jednostce, otrzyma się w końcu zero. Lecz można odliczać dalej, a wtedy otrzyma się:

$$0 - 1 - 1 - 1 - \dots \text{ a razy} = 0 - a = -a = a - 1 = -1.a \quad 1)$$

Liczbę $(-a)$ mniejszą od zera nazywamy liczbą ujemną, a liczbę większą od zera liczbą dodatnią:

$$0 + 1 + 1 + 1 + \dots \text{ a razy} = 0 + a = +a = a. + 1$$

Obydwie zaś razem nazywają się liczbami algebraicznymi. Liczbę, przy której nie zważa się na to, czy ona większa lub mniejsza od zera, nazywa się liczbą bezwzględną.

§. 3. Obrawszy jednostkę zasadniczą, obiera się w razie potrzeby pewną, z góry oznaczoną ($\frac{1}{b}$) część tejże za nową jednostkę.

Liczba ($\frac{a}{b}$) oznaczająca ilość takich ułamkowych jednostek nazywa się ułamkiem. Przeto:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \dots \text{ a razy} = a \cdot \frac{1}{b} \quad 1)$$

Gdy $b = 10^n$, ułamek nazywa się dziesiętnym, a ogólny wzór takowego jest $\frac{a}{10^n}$, gdzie n oznacza ilość miejsc dziesiętnych.

Ponieważ $a : b = [\S. 1. 1)] (a \cdot 1) : b = a \cdot (1 : b) = a \cdot \frac{1}{b}$

przeto według 1) w §. 3

$$a : b = \frac{a}{b} \quad 2)$$

§. 4. Jeżeli, wychodząc z pewnego punktu, przedstawimy 1 odcinkiem na linii prostej, przypuścimy w kierunku od lewej ku prawej, tedy obróciwszy tę jednostkę o 180° , otrzymamy tę samą jednostkę co do bezwzględnej długości, ale przeciwną co do położenia. Jeżeli więc pierwsza przedstawiać będzie $+1$, będzie druga -1 . Przeto $-1 = +1$ z obrotem o 180° . — Gdyby się zaś $+1$ obróciło o 90° i połączyło koniec tego odcinka prostymi z końcami odcinków $+1$ i -1 , powstałby trójkąt prostokątny, w którym 1 z obrotem $90^\circ = 1_{90^\circ}$ byłby średnią geometryczną proporcjonalną między $+1$ a -1 . Przeto

$1_{90^\circ}^2 = +1 \cdot -1 = -1$ a więc $1_{90^\circ} = \sqrt{-1} = i =$ jednostce urojonej.

Liczba, oznaczająca ilość jednostek urojonych, nazywa się liczbą urojoną, więc

$$i + i + i + \dots \text{ a razy} = ai = a \cdot i = a \cdot 1_{90^\circ} = a_{90^\circ} \quad 1)$$

Liczbą urojoną jest każdy pierwiastek parzysty z liczby ujemnej, albowiem na kierunku pierwszorzędnym nie ma takiej liczby, któraby podniesiona do parzystej potęgi dała liczbę ujemną. Każdą taką liczbę można przedstawić w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \sqrt[2n]{-a} &= \sqrt[2n]{a} \cdot \sqrt[2n]{-1} = \sqrt[2n]{a} \cdot \sqrt[2n]{-1} = b \cdot \sqrt[n]{\sqrt[n]{-1}} \\ &= b \cdot \sqrt[n]{-1} = bi \end{aligned} \quad 2)$$

§. 5. Liczby niewymierne nie są liczbami w ścisłym znaczeniu słowa (§. 1), albowiem nie ma takiej jednostki, ani całkowitej ani ułamkowej, któraby to wyrażenie liczbowe dokładnie wymierzyć można. Jeżeli bowiem w $\sqrt[n]{a}$ liczba a nie jest równa x^n , tedy będzie

$b^n < a < (b+1)^n$ czyli $b < \sqrt[n]{a} < (b+1)$
zatem $\sqrt[n]{a} = b +$ liczbie mniejszej od jedności, a więc liczbą całkowitą być nie może.

Przypuśćmy tedy, że $\sqrt[n]{a} = \frac{m}{p}$, gdzie m przez p z powodu dopiero co podanego nie może być podzielne, natenczas

$$a = \frac{m^n}{p^n} = \frac{m}{p} \cdot \frac{m}{p} \cdot \frac{m}{p} \dots n \text{ razy} = \text{ułamkowi.}$$

Z przypuszczenia powyższego doszłoby się do niedorzeczności, iż liczba całkowita (a) równa jest ułamkowi, przeto przypuszczenie samo jest niedorzeczne. Jeżeli zatem a nie jest równe x^n , natenczas $\sqrt[n]{a}$ nie może być ani liczbą całkowitą ani ułamkiem.

II. O działaniach na liczbach.

§. 6. Dodawać znaczy: do jednego dodajnika doliczyć tyle i takich jednostek, ile ich i jakie zawiera drugi dodajnik. Na podstawie tego twierdzenia udowadnia się wszystkie twierdzenia o dodawaniu. N. p.

$$a \sqrt{-1} + (-b \sqrt{-1}) = a \sqrt{-1} - b \sqrt{-1}$$

Albowiem według powyższego określenia i §. 1.

$$a \sqrt{-1} + (-b \sqrt{-1}) = a \sqrt{-1} - \sqrt{-1} - \sqrt{-1} - \dots - \sqrt{-1} \dots b \text{ razy} = [\S. 4. 1)] a \sqrt{-1} - b \sqrt{-1}$$

§. 7. Odejmowanie.

$$\text{Niech } a - b = r$$

$$\text{ponieważ } b = b$$

$$\text{przeto } a - b + b = r + b$$

$$\text{czyli } a = r + b$$

zatem: Odejmować znaczy znaleźć taką liczbę (r), która by wraz z odjemnikiem (b) utworzyła odjemną (a). Na tej podstawie udowadnia się wszystkie twierdzenia o odejmowaniu. N. p.

$$a_i - (-b_i) = a_i + b_i$$

albowiem $a_i + b_i + (-b_i) = a_i + b_i - b_i = a_i = \text{odjemnej.}$

§. 8. Mnożyć znaczy, dodać mnożną do siebie tyle razy, ile mnożnik zawiera jednostek. Z tego wynika, że mnożnik może być tylko liczbą niemianowaną, a gdy pozornie jest inaczej, natenczas pewnie nie samo mnożenie jest wskazane. N. p.

$$1. \quad -a. -b = +ab$$

$$\text{Albowiem } -a. -b = [\S. 2. 1)] -a.b. -1$$

$$\text{Ale } -a.b = -a + (-a) + (-a) \dots b \text{ razy} =$$

$$= -a - a - a \dots b \text{ razy} = -ab$$

$$\text{przeto } -a. -b = (-ab). -1 = [\S. 2. 1)] -(-ab) = \\ = 0 - (-ab) = 0 + ab = +ab.$$

$$2. \quad ai.b = -ab$$

$$\text{Albowiem według §. 4. } ai.b = ai.b.i$$

$$\text{A ponieważ } ai.b = ai + ai + ai + \dots b \text{ razy} = bai$$

$$\text{przeto } ai.b = (bai).i = [\S. 4. 1)] (bai)_{90} = -ba = -ab$$

$$3. L. \quad \frac{a}{b} = [\S. 3. 2)] L.a : b = La : b = \frac{La}{b}$$

W ten sposób udowadnia się wszystkie prawidła o mnożeniu z wyjątkiem prawideł o mnożeniu potęg [§. 10] i pierwiastów [§. 11].

$$\begin{array}{ll} \S. 9. \text{Dzielenie.} & \text{Niech} \quad a : b = p \\ & \text{ponieważ} \quad \frac{b = b}{a : b \cdot b = b \cdot p} \\ & \text{więc} \quad a : b \cdot b = b \cdot p \\ & \text{czyli} \quad a = b \cdot p. \end{array}$$

To znaaczy: Iloraz ma być taki, aby pomnożony przez dzielnik dał dzielną. Na tej podstawie udowadnia się wszystkie prawidła dzielenia. N. p.

$$1. \quad -ai : -bi = + \frac{a}{b}$$

$$\text{albowiem } + \frac{a}{b} \cdot -bi = -ai$$

$$2. \quad a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$\text{Albowiem } a^{m-n} \cdot a^n = a^m$$

§. 10. Potęgować znaczy, pomnożyć zasadę (pierwiastek) tyle razy przez siebie, ile jedności zawiera wykładnik (logarytm).

Na tej podstawie udowadnia się wszystkie twierdzenia o potęgach, z wyjątkiem dzielenia potęg (§. 9. przykład 2.). N. p.

$$1. \quad a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

Albowiem $a^m = a \cdot a \cdot a \dots m \text{ razy}$

$b^m = b \cdot b \cdot b \dots m \text{ razy}$

przeto $a^m \cdot b^m = (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \dots m \text{ razy} = (ab)^m$

$$2. \quad \left[\sqrt[m]{a} \right]^s = \sqrt[m]{a^{ps}}$$

Albowiem $\left[\sqrt[m]{a} \right]^s = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} \dots s \text{ razy} =$
 $= \sqrt[m]{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots a}^{p + p + \dots s \text{ razy}}} = \sqrt[m]{a^{ps}}$

§. 11. Twierdzenie o pierwiastkach — z wyjątkiem jak się pierwiastek podnosi do potęgi [§. 10. 2.] — udowadnia się na podstawie pewnika, że liczba się nie zmienia, jeżeli się ją do pewnej potęgi podniesie i ten sam wyciągnie pierwiastek. Do jakiej zaś potęgi należy podnieść liczbę daną (po lewej stronie twierdzenia) i jaki z niej za razem wyciągnąć pierwiastek wskaże zawsze wykładnik pierwiastkowy twierdzenia (strona prawa). N. p.

$$1. \quad \sqrt[m]{a} = \sqrt[\frac{m}{b}]{a^{\frac{b}{m}}}$$

Albowiem $\sqrt[m]{a} = \sqrt[\frac{m}{b}]{\left(\sqrt[m]{a}\right)^{\frac{m}{b}}} = \sqrt[\frac{m}{b}]{\left(\sqrt[m]{a}\right)^m \cdot \frac{1}{b}} =$
 $= \sqrt[\frac{m}{b}]{\left[\left(\sqrt[m]{a}\right)^m\right]^{\frac{1}{b}}} = \sqrt[\frac{m}{b}]{\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{\frac{1}{b}}} = \sqrt[\frac{m}{b}]{a^{\frac{p}{b}}}$

$$2. \quad \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a : b}$$

$$\begin{aligned} \text{Albowiem } \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{a} &= \sqrt[m]{(\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b})^m} = \\ &= \sqrt[m]{(\sqrt[m]{a})^m : (\sqrt[m]{b})^m} = \sqrt[m]{a : b} \end{aligned}$$

§. 12. Logarytm jest to wykładnik (niewiadomy), do którego należy podnieść daną zasadę, aby otrzymać daną potęgę. Na tej zasadzie udowadnia się twierdzenia o logarytmach. N. p.

$$1. \quad \log_b a^m = m \log_b a$$

$$\text{Albowiem } a = b^x \quad \text{więc } x = \log_b a$$

$$\text{Ale } a^m = b^{m \cdot x} \quad \text{więc } m \cdot x = \log_b a^m$$

$$\text{przeto } m \cdot \log_b a = \log_b a^m$$

Zamieniwszy pierwiastek na potęgę otrzyma się logarytm pierwiastka.

$$2. \quad \log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

$$\text{albowiem } a = c^x \quad \text{więc } x = \log_c a$$

$$\frac{b = c^y}{\text{więc } y = \log_c b}$$

$$\text{przeto } \frac{a}{b} = c^{x-y} \quad \text{więc } x - y = \log_c \frac{a}{b}$$

a gdy się za x i y powyższe wartości tu wstawi, otrzyma się

$$\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$$

Jeżeli w ułamku $b = 10^m$, a $c = 10$ natenczas

$$\log \frac{a}{10^m} = \log a - \log 10^m = \log a - m \log 10 = \log a - m$$

z czego wynika znane prawidło, służące do oznaczenia cechy logarytmu ułamka dziesiętnego. [Cecha logarytmu liczby całkowitej §. 1. 4)].

§. 13. O niektórych wyrażeniach liczbowych.

I. $a^0 = 1$

Albowiem $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$ §. 9. 2.

Ale $a^m : a^m = 1$
przeto $a^0 = 1$

II. $\alpha)$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Albowiem $a^m : a^p = a^{m-p}$, a gdy $p = m + n$

$$a^m : a^p = a^{m-m-n} = a^{-n}$$

Ale [§. 3. 2)] $a^m : a^p = \frac{a^m}{a^p} = \frac{a^m}{a^{m+n}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^n} = \frac{1}{a^n}$

przeto $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$\beta)$ $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

Albowiem $1 = 1$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

przeto $\frac{1}{a^{-n}} = 1 : \frac{1}{a^n} = 1 \cdot a^n = a^n$

III. $a^{-n} \cdot a^{-p} = a^{-n-p}$

Albowiem $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

przeto $a^{-n} \cdot a^{-p} = \frac{1}{a^{n+p}} = [\text{§. 13. II. } \alpha)] a^{-n-p}$

W ten sam sposób wykaże się, że wszystkie działania na potęgach o wykładnikach ujemnych wykonuje się według prawideł dla potęg o wykładnikach dodatnich.

IV. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$$\text{Albowiem [\S. 11.]} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\cdot n}} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{n} \cdot n}} = \\ = \sqrt[n]{a^m}$$

V.

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{m+p}{n}}$$

$$\text{Albowiem [\S. 13. IV.]} \quad a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{n}}} \cdot \sqrt[n]{a^{\frac{p}{n}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{n}}} = \\ = \sqrt[n]{a^{\frac{m+p}{n}}}$$

W ten sam sposób wykaże się, że wszystkie działania na potęgach o wykładniku ułamkowym wykonują się według tych samych prawideł, jak działania na potęgach o wykładnikach całkowitych.

III. O podzielności liczb, o ułamkach i proporcjach.

§. 14. Wszystkie twierdzenia o podzielności udowadnia się w ten sposób, że się liczby, których podzielność wykazać potrzeba, dzieli przez siebie, a następnie wykazuje się na podstawie założenia, iż reszta równa się zeru, czyli — co na jedno wychodzi — że iloraz jest liczbą całkowitą. N. p.

1. Każde równanie jest podzielne przez swój czynnik pierwiastkowy.

Niech będzie p pierwiastkiem, więc $x - p$ czynnikiem pierwiastkowym równania:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{przeto także } ap^2 + bp + c = 0 \quad 1)$$

$$\text{Ale } (ax^2 + bx + c) : (x - p) = ax + ap + b$$

i reszta $ap^2 + bp + c = 0$ według 1), przeto jest $ax^2 + bx + c$ przez $x - p$ podzielne.

2. Wspólna miara (m) dzielnika (b) i reszty (r) jest zarazem miarą dzielnej (a).

Założenie: $a : b = p + \frac{r}{b}$ oraz $b : m = c$ i $r : m = d$

gdzie c i d są liczbami całkowitymi. — Ze założenia wynika:

$$a = b \cdot p + r \text{ przeto } \frac{a}{m} = \frac{b}{m} \cdot p + \frac{r}{m} = c \cdot p + d = \\ = \text{liczbie całkowitej.}$$

3. Aby wykazać, jakie są cechy podzielności liczb układu dziesiętnego przez 2, 5, 4, 8, 10, 25, 100 i 1000 należy tylko liczbę L [§. 1. 2)] przez one liczby podzielić.

Gdy chodzi o cechy podzielności przez 3, 9 i 11 przekształca się ów wzór [§. 1. 2)] dodając i odejmując od każdej potęgi z 10 liczbą 1. Więc

$$L = a(10^n - 1 + 1) + b(10^{n-1} - 1 + 1) + \dots + \\ + d(10^3 - 1 + 1) + f(10^2 - 1 + 1) + g(10 - 1 + 1) + h(2)$$

Gdy chodzi o podzielność przez 3 i 9 nadaje się temu następującą postać:

$$L = a(10^n - 1) + a + b(10^{n-1} - 1) + b + \dots + \\ + f(10^2 - 1) + f + g(10 - 1) + g + h \quad \text{albo} \\ L = a(10^n - 1) + b(10^{n-1} - 1) + \dots + f(10^2 - 1) + \\ + g(10 - 1) + a + b + \dots + f + g + h$$

i teraz obustronnie dzieli się przez 3 lub 9.

Jeżeli chodzi o cechę podzielności przez 11, tedy, gdy n jest liczbą parzystą, nadaje się równaniu 2) (§. 14) postać:

$$L = a(10^n - 1) + b(10^{n-1} + 1) + \dots + d(10^3 + 1) + \\ + f(10^2 - 1) + g(10 + 1) + a + \dots + f + g - (b + \\ + \dots + d + h).$$

§. 15. Wartość ułamka się nie zmienia, jeżeli się jego licznik i mianownik przez tę samą liczbę pomnoży albo podzieli.

Niech bowiem będzie $a : b = x$ 1)

$$\text{więc także [§. 3. 2)] } \frac{a}{b} = x$$

Z 1) §. 15 wynika $a = bx$

$$m = m$$

przeto	$am = bmx$	i	$a : m = (b : m) x$
ale	$bm = bm$	i	$b : m = b : m$
przeto	$\frac{am}{bm} = x$	i	$\frac{a}{b} \neq \frac{a : m}{b : m} = x$

Wstawivszy za x powyżej podaną wartość wyniknie

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = x \quad i \quad \frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}$$

Gdy się zaś ułamki napisze w postaci dzielenia

$$a : b = am : bm \quad i \quad a : b = (a : m) : (b : m)$$

co wyraża znane twierdzenie o stosunkach.

Twierdzenie powyżej udowodnione służy — między innymi — do wykazania, jak się zamienia ułamek zwykajny na dziesiętny.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 10^n}{b \cdot 10^n} = \frac{a \cdot 10^n : b}{b \cdot 10^n : b} = \frac{a(10^n \cdot b)}{10^n} = \frac{c}{10^n} \quad 2)$$

Ułamek ten $\left(\frac{c}{10^n}\right)$ będzie skończony, jeżeli 10^n jest przez b podzielne, co wtedy będzie, jeżeli czynnikami liczby b są 2 i 5.

Jeżeli zaś b nie ma wcale czynników 2 i 5 natenczas ułamek jest peryodyczny czysty, a jego wzór ogólny:

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{10^p} + \frac{d}{10^{2p}} + \frac{d}{10^{3p}} + \dots \quad 3)$$

gdzie d oznacza peryod o p cyfrach.

Jeżeli w mianowniku b oprócz czynników 2 i 5 są jeszcze inne czynniki, natenczas będzie ułamek peryodyczny mieszany:

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{10^p} + \frac{f}{10^{p+m}} + \frac{f}{10^{p+2m}} + \frac{f}{10^{p+3m}} + \dots \quad 4)$$

gdzie d oznacza liczbę przed peryodem o p cyfrach, f zaś peryod o m cyfrach.

§. 16. Ponieważ stosunek liczb mianowanych jest równy stosunkowi takich samych liczb niemianowanych,

przeto każdą proporcję ilościową można zamienić na proporcję liczbową (z liczb niemianowanych złożoną). Udowodniając twierdzenia o proporcjach odnosi się je zawsze do proporcji liczbowych.

Proporcja jest zestawieniem dwóch równych stosunków, t. j. stosunków, których wykładniki są równe. Jeżeli zatem

$$\begin{array}{llll}
 a : b = c : d & \text{więc } a : b = m & \text{z czego } a = b \cdot m \\
 & \text{i } c : d = m & \text{„ } d = \frac{c}{m} \\
 & & \hline
 & & \text{przeto } ad = bc
 \end{array}$$

W każdej zatem proporcji iloczyn wyrazów skrajnych równa się iloczynowi wyrazów średnich. Tego twierdzenia używa się, aby udowodnić wszystkie inne twierdzenia o proporcji. N. p.

Założenie: $a : b = c : d$

Twierdzenie $(a + b) : b = (c + d) : d$

Albowiem $(a + b) \cdot d = b (c + d)$

$$ab + bd = bc + bd$$

więc $ab = bc$ jak to ze założenia wynika.

IV. O r ó w n a n i a c h.

§. 17. Porządkowanie równań. Ze znanego pewnika wynika:

1. Równanie pozostaje równaniem, jeżeli się obydwie jego strony przez tę samą liczbę pomnoży. — Mnożąc przez najmniejszą wspólną wielokrotność mianowników, uwalnia się równanie od ułamków.

2. Równanie pozostaje równaniem, jeżeli się obydwie jego strony do tej samej potęgi podniesie. — Tego używa się, aby równanie uwolnić od pierwiastków, czyli sprowadzić je do wymierności. Przytem starać się trzeba, aby pierwiastek z niewiadomej — jeżeli to tylko możebne — sam jeden po jednej stronie równania się znajdował.

3. Równanie pozostaje równaniem, jeżeli się liczbę z jednej strony znaku równości przeniesie na drugą z przeciwnym znakiem działania. N. p.

$$\begin{array}{l} ax - b = cx + d \\ \text{ponieważ } -cx + b = -cx + b \\ \text{więc } \frac{ax - cx = b + d}{\text{czyli } (a - c)x = b + d} \\ \text{ale } a - c = a - c \\ \text{więc } x = \frac{b + d}{a - c} \end{array}$$

§. 18. Rozwiązywanie równań o jednej niewiadomej.

1. Równania pierwszego stopnia rozwiązuje się, przenosząc niewiadomą na jedną a wszystkie liczby wiadome na drugą stronę równania.

2. Równania kwadratowe czyste rozwiązuje się, wyciągając obustronnie drugi pierwiastek.

3. Równania drugiego stopnia mieszane trzeba przywieść do:

$$\begin{array}{l} x^2 + ax = b \\ \text{a ponieważ } \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \\ \text{więc } x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + b \\ \text{czyli } \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + b \\ \text{z czego } x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} \end{array}$$

4. Równania wyższych stopni można zamienić na kwadratowe, jeżeli niewiadoma przychodzi tylko w dwóch potęgach, a wykładnik jeden jest 2 razy większy od drugiego. N. p.

$$\alpha) \quad ax^6 + bx^3 = c \quad \text{Podstawivszy } x^3 = y, \text{ więc } x^6 = y^2 \text{ otrzyma się } ay^2 + by = c$$

$$\beta) \quad a \sqrt[2x]{b} + c \sqrt[x]{b} = d \quad \text{Podstawivszy } \sqrt[2x]{b} = y,$$

$$\text{więc } \sqrt[x]{b} = y^2 \text{ będzie } ay + cy^2 = d$$

5. Przy równaniach wykładniczych należy przede wszystkim na to zwrócić uwagę, czy je można logarytmować. Gdyby obydwie, albo choćby jedna strona równania była sumą lub różnicą [§. 18. 4. przykład β .], natenczas uważa się je na razie jako niewykładnicze. Gdy zaś w równaniu nie ma wcale ani sum ani różnic, natenczas logarytmuje się je obustronnie. N. p.

$$(10^2 x)^{\log x} = \frac{1}{10} \text{ więc } \log x (2 + \log x) = -1 \quad \text{czyli}$$

$$2 \log x + (\log x)^2 = -1 \text{ z czego } \log x = -1 \text{ więc } x = \frac{1}{10}$$

6. W równaniach odwrotnych wyłącza się najpierw wspólny czynnik z tych wyrazów, które mają równe współczynniki, następnie w równaniach odwrotnych trzeciego stopnia

$$x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0 \quad \text{przekształconych na}$$

$$(x^3 + 1) + ax(x + 1) = 0$$

dzieli się całe równanie przez $x + 1$, a otrzyma się

$$x^2 + (a - 1)x + 1 = 0$$

Równania odwrotne 4^o stopnia

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 \quad \text{przekształcone na}$$

$$(x^4 + 1) + ax(x^2 + 1) + bx^2 = 0$$

dzieli się przez x^2 , wskutek czego otrzyma się

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0 \quad 1)$$

$$\text{A ponieważ } x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

$$\text{przeto będzie } \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0,$$

$$\text{a gdy } x + \frac{1}{x} = y \quad y^2 + ay + b - 2 = 0$$

§. 19. Rozwiązywanie równań o kilku niewiadomych.

1. Metoda podstawiania. Dane są równania:

$$ax + by = c \quad \text{i} \quad a_1x + b_1y = c_1$$

z pierwszego wynika $x = \frac{c - by}{a}$, a gdy się tę wartość

$$\text{wstawi w drugie } \frac{a_1(c - by)}{a} + b_1y = c_1$$

Równanie to należy rozwiązać, a otrzymaną wartość za y podstawić. Metoda ta zwłaszcza wtedy wygodna, gdy jeden ze współczynników a , a_1 , b lub b_1 jest równy 1.

2. Metoda porównania. Dane są równania:

$$ax + by = c \quad \text{więc } x = \frac{c - by}{a}$$

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{więc } x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1}$$

$$\text{przeto } \frac{c - by}{a} = \frac{c_1 - b_1y}{a_1}$$

z którym to równaniem należy postąpić jak wskazano wyżej.

3. Metoda równych współczynników. Dane są równania:

$$ax + by = c \quad \text{i} \quad a_1x + b_1y = c_1$$

Mnoży się tedy każde równanie przez taką liczbę, aby współczynniki jednej z niewiadomych były równe. Nowy ten współczynnik ma być najmniejszą wspólną wielokrotnością poprzednich. Przeto

$$ab_1x + bb_1y = b_1c$$

$$\underline{a_1bx \pm bb_1y = bc_1}$$

z czego $(ab_1 - a_1b)x = b_1c - bc_1$, więc $x = \frac{b_1c - bc_1}{ab_1 - a_1b}$

Korzystną jest ta metoda zwłaszcza wtedy, gdy jedna z niewiadomych już ma równe współczynniki, a używa się jej wyłącznie, gdy jest dane $x + y = s$ i $x - y = d$, raz dodając raz odejmując te równania.

4. Metoda czynnika dowolnego. Jedno z dawnych równań

$$ax + by = c \quad \text{i} \quad a_1x + b_1y = c_1$$

mnoży się przez dowolny czynnik (p) a drugie do tego dodaje, więc

$$apx + bpy = pc$$

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$\text{przeto} \quad (ap + a_1)x + (bp + b_1)y = cp + c_1 \quad 1)$$

$$\text{kładąc teraz w 1) raz} \quad ap + a_1 = 0 \quad 2)$$

$$\text{drugi raz} \quad bp + b_1 = 0 \quad 3)$$

otrzyma się $(bp + b_1)y = cp + c_1$ i $(ap + a_1)x = cp + c_1$

w pierwsze z tych równań podstawia się za p wartość z 2) w drugie wartość z 3).

Tych samych metod używa się do rozwiązania równań drugiego stopnia. Niekiedy można jednak sztucznym sposobem łatwiej dojść do celu. N. p.

$$\alpha) \text{ Dane jest } x \pm y = a \quad \text{i} \quad xy = b$$

$$\text{Wtedy z pierwszego} \quad x^2 \pm 2xy + y^2 = a^2$$

$$\text{z drugiego} \quad \mp 4xy = \mp 4b$$

$$\text{przeto} \quad (x \mp y)^2 = a^2 \mp 4b,$$

$$\text{z czego} \quad x \mp y = \pm \sqrt{a^2 - 4b}$$

A teraz używa się metody równych współczynników.

$$\beta) \text{ Dane jest } x^2 + y^2 = a \quad \text{i} \quad xy = b$$

$$\text{Natenczas} \quad x^2 + y^2 = a$$

$$2xy = 2b$$

$$\text{przeto} \quad (x + y)^2 = a + 2b \quad \text{i} \quad (x - y)^2 = a - 2b$$

$$\text{więc} \quad x + y = \pm \sqrt{a + 2b} \quad \text{i} \quad x - y = \pm \sqrt{a - 2b}$$

Poczem używa się metody równych współczynników.

$$\gamma) \text{ Dane jest } x^2 - y^2 = a \quad \text{i} \quad x \mp y = b$$

$$\text{Natenczas} \quad (x^2 - y^2) : (x \mp y) = x \pm y = a : b.$$

V. O postęпах i ich zastosowaniu.

§. 20. Postęp arytmetyczny jest takie następstwo liczb, w którym każda następująca jest od poprzedzającej o tę samą liczkę ($\pm d$) większa. — Z tego wynika
 $a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d, \dots, a_n = a_1 + (n-1)d$ 1)

$$\text{Wyraz na sumę} \quad S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \quad 2)$$

wyprowadza się, dodając n pierwszych członów raz w porządku naturalnym drugi raz w porządku wręcz przeciwnym. Otrzyma się w ten sposób dwa równania, które należy do siebie dodać.

Aby pomiędzy A_n i A_{n+1} postępu arytmetycznego wstawić p nowych członów, któreby z danymi (A_n i A_{n+1}) tworzyły postęp arytmetyczny, należy pamiętać, że n (nowego postępu) $= p + 2$, a_1 (nowego postępu) $= A_n$, $a_n = A_{n+1}$.

Wartości te wstawia się w 1) §. 20 celem wyszukania nowego d .

§. 21. Postęp geometryczny jest takie następstwo liczb, w którym każda następna liczba jest stałą wielokrotnością (q) poprzedzającej. Z tego wynika

$$a_2 = a_1 q, a_3 = a_1 q^2, \dots, a_n = a_1 q^{n-1} \quad 1)$$

Równanie $S_n = a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-1}$ należy obustronnie pomnożyć przez q i odjąć od nowego, a otrzyma się

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad 2)$$

gdy $q > 1$. Jeżeli zaś $q < 1$, wyjmuje się w liczniku i mianowniku -1 za nawias, a otrzyma się

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad 3)$$

Jeżeli w tym ostatnim wypadku $n = \infty$, natenczas z uwagi, że

$$q^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n} = \frac{1}{b^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad \text{otrzyma się z 3)}$$

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} \quad 4)$$

Wzoru 4) używa się, aby ułamek peryodyczny zamienić na ułamek zwykły.

$$\text{I. } [\S. 15, 3)] \frac{a}{b} = \frac{d}{10^p} + \frac{d}{10^{2p}} + \frac{d}{10^{3p}} + \dots$$

Powyższy ułamek jest sumą postępu geometrycznego, w którym

$$\frac{d}{10^{3p}} : \frac{d}{10^p} = \frac{d}{10^{3p}} : \frac{d}{10^{2p}} = \dots = \frac{1}{10^p} = q, \text{ a } n = \infty$$

$$\text{Tedy } [\S. 21, 4)] \frac{a}{b} = \frac{d}{10^p} : \left(1 - \frac{1}{10^p}\right) = \frac{d}{10^p} : \left(\frac{10^p - 1}{10^p}\right) = \\ = \frac{d}{10^p - 1}$$

$$\text{II. } [\S. 15, 4)] \frac{a}{b} = \frac{d}{10^p} + \frac{f}{10^{p+m}} + \frac{f}{10^{p+2m}} + \\ + \frac{f}{10^{p+3m}} + \dots$$

$$\text{Ale } \frac{f}{10^{p+2m}} : \frac{f}{10^{p+m}} = \frac{f}{10^{p+3m}} : \frac{f}{10^{p+2m}} = \frac{1}{10^m} = q$$

$$\text{przeto } \frac{a}{b} = \frac{d}{10^p} + S_n \quad 5)$$

$$\text{Według 4) } \S. 21. \text{ jest } S_n = \frac{f}{10^{p+m}} : \left(1 - \frac{1}{10^m}\right) = \\ = \frac{f}{10^{p+m}} : \left(\frac{10^m - 1}{10^m}\right) = \frac{f}{10^p (10^m - 1)}$$

$$\text{przeto z 5) } \frac{a}{b} = \frac{d}{10^p} + \frac{f}{10^p (10^m - 1)} = \\ \frac{d (10^m - 1) + f}{10^p (10^m - 1)} = \frac{(d 10^m + f) - d}{(10^m - 1) \cdot 10^p}$$

Aby między A_n i A_{n+1} postępu geometrycznego wstawić p członów, aby te z danymi tworzyły nowy postęp geometryczny, potrzeba w 1) §. 21 wstawić $n = p + 2$, $a_1 = A_n$, $a_n = A_{n+1}$, a znajdzie się q nowego postępu.

§. 22. **Rachunek procentu składanego.** Procent składany jest wtedy, gdy kapitał końcowy (kapitał wraz z dochodem) po upływie pewnego czasu staje się kapitałem na następny okres takiego samego czasu. Dochód dolicza się do kapitału zwykle z końcem roku (kapitalizacja całoroczna), albo co pół roku (kapitalizacja półroczna).

I. Kapitał K umieszczono na $P\%$ procentu składanego, i ten kapitalizował się przez n lat. Jaki jest kapitał końcowy (K_n)?

1 korona daje z końcem 1. roku $1 + \frac{P}{100} = 1 + p = e$ koron
 e koron z początkiem 2-go roku dają z końcem tego roku,
 a więc po upływie 2-ich lat $e \cdot e = e^2$ koron
 e^2 koron z początkiem 3-go roku dają z końcem 3 lat
 $e \cdot e^2 = e^3$ koron i t. d.

przeto 1 korona po upływie n lat uczyni e^n

a więc $K_n = K \cdot e^n = K (1 + p)^n$ 1)

II. Jeżeli kapitalizacja była półroczna, tedy w 1) zamiast p należy podstawić $\frac{P}{2}$, zamiast n będzie $2n$.

III. Kapitał r wkładano na $P\%$ składany z początkiem każdego roku. — Pierwsze r , kapitalizując się przez n lat, wzrosnie do re^n i t. d.; ostatnie r do re , przedostatnie do re^2 , trzecie z końca do re^3 itd. Cały zatem kapitał końcowy wynosić będzie:

$K_n = re + re^2 + re^3 + \dots + re^n = re [1 + e + e^2 + \dots + e^{n-1}]$ czyli

$$K_n = re \left[\frac{e^n - 1}{e - 1} \right] = r [1 + p] \left[\frac{(1 + p)^n - 1}{p} \right] \quad 2)$$

jeżeli się znajdzie sumę postępu geometrycznego $[1 + e + \dots + e^{n-1}]$.

IV. Kwotę r wkłada się na $P\%$ składany przez n lat z końcem każdego roku. — Rachunek jest taki sam jak pod III. z tą różnicą, że pierwsza rata uczyni re^{n-1} , a ostatnia tylko r , przeto

$$K_n = r + re + re^2 + \dots + re^{n-1} = r[1 + e + e^2 + \dots + e^{n-1}] \text{ czyli}$$

$$K_n = r \left[\frac{e^n - 1}{e - 1} \right] = r \left[\frac{(1 + p)^n - 1}{p} \right] \quad 3)$$

V. Jeżeli kapitał kapitalizuje się przez n lat i m miesięcy, natenczas K_n po upływie n lat oblicza się według jednego z wyżej z podanych wzorów, od tego zaś K_n oblicza się dochód i rosty za m miesięcy i ten do K_n dodaje.

VI. Wszelkie zagadnienia z rachunku, w który wchodzi procent składany, są zastosowaniem przytoczonych tu wypadków, należy tylko pamiętać, że w interesach pieniężnych wszystko się zapisuje, a nie się nie maże. Wierzyciel rachuje, ile mu się u dłużnika należy, jak gdyby ten mu nic a nic nie zwrócił, — dłużnik natomiast oblicza, ile się jemu u wierzyciela należy, jak gdyby on wierzycielowi nie nie był winien. Dopiero tak obrachowane kwoty porównuje się. N. p. A składał u B po r koron przez n lat z początkiem każdego roku na $P\%$ składany, aby po upływie tych lat pobierać przez dalszych m lat rentę r_1 koron, a w końcu otrzymać gotówką b koron.

A rachuje: r koron po upływie n lat uczynią [§. 22. 2)]

$$K_n = re \left[\frac{e^n - 1}{e - 1} \right]$$

Te K_n kapitalizują się przez m lat jako jednorazowy, kapitał, przeto według §. 22. 1) należy mi się u B:

$$K_{n+m} = re \left[\frac{e^n - 1}{e - 1} \right] e^m = re^{m+1} \left[\frac{e^n - 1}{e - 1} \right]$$

B rachuje: Należy mi się u A za r_1 , które mu przez m lat z końcem każdego roku wypłacałem [§. 22. 3)]

$$K_m = r_1 \left[\frac{e^m - 1}{e - 1} \right]$$

A ponieważ ta kwota o b koron ma być mniejsza od kwoty K_{n+m} , przeto

$$K_{n+m} - K_m = b \quad \text{czyli}$$

$$re^{m+1} \left[\frac{e^n - 1}{e - 1} \right] - r_1 \left[\frac{e^m - 1}{e - 1} \right] = b$$

Teraz wyszukuje się z tego równania owa ilość, o którą chodzi.

VI. Kombinacje i twierdzenie Newtona o dwumianie.

§. 23. **Przestawienia.** — Niech P_n będzie liczbą przestawień z n elementów. W pierwszej grupie tych przestawień jest n elementów; przed każdym elementem i poza nimi jest 1 miejsce wolne, więc wszystkich miejsc wolnych jest $n+1$. Wstawiając $(n+1)$ szy element kolejno na wolnych miejscach, otrzyma się z pierwszej grupy $n+1$ nowych grup. Taką samą ilość nowych przestawień otrzyma się z drugiej i każdej następnej grupy. Liczba zatem przestawień z $n+1$ elementów będzie:

$$P_{n+1} = P_n (n+1)$$

Pamiętając, że $P_1 = 1$ i wstawiając w powyższem równaniu kolejno $n = 1, 2, 3, \dots$ otrzyma się

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n! \quad 1)$$

§. 24. **Połączenia.** Przypuśćmy, że z danych n elementów utworzono wszelkie połączenia po r elementów w grupie, i że liczba tych połączeń wynosi C_n^r . W pierwszej grupie nie przychodził $n-r$ elementów z tych, które były dane, a gdy z tych po jednym do pierwszej grupy będziemy dodawać, otrzymany z niej $n-r$ grup $r+1$

klasy. Tyleż grup otrzyma się z drugiej i każdej następnej grupy, ze wszystkich więc danych grup otrzyma się nowych $C_n^r (n-r)$. — Tworząc jednak w ten sposób terna, kwaterna i t. d. przekonamy się, że każde terno powtarzać się będzie 3 razy, każde kwatarno 4 razy itd. przeto

$$C_n^{r+1} = C_n^r \cdot \frac{(n-r)}{r+1}$$

Pamiętając, że $C_n^1 = n$ i podstawiając w powyższem równaniu $r = 1, 2, 3, \dots$ otrzyma się

$$C_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots[n-(r-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots r}$$

albo znalazłszy w ostatnim czynniku różnicę

$$C_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n+1-r)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots r} = \binom{n}{r}^{1)}$$

§. 25. **Waryacye.** Waryacye są przedstawione połączenia, przeto

$$V_n^r = C_n^r \cdot P_r = \binom{n}{r} \cdot r! = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n+1-r)}{r!} \cdot r!$$

$$\text{czyli} \quad V_n^r = n(n-1)(n-2)\dots(n+1-r)$$

§. 26. **Potęgi dwumianu.** Pomnożywszy przez siebie dwumiany $(x+a) \cdot (x+b) \cdot (x+c) \dots$ w liczbie n i uporządkowawszy iloczyn według potęg zasady x , otrzyma się:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\dots = x^n + (a+b+c\dots)x^{n-1} + (ab+ac+\dots+bc+bd+\dots)x^{n-2} + (abc+abd+\dots+acd+\dots)x^{n-3} + \dots + abcd\dots 1)$$

Z tego wynika, że drugi współczynnik jest sumą unionów, trzeci sumą amb i t. d. z n elementów.

Jeżeli $a = b = c = \dots$ natenczas

$$(x+a)(x+a)(x+a)\dots = x^n + (a+a+\dots)x^{n-1} + (a^2+a^2+\dots)x^{n-2} + (a^3+a^3+\dots)x^{n-3} + \dots + a^n$$

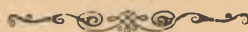
Według tego można wzór 2) w §. 26 napisać w formie

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} a x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} x + \binom{n}{n} a^n \quad 5)$$

Gdy się w 5) podstawia $n = 2, 3$, otrzyma się

$$(x + a)^2 = \binom{2}{0} x^2 + \binom{2}{1} a x + \binom{2}{2} a^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x + a)^3 = \binom{3}{0} x^3 + \binom{3}{1} a x^2 + \binom{3}{2} a^2 x + \binom{3}{3} a^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$



M 42113/1

UP - Kraków BG



1050152558

