ROZDZIAŁ 1

Relacje równoważności

DEFINICJA 1. Relację $R \subseteq X \times X$ nazywamy *relacją równoważności* lub *równoważnością* w zbiorze X, jeżeli R jest relacją zwrotną, symetryczną i przechodnią.

PRZYKŁAD 2. Relacja $\equiv_3 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (przystawania modulo 3) określona wzorem

$$m \equiv_3 n \Leftrightarrow 3 \mid (m - n)$$

jest relacją równoważności.

DEFINICJA 3. Niech $R \subseteq X \times X$ będzie relacją równoważności, $X \neq \emptyset$. Niech $x \in X$. Zbiór

$$[x]_R = \{y \in X : xRy\}$$

nazywamy *klasą równoważności* lub *klasą abstrakcji* relacji równoważności R wyznaczoną przez element x. Element x nazywamy *reprezentantem* klasy abstrakcji $[x]_R$.

Jeżeli relacja R jest ustalona, to dla uproszczenia piszemy $[x]$ zamiast $[x]_R$.

UWAGA 4. Niech X będzie dowolnym, niepustym zbiorem, R - relacją określoną w zbiorze X . Wtedy dla dowolnego $x \in X$ jest $[x] \in P(X) \setminus \{\emptyset\}$.

TWIERDZENIE 5. *Niech X będzie dowolnym, niepustym zbiorem, $R \subseteq X \times X$ - relacją równoważności, $a, b \in X$. Wtedy następujące warunki są równoważne*

(i) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$,

(ii) aRb,
(iii) $[a] = [b]$.

Definicja 6. Niech $R \subseteq X \times X$ będzie relacją równoważności, $X \neq \emptyset$. Zbiór

$$X/R = \{[x] : x \in X\}$$

nazywamy *zbiorem ilorazowym* zbioru X względem relacji R.

Definicja 7. Niech X będzie dowolnym, niepustym zbiorem. Zbiór $D(X) \subseteq P(X)$ nazywamy *podziałem zbioru* X, jeżeli
(i) $\forall_{A \in D(X)}[A \neq \emptyset]$,
(ii) $\forall_{A,B \in D(X)}[A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$,
(iii) $\bigcup D(X) = X$.

Twierdzenie 8. *Niech R będzie relacją równoważności określoną niepustym zbiorze X. Wtedy zbiór*

$$X/R = \{[x] : x \in X\}$$

jest podziałem zbioru X. Odwrotnie, jeżeli $D(X)$ jest podziałem niepustego zbioru X, to relacja

$$R_{D(X)} = \{(x, y) \in X \times X : \exists_{A \in D(X)} : (x \in A \wedge y \in A)\}$$

jest relacją równoważności w zbiorze X, przy czym $X/R_{D(X)} = D(X)$.

Twierdzenie to nazywamy *zasadą absrakcji.*

Przykład 9. Niech $\equiv_3 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ będzie relacja przystawania modulo 3. Wtedy

$$[0] = \{a \in \mathbb{Z} : 3 \mid (a - 0)\} = \{3k, \quad k \in \mathbb{Z}\},$$
$$[1] = \{a \in \mathbb{Z} : 3 \mid (a - 1)\} = \{3k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}\},$$
$$[2] = \{a \in \mathbb{Z} : 3 \mid (a - 2)\} = \{3k + 2, \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

oraz

$$\mathbb{Z}/\equiv_3 = \{[0], [1], [2]\}.$$