ROZDZIAŁ 1

Odwzorowania

Definicja 1. Niech X i Y będą dowolnymi zbiorami. Relację $f \subseteq X \times Y$ nazywamy *funkcją*, jeśli

(i) $\forall_{x \in X} \exists_{y \in Y} [(x, y) \in f]$,
(ii) $\forall_{x \in X} \forall_{y_1, y_2 \in Y} [((x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f) \Rightarrow y_1 = y_2]$.

W różnych dziedzinach matematyki funkcję nazywa się również *przekształceniem* lub *odwzorowaniem*.
Jeżeli relacja $f \subseteq X \times Y$ jest funkcją, to zapisujemy

$$f : X \to Y.$$

Przyjmujemy, że

$$y = f(x) \Leftrightarrow (x, y) \in f$$

dla $x \in X$ i $y \in Y$.
Zbiór X nazywamy *dziedziną* funkcji i oznaczamy $D(f)$, a zbiór

$$D^*(f) = \{y \in Y : \exists_{x \in X} : f(x) = y\} \subseteq Y$$

nazywamy *przeciwdziedziną* funkcji f.

Stwierdzenie 2. *1. Dla dowolnego zbioru Y,*

$$\emptyset = \emptyset \times Y$$

oraz $\emptyset : \emptyset \to Y$ jako relacja jest funkcją, nazywamy ją funkcją pustą. Dla funkcji pustej mamy

$$D(\emptyset) = D^*(\emptyset) = \emptyset.$$

UNIWERSYTET PEDAGOGICZNY im. KOMISJI EDUKACJI NARODOWEJ

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

2. Jeżeli $X \neq \emptyset$*, to nie istnieje funkcja*

$$f : X \to \emptyset.$$

Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją. Jeżeli $Y = \mathbb{R}$, to f nazywamy *funkcją rzeczywistą*, jeżeli $Y = \mathbb{C}$, to f nazywamy *funkcją zespoloną*.
Jeżeli $A \subseteq \mathbb{N}$, to funkcję $f : A \to Y$ nazywamy *ciągiem o wyrazach w zbiorze* Y. Jeżeli A jest zbiorem skończonym, to f nazywamy *ciągiem skończonym*. Jeżeli A jest zbiorem nieskończonym, to f nazywamy *ciągiem nieskończonym*.

Twierdzenie 3. *Funkcje* f *i* g *są równe (tj.* $f = g$*) wtedy i tylko wtedy, gdy*

(i) $D(f) = D(g)$,
(ii) $\forall_{x \in D(f)}[f(x) = g(x)]$.

Definicja 4. Jeżeli funkcja $f : X \to Y$ spełnia warunek

(i) $\forall x_1, x_2 \in X[x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$,
to f nazywamy *injekcją* zbioru X w zbiór Y, lub *funkcją różnowartościową*,
(ii) $\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X}[y = f(x)]$,
to f nazywamy *suriekcją* zbioru X na zbiór Y, lub *funkcją na*,
(iii) f jest injekcją i suriekcją, to f nazywamy *bijekcją* zbioru X na zbiór Y, lub *funkcją wzajemnie jednoznaczną*.

Definicja 5. Niech X będzie dowolnym zbiorem. Funkcję $I_X : X \to X$ określoną następująco

$$\forall_{x \in X}[I_X(x) = x]$$

nazywamy *identycznością*, (lub *tożsamością*) na zbiorze X

Definicja 6. Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją, $A \subseteq X$. Funkcję $f_{|A} : A \to Y$ określoną wzorem

$$\forall_{x \in A} f_{|A}(x) = f(x)$$

nazywamy *funkcją obciętą* lub *funkcją zawężoną* do zbioru A.

Twierdzenie 7. *Jeżeli* X *jest zbiorem* n*-elementowym i* Y *jest zbiorem* m*-elementowym, to istnieje* m^n *funkcji odwzorowujących zbiór* X *w zbiór* Y*, czyli zbiór* Y^X *ma* m^n *elementów.*

Definicja 8. Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Zbiór

$$f(A) = \{y \in Y : \exists_{x \in A}[y = f(x)]\}$$

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

nazywamy *obrazem* zbioru A wyznaczonym przez funkcję f.
Zbiór

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : \exists_{y \in B}[y = f(x)]$$

nazywamy *przeciwobrazem* zbioru B wyznaczonym przez funkcję f.

Zbiór $f(X)$ będziemy również oznaczać przez $\mathrm{Im}(f)$. Zauważmy, że $\mathrm{Im}(f) = D^*(f)$.

TWIERDZENIE 9. *Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją, $A \subseteq X$, $B \subseteq X$. Wtedy*

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
(ii) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$,
(iii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$.

TWIERDZENIE 10. *Funkcja $f : X \to Y$ jest injekcją wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych podzbiorów A i B zbioru X zachodzi równość*

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

TWIERDZENIE 11. *Funkcja $f : X \to Y$ jest injekcją wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych podzbiorów A i B zbioru X zachodzi równość*

$$f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B).$$

TWIERDZENIE 12. *Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją, $A \subseteq Y$, $B \subseteq Y$. Wtedy*

(i) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
(ii) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
(iii) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

TWIERDZENIE 13. *Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Wtedy*

(i) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, *(równość przy dodatkowym założeniu, że f jest injekcją,*
(ii) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, *(równość przy dodatkowym założeniu, że f jest surjekcją.*

TWIERDZENIE 14. *Niech $f : X \to Y$ i $g : W \to Z$ będą funkcjami. Wtedy relacja $g \circ f$ jest funkcją, przy czym $D(g \circ f) = f^{-1}(Y \cap W)$ i $D^*(g \circ f) \subseteq Z$.*