ROZDZIAŁ 1

Algebra zbiorów

Najczęściej zbiory będziemy oznaczać dużymi literami $A, B, C, \ldots, X, Y, \ldots$, elementy zbiorów - małymi $a, b, c, \ldots, x, y, \ldots$.
Podstawowe zbiory liczbowe
$\mathbb{N}$ - liczby naturalne (z zerem)
$\mathbb{N}_k$ - liczby naturalne większe bądź równe k
$\mathbb{Z}$ - liczby całkowite
$\mathbb{Q}$ - liczby wymierne
$\mathbb{R}$ - liczby rzeczywiste
$\mathbb{C}$ - liczby zespolone
Jeżeli x jest elementem zbioru X to zapisujemy

$$x \in X$$

Zapis

$$x \notin X$$

oznacza, że x nie jest elementem zbioru X.
Zbiór, który nie posiada elementów nazywamy *zbiorem pustym* i oznaczamy $\emptyset$.
Jeżeli $x_1, \ldots, x_n$ są jedynymi elementami zbioru X, to X nazywamy *zbiorem skończonym (n-elementowym)* i piszemy

$$X = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Jeżeli każdy element zbioru X jest elementem zbioru Y, to mówimy, że X jest *podzbiorem* zbioru Y lub, że X *zawiera się* w zbiorze Y i zapisujemy

$$X \subseteq Y.$$

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Symbolicznie
$$X \subseteq Y \Longleftrightarrow \forall_x [x \in X \Rightarrow x \in Y].$$
Jeżeli $X \subseteq Y$ i $X \neq Y$, to piszemy $X \subset Y$.
Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X nazywamy *zbiorem potęgowym* zbioru X i oznaczamy symbolem $P(X)$ lub 2^X. Symbolicznie
$$P(X) := \{A : A \subseteq X\}.$$

Uwaga 1. Jeżeli X jest dowolnym zbiorem to $P(X) \neq \emptyset$, bo
$$\emptyset \in P(X), \qquad X \in P(X).$$

Mówimy, że zbiory X i Y są *równe*, jeżeli mają te same elementy, tzn
$$X = Y \Longleftrightarrow \forall_x [x \in X \Leftrightarrow x \in Y],$$
$$X = Y \Longleftrightarrow X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X.$$

Definicja 2. *Sumą (mnogościową)* zbiorów X i Y nazywamy zbiór $X \cup Y$ wszystkich elementów, które należą do zbioru X lub do zbioru Y. Symbolicznie
$$(x \in X \cup Y) \Longleftrightarrow (x \in X \vee x \in Y).$$

Definicja 3. *Iloczynem (mnogościowym)*zbiorów X i Y (*częścią wspólną* zbiorów X i Y) nazywamy zbiór $X \cap Y$ wszystkich elementów, które należą jednocześnie do zbioru X i do zbioru Y. Symbolicznie
$$(x \in X \cap Y) \Longleftrightarrow (x \in X \wedge x \in Y).$$

Jeżeli $X \cap Y = \emptyset$, to mówimy, że zbiory X i Y są *rozłączne*.

Definicja 4. *Różnicą (mnogościową)* zbiorów X i Y nazywamy zbiór $X \setminus Y$ wszystkich elementów, które należą do zbioru X, ale nie należą do zbioru Y. Symbolicznie
$$(x \in X \setminus Y) \Longleftrightarrow (x \in X \wedge x \notin Y).$$

Definicja 5. Dany jest zbiór X. *Dopełnieniem* zbioru $A \subseteq X$ nazywamy zbiór $X \setminus A$, który oznaczamy symbolem $-A$ (lub A'), czyli
$$-A = X \setminus A.$$

Uwaga 6. Dla dowolnych zbiorów A, B, C prawdziwe są następujące własności

(i) $A \cup \emptyset = A$,
(ii) $A \cup A = A$,
(iii) $A \cup B = B \cup A$,
(iv) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Uwaga 7. Dla dowolnych zbiorów A, B, C prawdziwe są następujące własności

(i) $A \cap \emptyset = \emptyset$,
(ii) $A \cap A = A$,
(iii) $A \cap B = B \cap A$,
(iv) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Stwierdzenie 8. *Dla dowolnych zbiorów A, B, C prawdziwe są następujące własności*

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
(ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Stwierdzenie 9. *Dla dowolnych zbiorów A, B, C prawdziwe są następujące własności*

(i) $A \setminus B = A \cap B'$,
(ii) $A \subseteq X \Rightarrow X \cap A = A$,
(iii) $A \subseteq X \Rightarrow X \cup A = X$,
(iv) $A'' = A$,
(v) $\emptyset' = X$,
(vi) $A \cap A' = \emptyset$,
(vii) $A \cup A' = X$,
(viii) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
(ix) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Definicja 10. Różnicą symetryczną zbiorów X i Y nazywamy zbiór

$$X \div Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

Uwaga 11. Dla dowolnych zbiorów X i Y spełniona jest następująca równość

$$X \div Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y).$$

Uwaga 12. Dla dowolnych zbiorów X, Y i Z zachodzą następujące własności

(1) $X \div Y = Y \div X$,
(2) $X \div (Y \div Z) = (X \div Y) \div Z$,
(3) $X \div \emptyset = X$,
(4) $X \div X = \emptyset$.

Definicja 13. Dane są zbiory X i Y. *Parę uporządkowaną* o *poprzedniku* $x \in X$ i *następniku* $y \in Y$ oznaczamy symbolem (x, y).

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Przyjmujemy, że dwie pary uporządkowane (x_1, y_1) i (x_2, y_2) są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$.
Uogólnieniem pojęcia pary uporządkowanej jest n*-ka uporządkowana* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

DEFINICJA 14. *Iloczynem (produktem) kartezjańskim* $X \times Y$ zbiorów X i Y nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych (x, y) takich, że $x \in X$ i $y \in Y$. Symbolicznie

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}.$$

Iloczyn kartezjański zbiorów $X_1, X_2, \ldots, X_n$ określamy jako zbiór

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n\}$$

Jeżeli $X_i = X$ dla $i = 1, \ldots, n$ to piszemy $X^n = X \times \ldots \times X$. Przyjmujemy, że $X^1 = X$.

UWAGA 15. Dla dowolnego zbioru X zachodzi równość

$$X \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times X.$$

UWAGA 16. Dla dowolnych zbiorów X, Y i Z mamy

(i) $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$,
(ii) $(X \setminus Y) \times Z = (X \times Z) \setminus (Y \times Z)$,
(iii) $(X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z)$.